Méthodes de quadrature

Polytech'Paris-UPMC

Préambule

Polynôme d'interpolation de LAGRANGE

Théorème (Polynôme d'interpolation) *Soient les $n+1$ points distincts*

$$(a_0 < a_1 < \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

il existe un unique polynôme *P de degré n qui coupe la fonction f sur ces points* i.e. *tel que :*

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}$$
$$P(a_i) = f(a_i)$$

C'est le polynôme interpolateur de LAGRANGE de f sur les points a_i.

Preuve et polynôme de LAGRANGE

Soient les $n+1$ points distincts $(a_0 < a_1 < \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on appelle *base de* LAGRANGE les polynômes de la forme :

$$\mathcal{L}_i(x) = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x - a_k}{a_i - a_k}$$

Preuve et polynôme de LAGRANGE

Soient les $n+1$ points distincts $(a_0 < a_1 < \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on appelle *base de* LAGRANGE les polynômes de la forme :

$$\mathcal{L}_i(x) = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{x-a_k}{a_i-a_k}$$

$$\forall i,j \qquad \mathcal{L}_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

Preuve et polynôme de LAGRANGE

Soient les $n+1$ points distincts $(a_0 < a_1 < \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on appelle *base de* LAGRANGE les polynômes de la forme :

$$\mathcal{L}_i(x) = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x-a_k}{a_i-a_k}$$

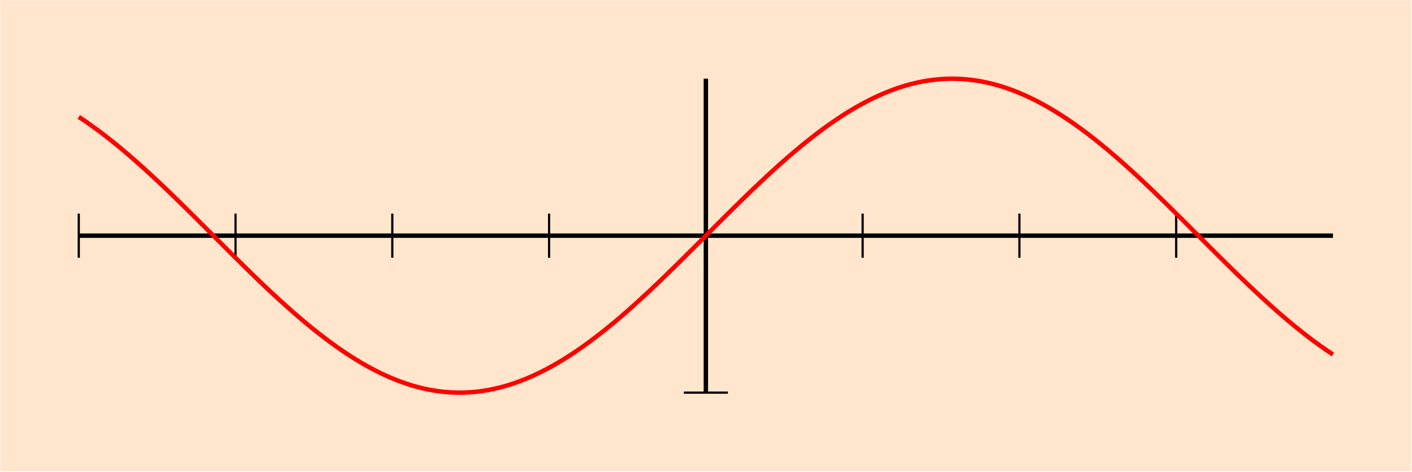
$$\forall i,j \qquad \mathcal{L}_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$$

Le polynôme :

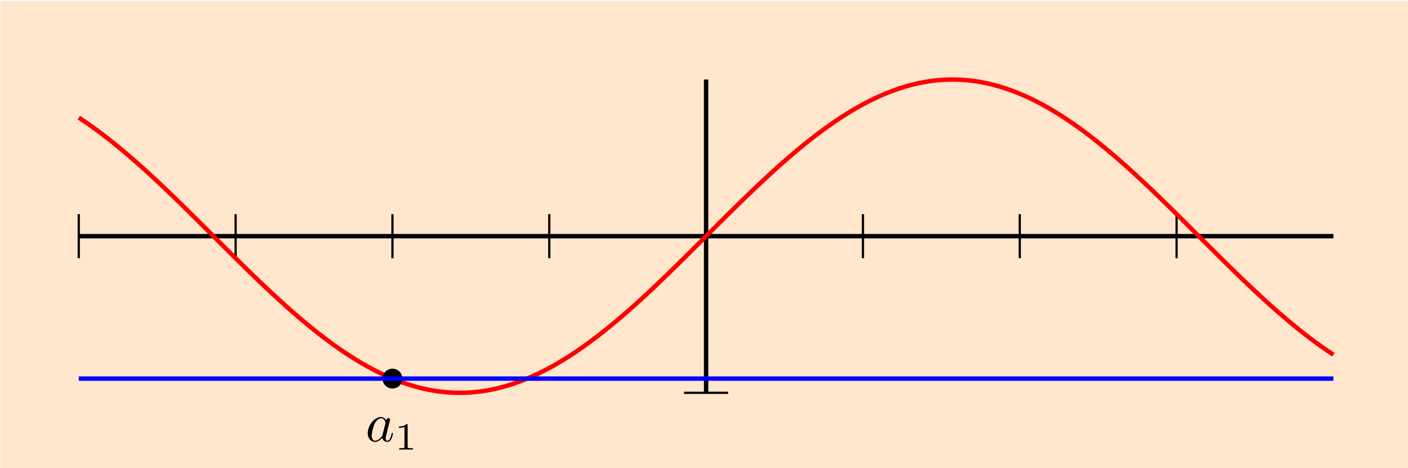
$$P(x) = f_0\mathcal{L}_0(x) + f_1\mathcal{L}_1(x) + \cdots + f_n\mathcal{L}_n(x)$$

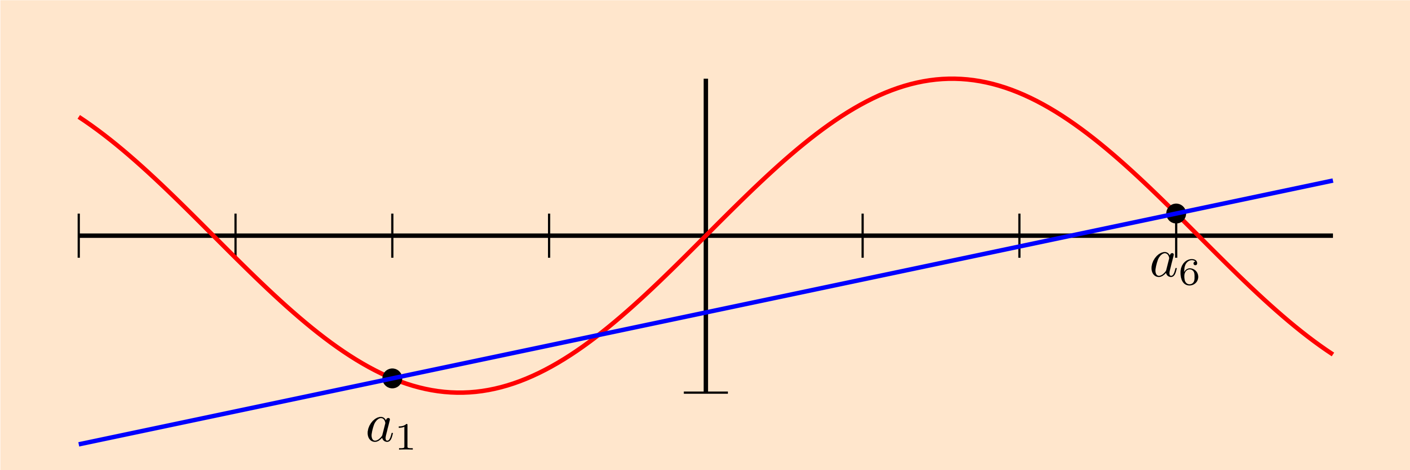
Convient. On l'appelle *polynôme d'interpolation de* LAGRANGE
L'unicité est à démontrer en exercice.

Exemple

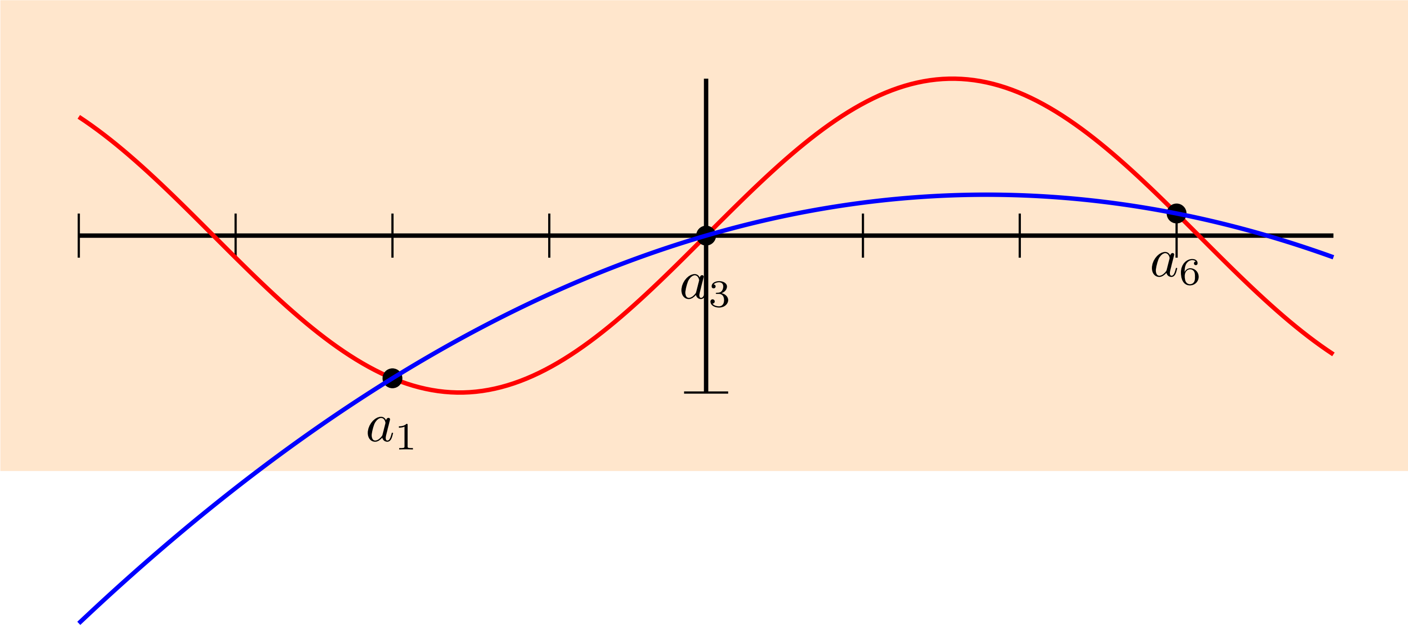


Exemple

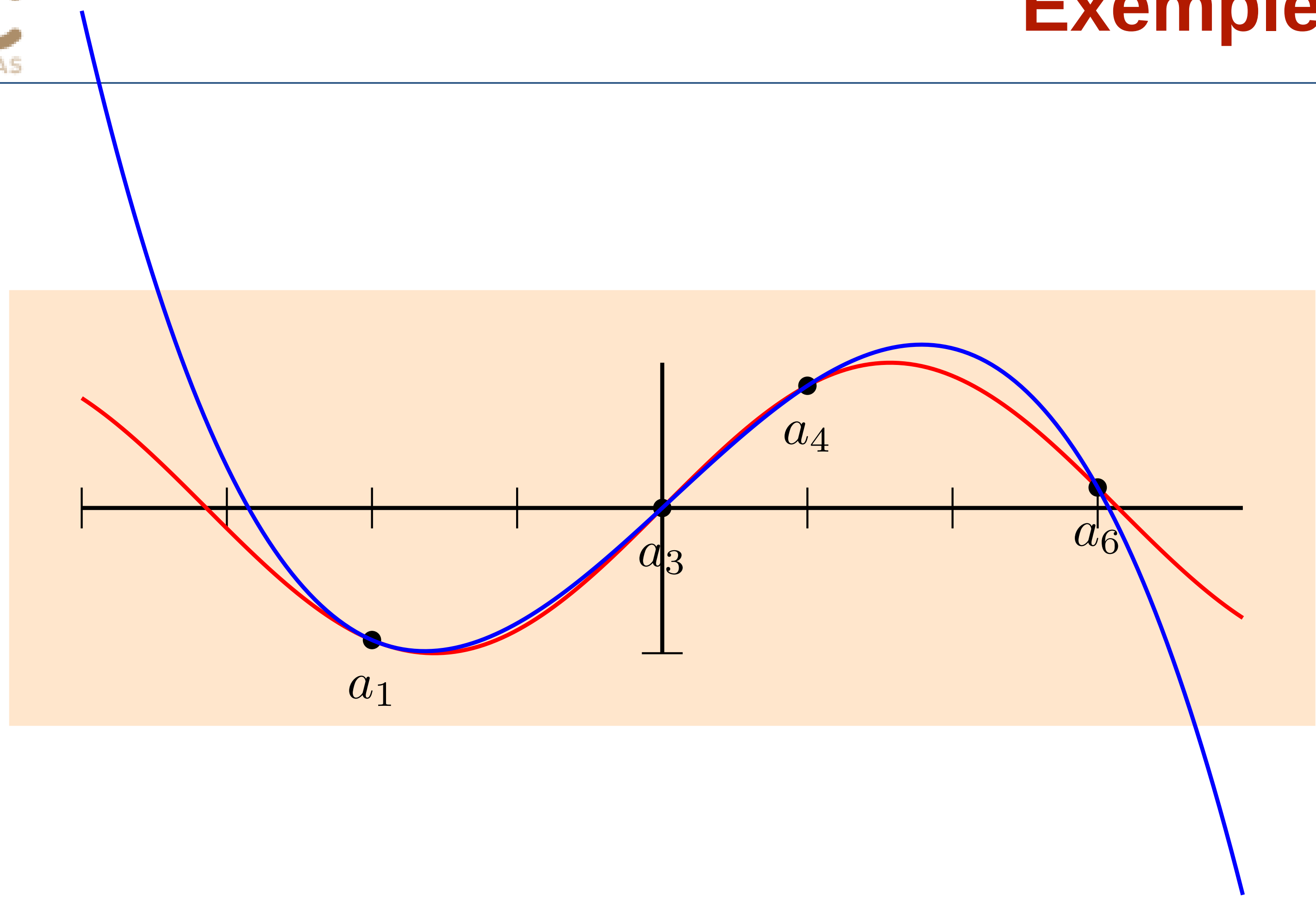



a_6
a_1

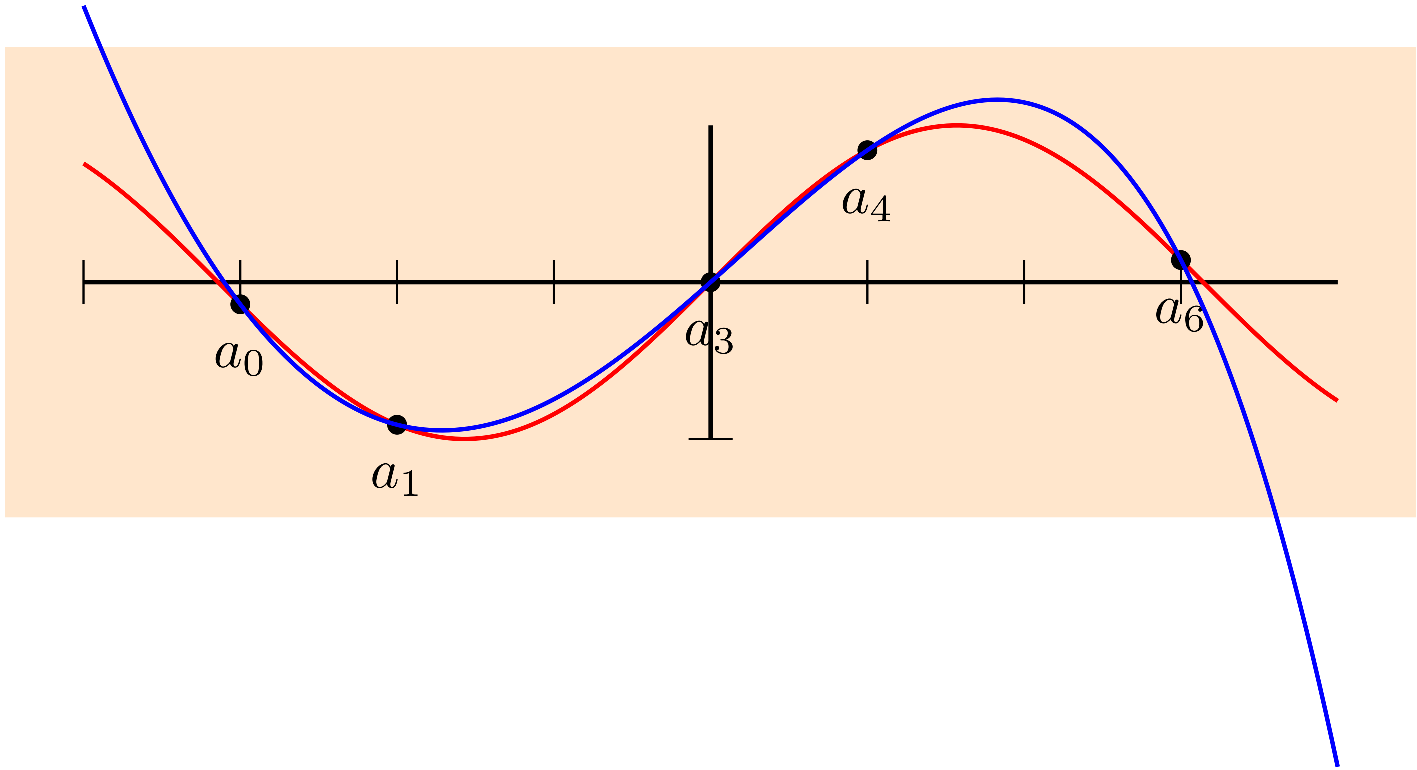
Exemple



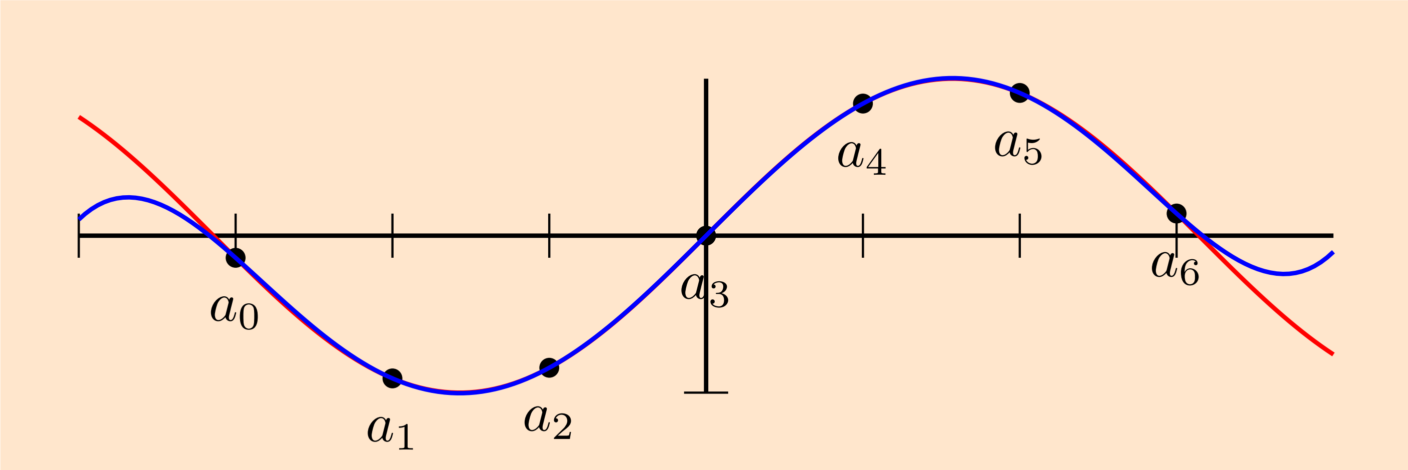
Exemple



Exemple



Exemple



Calcul de l'erreur d'interpolation

Si on interpole la fonction f C^{n+1} sur l'intervalle $[a,b]$, par le polynôme $P(x)$ de degré n, grâce au points d'interpolation $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$.

Théorème $\forall x \in [a,b]$ *il existe* $\eta \in [a_0, a_n]$ *tel que*

$$\begin{aligned} f(x) - P(x) &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)\phi(x) \\ \textit{avec} \qquad \phi(x) &= (x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_n) \end{aligned}$$

Calcul de l'erreur d'interpolation

Si on interpole la fonction f C^{n+1} sur l'intervalle $[a,b]$, par le polynôme $P(x)$ de degré n, grâce au points d'interpolation $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$.

Théorème *$\forall x \in [a,b]$ il existe $\eta \in [a_0, a_n]$ tel que*

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)\phi(x)$$

avec

$$\phi(x) = (x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_n)$$

Idée de la preuve :

On étudie la fonction $g(z) = f(z) - P(z) - (f(x) - P(x))\frac{\phi(z)}{\phi(x)}$

Calcul de l'erreur d'interpolation

Si on interpole la fonction f C^{n+1} sur l'intervalle $[a, b]$, par le polynôme $P(x)$ de degré n, grâce au points d'interpolation $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$.

Théorème $\forall x \in [a, b]$ *il existe* $\eta \in [a_0, a_n]$ *tel que*

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)\phi(x)$$

avec $$\phi(x) = (x - a_0)(x - a_1)\cdots(x - a_n)$$

Idée de la preuve :

On étudie la fonction $g(z) = f(z) - P(z) - (f(x) - P(x))\frac{\phi(z)}{\phi(x)}$

g s'annule $n + 2$ fois

Calcul de l'erreur d'interpolation

Si on interpole la fonction f C^{n+1} sur l'intervalle $[a,b]$, par le polynôme $P(x)$ de degré n, grâce au points d'interpolation $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$.

Théorème *$\forall x \in [a,b]$ il existe $\eta \in [a_0, a_n]$ tel que*

$$\begin{aligned} f(x) - P(x) &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)\phi(x) \\ \textit{avec} \qquad \phi(x) &= (x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_n) \end{aligned}$$

Idée de la preuve :

On étudie la fonction $g(z) = f(z) - P(z) - (f(x) - P(x))\frac{\phi(z)}{\phi(x)}$

g s'annule $n+2$ fois $\quad \Rightarrow \quad g'$ s'annule $n+1$ fois

Calcul de l'erreur d'interpolation

Si on interpole la fonction f C^{n+1} sur l'intervalle $[a, b]$, par le polynôme $P(x)$ de degré n, grâce au points d'interpolation $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$.

Théorème $\forall x \in [a, b]$ *il existe* $\eta \in [a_0, a_n]$ *tel que*

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)\phi(x)$$

avec

$$\phi(x) = (x - a_0)(x - a_1)\cdots(x - a_n)$$

Idée de la preuve :

On étudie la fonction $g(z) = f(z) - P(z) - (f(x) - P(x))\frac{\phi(z)}{\phi(x)}$

g s'annule $n+2$ fois $\Rightarrow$ g' s'annule $n+1$ fois

$\ldots$

$\Rightarrow$ $g^{(n+1)}$ s'annule une fois en η

Calcul de l'erreur d'interpolation

Si on interpole la fonction f C^{n+1} sur l'intervalle $[a, b]$, par le polynôme $P(x)$ de degré n, grâce au points d'interpolation $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$.

Théorème $\forall x \in [a, b]$ *il existe* $\eta \in [a_0, a_n]$ *tel que*

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)\phi(x)$$

avec

$$\phi(x) = (x - a_0)(x - a_1) \cdots (x - a_n)$$

Idée de la preuve :

On étudie la fonction $g(z) = f(z) - P(z) - (f(x) - P(x))\frac{\phi(z)}{\phi(x)}$

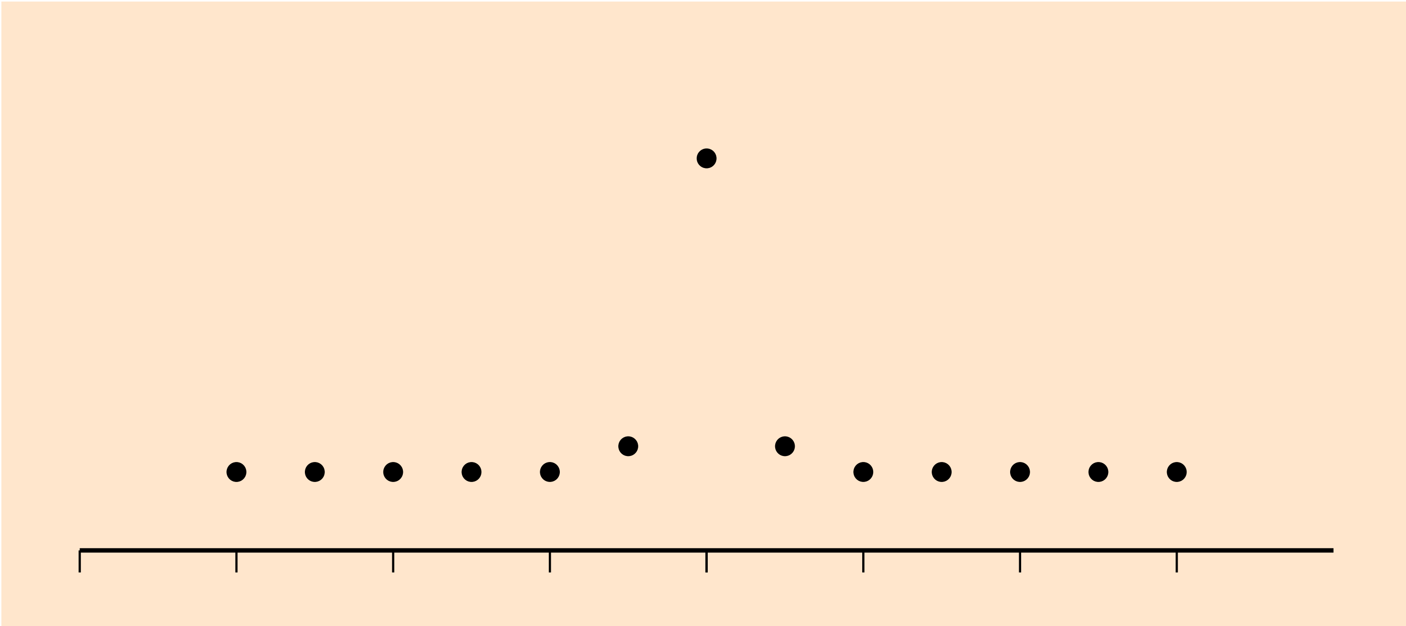
g s'annule $n+2$ fois $\Rightarrow$ g' s'annule $n+1$ fois

...

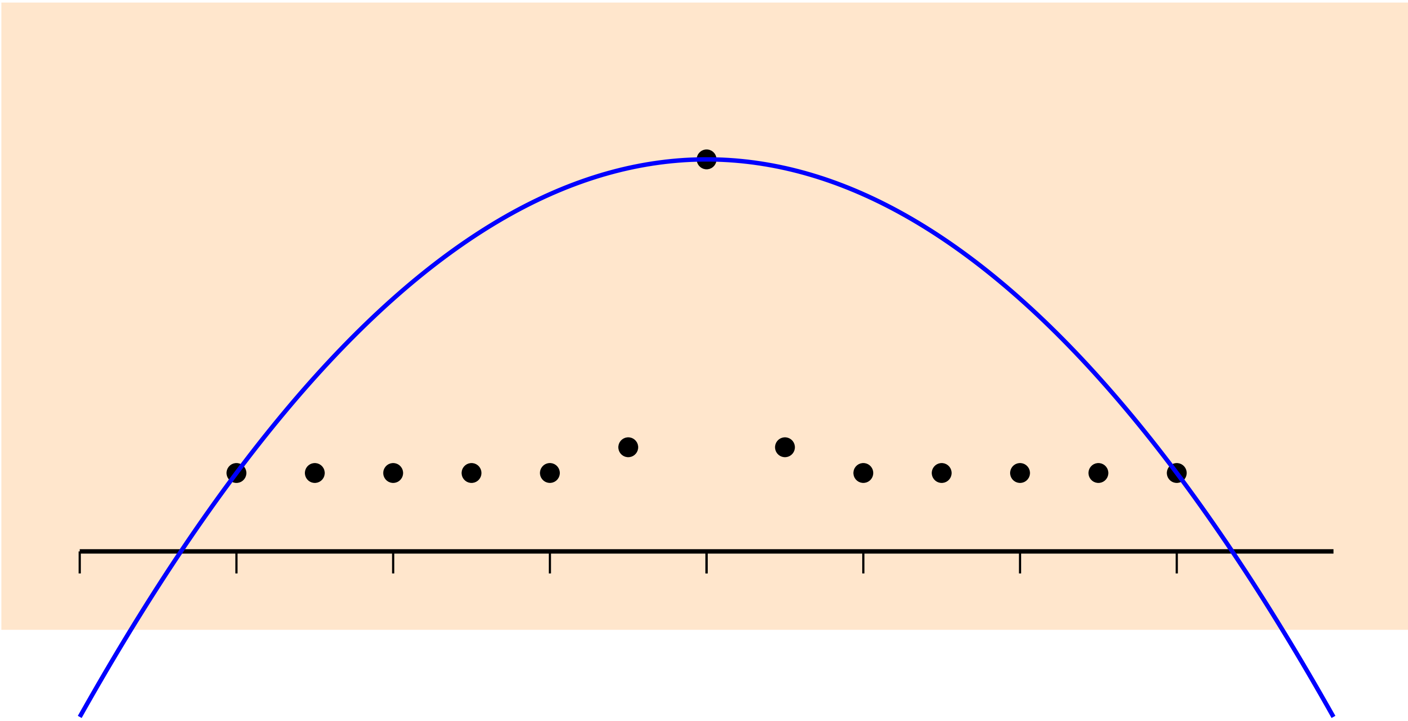
$\Rightarrow$ $g^{(n+1)}$ s'annule une fois en η

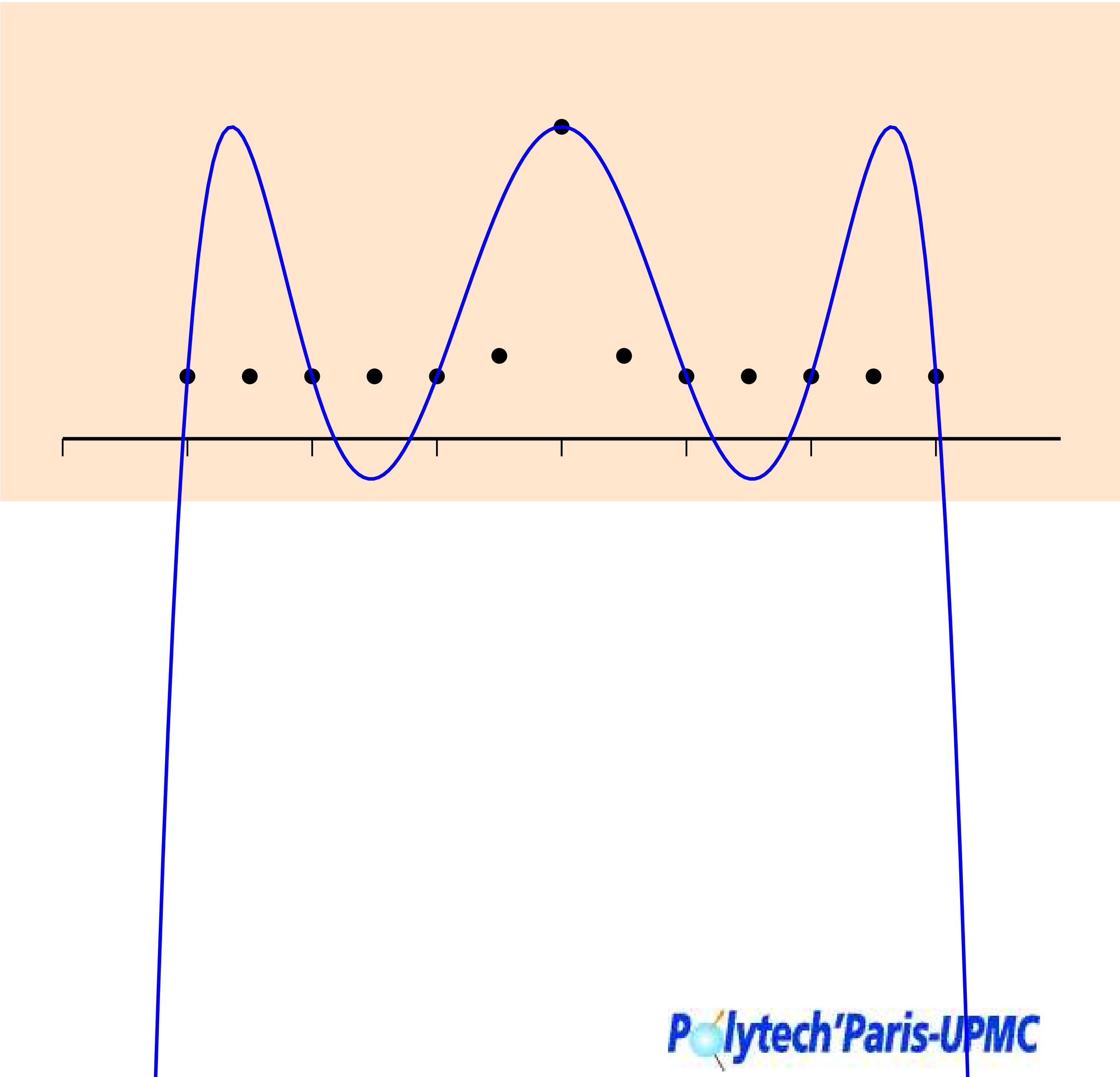
Or $\phi^{(n+1)} = (n+1)!$ et $P^{(n+1)} = 0$.

Exemple

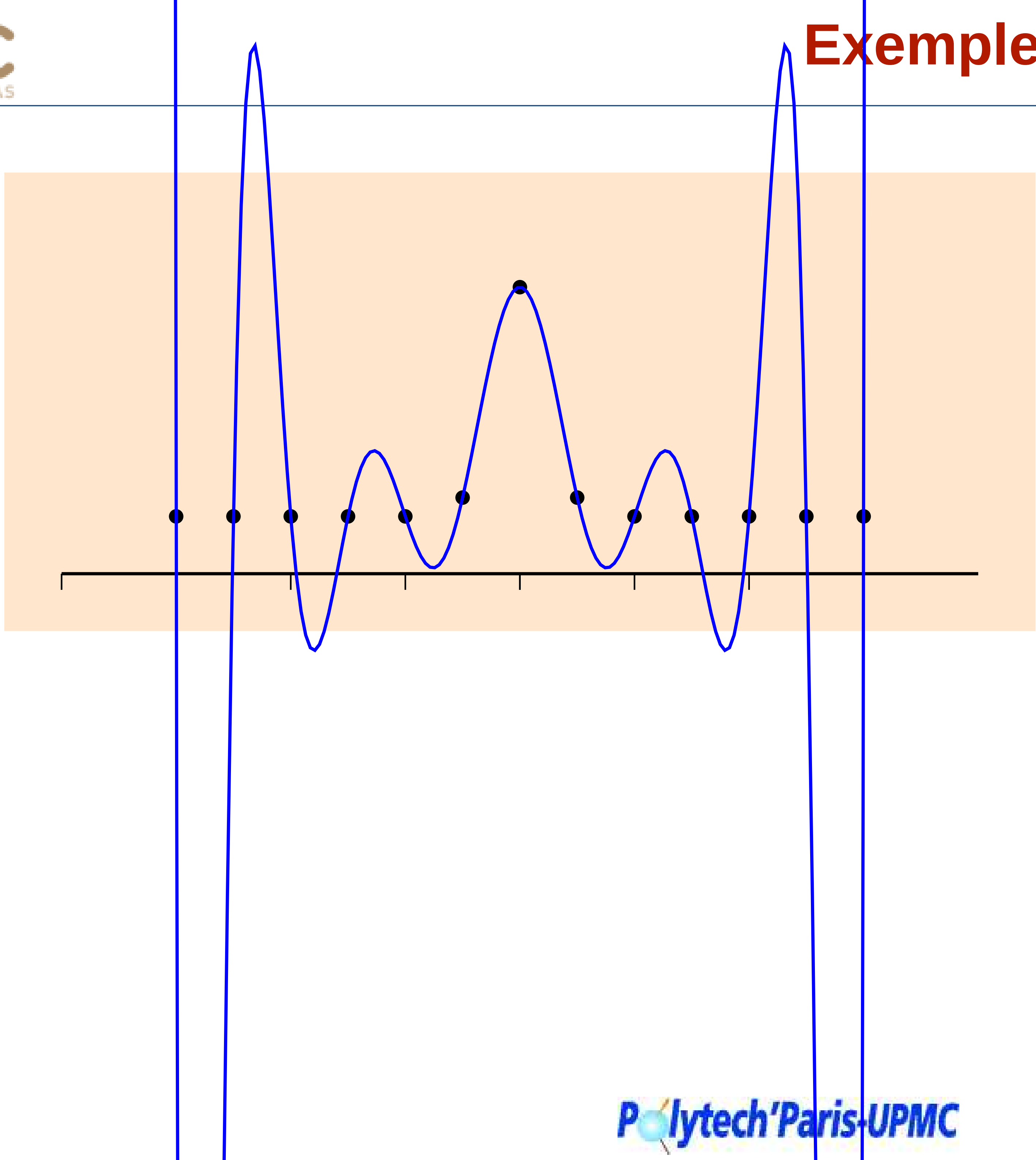


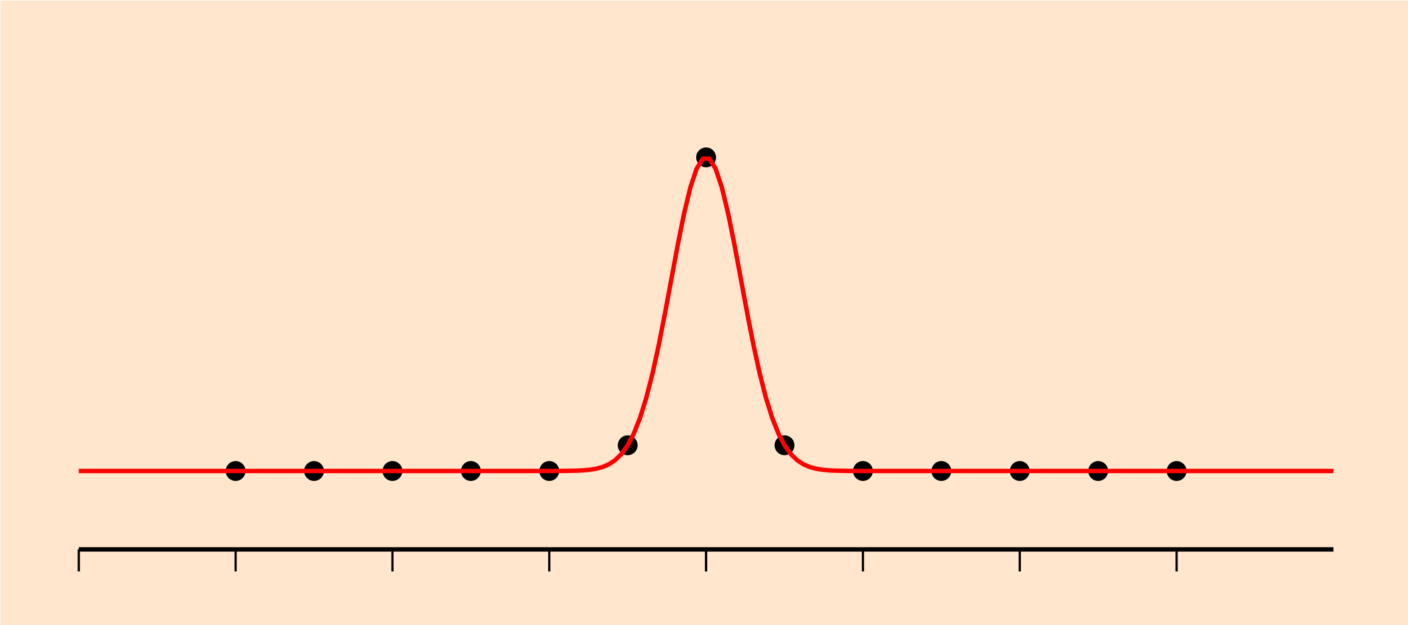
Exemple





Exemple





$$f(x) = 0.5 + 2 \times e^{10x^2}$$

Étude de la formule d'erreur

$$
\begin{aligned}
f(x) - P(x) &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)\phi(x) \\
\text{avec} \qquad \phi(x) &= (x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_n)
\end{aligned}
$$

L'erreur dépend de :

Étude de la formule d'erreur

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)\phi(x)$$

avec
$$\phi(x) = (x - a_0)(x - a_1) \cdots (x - a_n)$$

L'erreur dépend de :

- $\frac{1}{(n+1)!}$ qui tend vers 0 si $n \to \infty$.

Étude de la formule d'erreur

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)\phi(x)$$

avec

$$\phi(x) = (x - a_0)(x - a_1)\cdots(x - a_n)$$

L'erreur dépend de :

- $\frac{1}{(n+1)!}$ qui tend vers 0 si $n \to \infty$.
- $\phi(x)$ qui tend vers ∞ quand $x \to \infty$.

Étude de la formule d'erreur

$$
\begin{aligned}
f(x) - P(x) &= \tfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)\phi(x) \\
\text{avec} \qquad \phi(x) &= (x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_n)
\end{aligned}
$$

L'erreur dépend de :

- $\frac{1}{(n+1)!}$ qui tend vers 0 si $n \to \infty$.
- $\phi(x)$ qui tend vers ∞ quand $x \to \infty$.
  $\Rightarrow$ problèmes quand $x \to \infty$

Étude de la formule d'erreur

$$\begin{aligned} f(x) - P(x) &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)\phi(x) \\ \text{avec} \qquad \phi(x) &= (x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_n) \end{aligned}$$

L'erreur dépend de :

- $\frac{1}{(n+1)!}$ qui tend vers 0 si $n \to \infty$.
- $\phi(x)$ qui tend vers ∞ quand $x \to \infty$.
  $\Rightarrow$ problèmes quand $x \to \infty$
- $f^{(n+1)}(\eta)$ qui dépend de la fonction f et de l'intervalle $[a_0, a_n]$.

Étude de la formule d'erreur

$$
\begin{aligned}
f(x) - P(x) &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)\phi(x) \\
\text{avec} \qquad \phi(x) &= (x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_n)
\end{aligned}
$$

L'erreur dépend de :

- $\frac{1}{(n+1)!}$ qui tend vers 0 si $n \to \infty$.
- $\phi(x)$ qui tend vers ∞ quand $x \to \infty$.
  $\Rightarrow$ problèmes quand $x \to \infty$
- $f^{(n+1)}(\eta)$ qui dépend de la fonction f et de l'intervalle $[a_0, a_n]$.
  $\Rightarrow$ problèmes si un point est très différent des autres ($f^{(n+1)} >> 1$)
  $\Rightarrow$ le polynôme a tendance à osciller entre les points d'interpolations

Étude de la formule d'erreur

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)\phi(x)$$

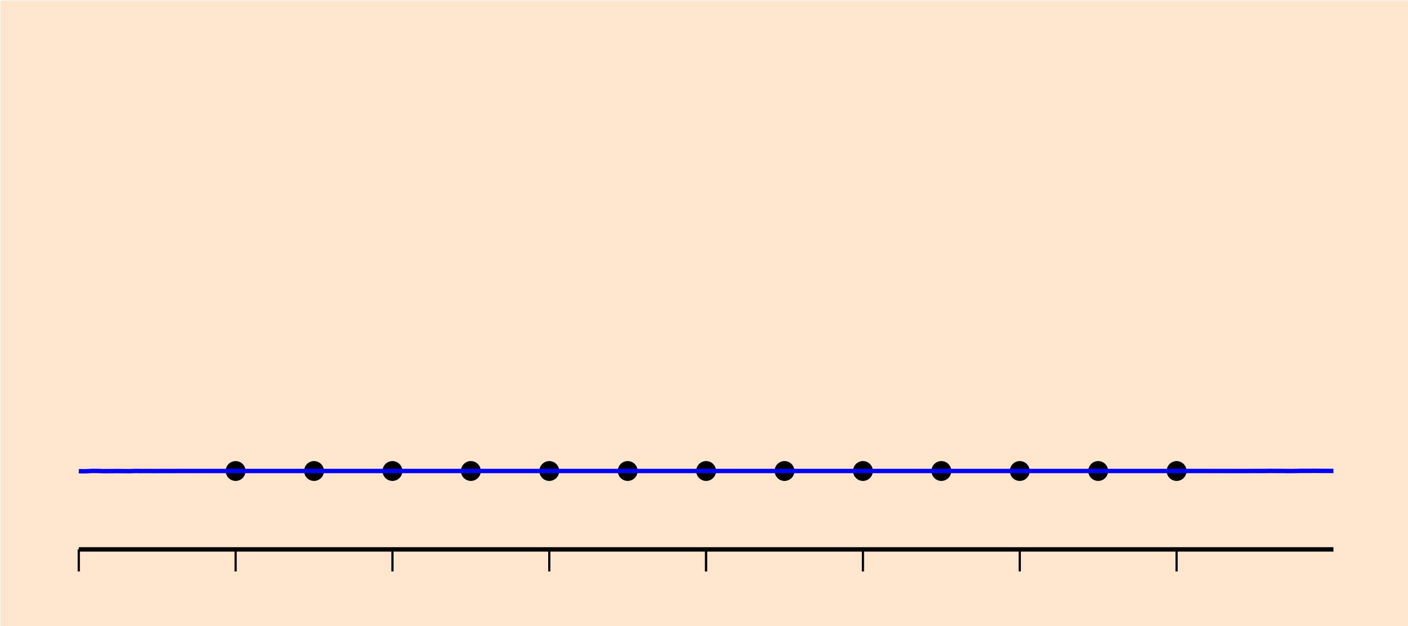
$$\text{avec} \quad \phi(x) = (x - a_0)(x - a_1) \cdots (x - a_n)$$

L'erreur dépend de :

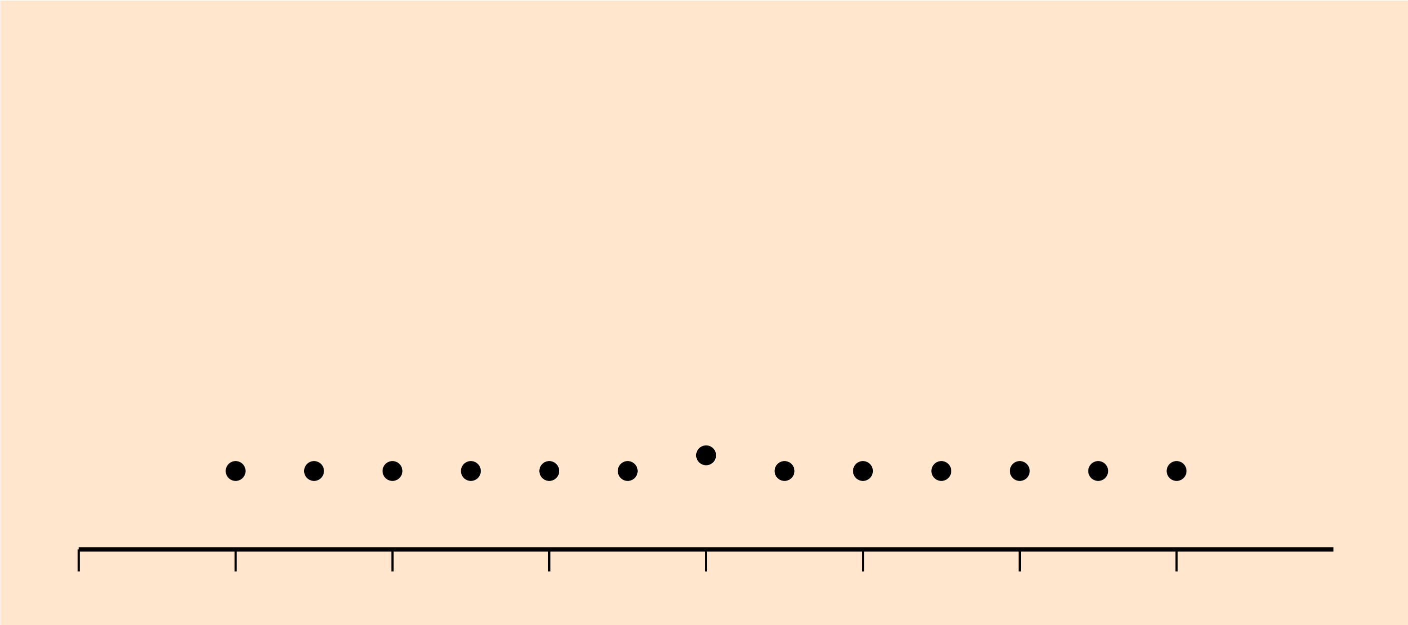
- $\frac{1}{(n+1)!}$ qui tend vers 0 si $n \to \infty$.
- $\phi(x)$ qui tend vers ∞ quand $x \to \infty$.
  $\Rightarrow$ problèmes quand $x \to \infty$
- $f^{(n+1)}(\eta)$ qui dépend de la fonction f et de l'intervalle $[a_0, a_n]$.
  $\Rightarrow$ problèmes si un point est très différent des autres ($f^{(n+1)} >> 1$)
  $\Rightarrow$ le polynôme a tendance à osciller entre les points d'interpolations

Certaines fonctions simples seront mal interpolées par un polynôme.

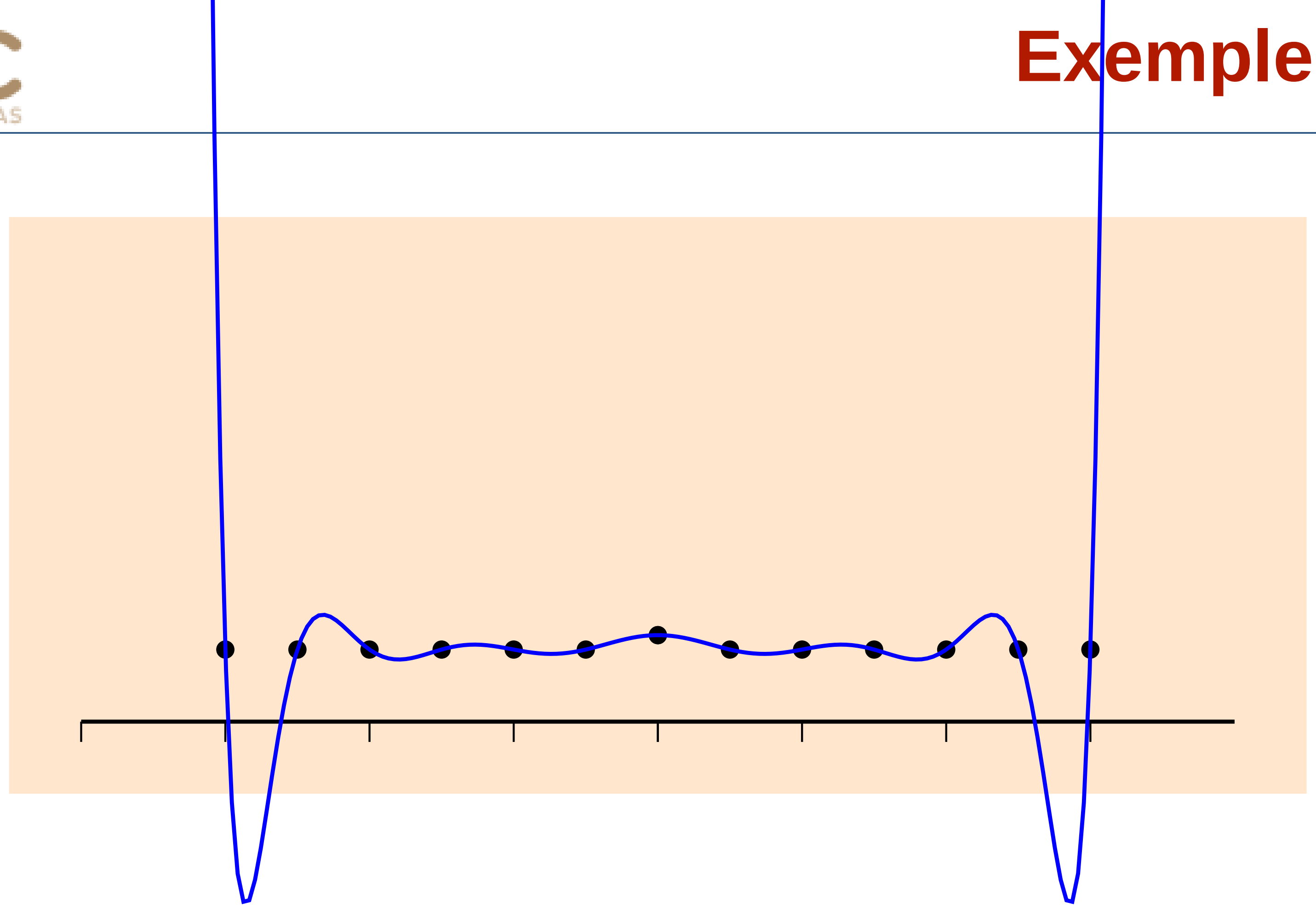
Exemple



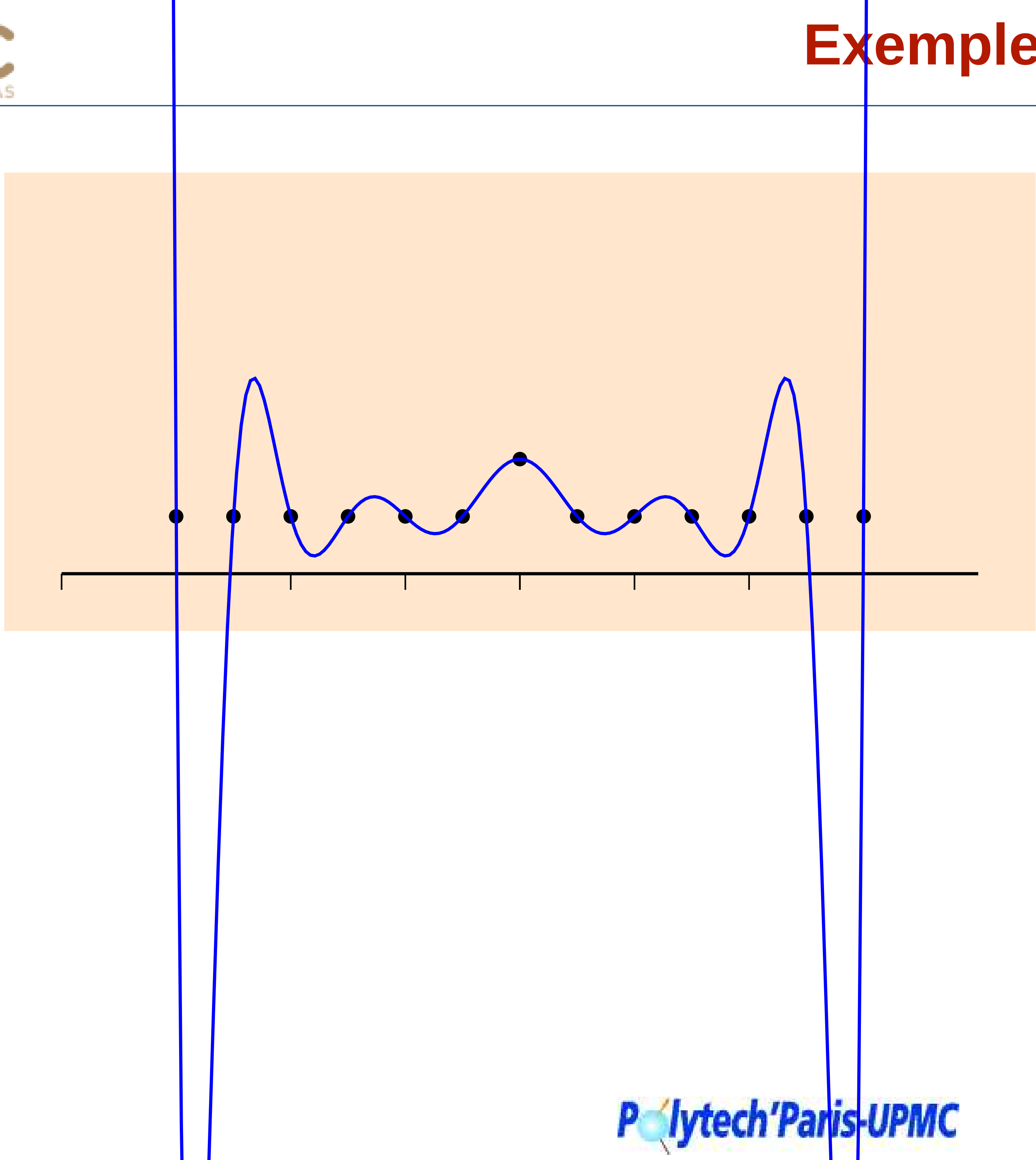
Exemple



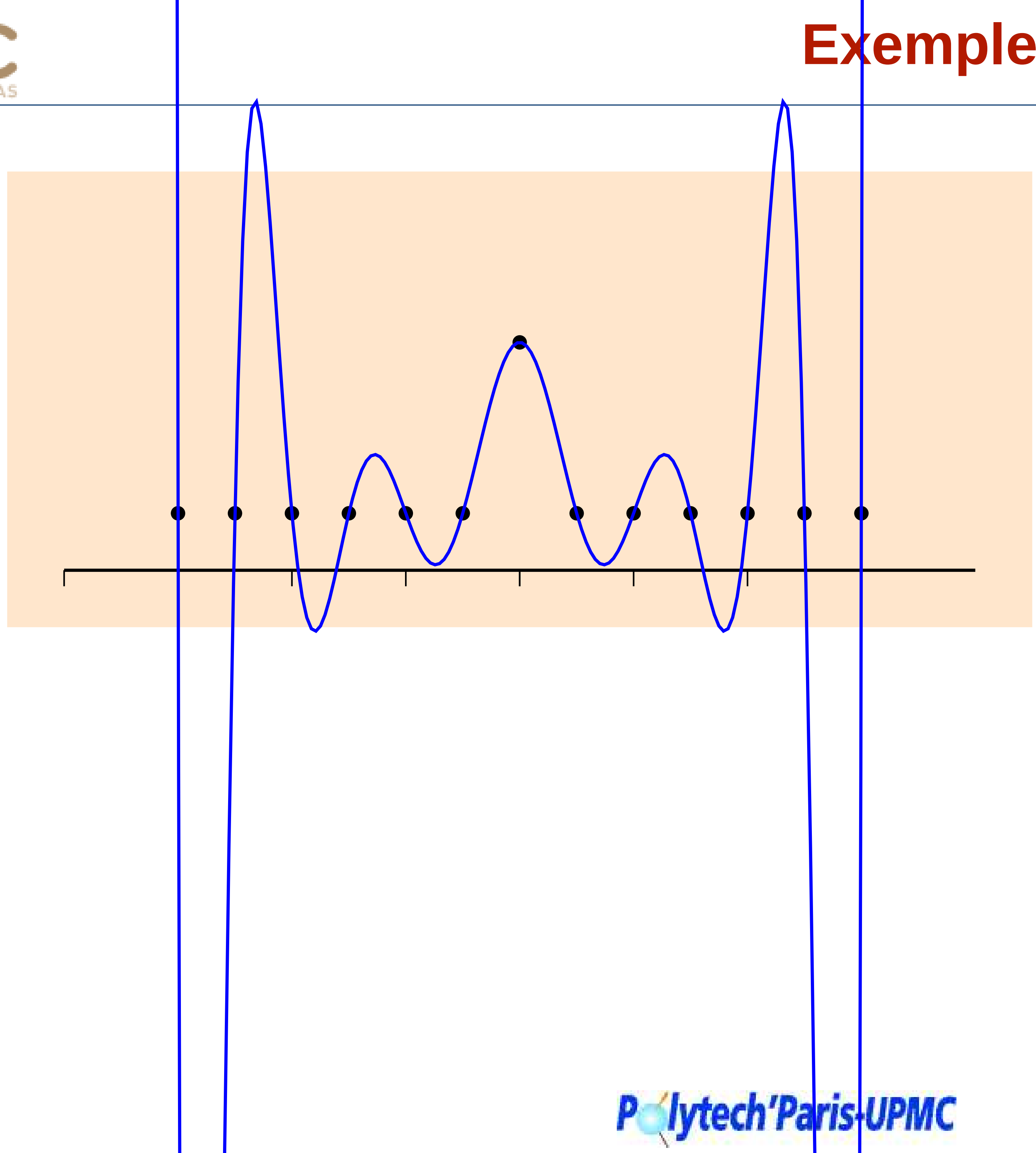
Exemple

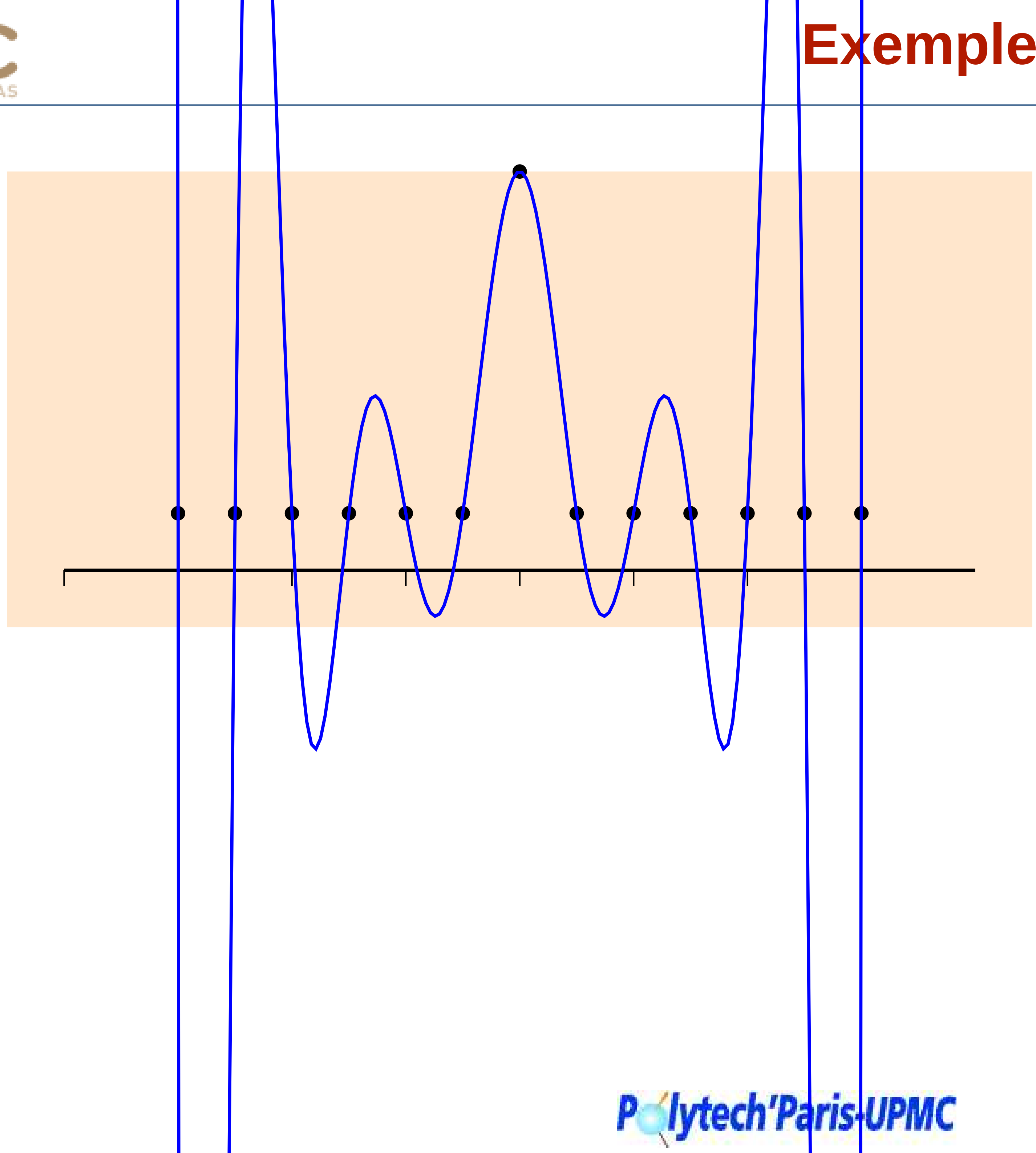


Exemple



Exemple





Comment améliorer l'interpolation ?

Comment améliorer l'interpolation ?

- On découpe l'intervalle en petits morceaux,

Comment améliorer l'interpolation ?

- On découpe l'intervalle en petits morceaux,
- On utilise des polynômes de petit degré pour approcher la fonction sur chaque sous-intervalle.

Par exemple :

Autres méthodes

Comment améliorer l'interpolation ?

- On découpe l'intervalle en petits morceaux,
- On utilise des polynômes de petit degré pour approcher la fonction sur chaque sous-intervalle.

Par exemple :

- Fonctions linéaires par morceaux

Autres méthodes

Comment améliorer l'interpolation ?

- On découpe l'intervalle en petits morceaux,
- On utilise des polynômes de petit degré pour approcher la fonction sur chaque sous-intervalle.

Par exemple :

- Fonctions linéaires par morceaux
- Fonctions quadratiques par morceaux

Comment améliorer l'interpolation ?

- On découpe l'intervalle en petits morceaux,
- On utilise des polynômes de petit degré pour approcher la fonction sur chaque sous-intervalle.

Par exemple :

- Fonctions linéaires par morceaux
- Fonctions quadratiques par morceaux
- Les *splines cubiques* (polynôme de degré 3 par morceau).

Introduction

Intégration numérique

On cherche à approcher l'intégrale d'une fonction :

- Dont on ne connaît la valeur qu'en certains points
  - mesures
- Dont on peut calculer les valeurs, mais dont on ne peut pas calculer la primitive
  - pas de formule analytique
  - trop complexe

Il faut approcher

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt$$

Principe

On dispose de la valeur de f sur des points régulièrement espacés

$$f(y_0), f(y_1), \dots, f(y_m) \quad \text{avec} \quad y_0 = a < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = b$$

$$\text{et} \quad y_{i+1} - y_i = \frac{b-a}{m}$$

Principe

On dispose de la valeur de f sur des points régulièrement espacés

$$f(y_0), f(y_1), \dots, f(y_m) \quad \text{avec} \quad y_0 = a < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = b$$

$$\text{et} \quad y_{i+1} - y_i = \frac{b-a}{m}$$

- On sépare $[a, b]$ en sous-intervalles
  i.e. on regroupe les points y_i par paquets de un, deux ($[y_i, y_{i+1}]$) ou trois ($[y_i, y_{i+1}, y_{i+2}]$) points consécutifs.

Principe

On dispose de la valeur de f sur des points régulièrement espacés

$$f(y_0), f(y_1), \ldots, f(y_m) \quad \text{avec} \quad y_0 = a < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = b$$

$$\text{et} \quad y_{i+1} - y_i = \frac{b-a}{m}$$

- On sépare $[a, b]$ en sous-intervalles
  i.e. on regroupe les points y_i par paquets de un, deux ($[y_i, y_{i+1}]$) ou trois ($[y_i, y_{i+1}, y_{i+2}]$) points consécutifs.
- On interpole la fonction sur chaque sous-intervalle par des polynômes $g_i(t)$.

Principe

On dispose de la valeur de f sur des points régulièrement espacés

$$f(y_0), f(y_1), \ldots, f(y_m) \quad \text{avec} \quad y_0 = a < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = b$$

$$\text{et} \quad y_{i+1} - y_i = \frac{b-a}{m}$$

- On sépare $[a, b]$ en sous-intervalles *i.e.* on regroupe les points y_i par paquets de un, deux ($[y_i, y_{i+1}]$) ou trois ($[y_i, y_{i+1}, y_{i+2}]$) points consécutifs.
- On interpole la fonction sur chaque sous-intervalle par des polynômes $g_i(t)$.
- On calcule l'intégrale du polynôme d'interpolation de chaque sous intervalle, cela s'exprime simplement en fonction des valeurs $f_i = f(y_i)$:

Principe

On dispose de la valeur de f sur des points régulièrement espacés

$$f(y_0), f(y_1), \ldots, f(y_m) \quad \text{avec} \quad y_0 = a < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = b$$

$$\text{et} \quad y_{i+1} - y_i = \frac{b-a}{m}$$

- On sépare $[a, b]$ en sous-intervalles
  i.e. on regroupe les points y_i par paquets de un, deux ($[y_i, y_{i+1}]$) ou trois ($[y_i, y_{i+1}, y_{i+2}]$) points consécutifs.
- On interpole la fonction sur chaque sous-intervalle par des polynômes $g_i(t)$.
- On calcule l'intégrale du polynôme d'interpolation de chaque sous intervalle, cela s'exprime simplement en fonction des valeurs $f_i = f(y_i)$:

$$\int_{y_i}^{y_{i+k}} g_i(t)dt = \sum_{l=0}^{k} \alpha_l f_{i+l}$$

Principe (suite)

- La somme de ces valeurs est une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$. Cette somme s'exprime aussi simplement en fonction des valeurs f_i

$$I(f) \simeq \sum_{i=0}^{m} \beta_i f_i \qquad (1)$$

Principe (suite)

- La somme de ces valeurs est une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$. Cette somme s'exprime aussi simplement en fonction des valeurs f_i

$$I(f) \simeq \sum_{i=0}^{m} \beta_i f_i \tag{1}$$

La différence entre les méthodes vient du nombre de points d'interpolations dans les paquets :

- 1 point
- 2 points
- 3 points
- n points

- La somme de ces valeurs est une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$. Cette somme s'exprime aussi simplement en fonction des valeurs f_i

$$I(f) \simeq \sum_{i=0}^{m} \beta_i f_i \tag{1}$$

La différence entre les méthodes vient du nombre de points d'interpolations dans les paquets :

- 1 point $\Rightarrow$ approximation de degré $0 \Rightarrow$ méthode des rectangles
- 2 points
- 3 points
- n points

Principe (suite)

- La somme de ces valeurs est une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$. Cette somme s'exprime aussi simplement en fonction des valeurs f_i

$$I(f) \simeq \sum_{i=0}^{m} \beta_i f_i \tag{1}$$

La différence entre les méthodes vient du nombre de points d'interpolations dans les paquets :

- 1 point $\Rightarrow$ approximation de degré $0 \Rightarrow$ méthode des rectangles
- 2 points $\Rightarrow$ approximation de degré $1 \Rightarrow$ méthode des trapèzes
- 3 points
- n points

Principe (suite)

- La somme de ces valeurs est une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$. Cette somme s'exprime aussi simplement en fonction des valeurs f_i

$$I(f) \simeq \sum_{i=0}^{m} \beta_i f_i \tag{1}$$

La différence entre les méthodes vient du nombre de points d'interpolations dans les paquets :

- 1 point $\Rightarrow$ approximation de degré 0 $\Rightarrow$ méthode des rectangles
- 2 points $\Rightarrow$ approximation de degré 1 $\Rightarrow$ méthode des trapèzes
- 3 points $\Rightarrow$ approximation de degré 2 $\Rightarrow$ méthode de SIMPSON
- n points

Principe (suite)

- La somme de ces valeurs est une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$. Cette somme s'exprime aussi simplement en fonction des valeurs f_i

$$I(f) \simeq \sum_{i=0}^{m} \beta_i f_i \tag{1}$$

La différence entre les méthodes vient du nombre de points d'interpolations dans les paquets :

- 1 point $\Rightarrow$ approximation de degré 0 $\Rightarrow$ méthode des rectangles
- 2 points $\Rightarrow$ approximation de degré 1 $\Rightarrow$ méthode des trapèzes
- 3 points $\Rightarrow$ approximation de degré 2 $\Rightarrow$ méthode de SIMPSON
- n points $\Rightarrow$ approximation de degré $n-1$ $\Rightarrow$ méthode de NEWTON-CÔTES

Principe (suite)

- La somme de ces valeurs est une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$. Cette somme s'exprime aussi simplement en fonction des valeurs f_i

$$I(f) \simeq \sum_{i=0}^{m} \beta_i f_i \qquad (1)$$

La différence entre les méthodes vient du nombre de points d'interpolations dans les paquets :

- 1 point $\Rightarrow$ approximation de degré 0 $\Rightarrow$ méthode des rectangles
- 2 points $\Rightarrow$ approximation de degré 1 $\Rightarrow$ méthode des trapèzes
- 3 points $\Rightarrow$ approximation de degré 2 $\Rightarrow$ méthode de SIMPSON
- n points $\Rightarrow$ approximation de degré $n-1$ $\Rightarrow$ méthode de NEWTON-CÔTES

Pour chaque méthode, il existe des *constantes* β_i qui permettent d'appliquer la formule (1) et une majoration de l'erreur que l'on va calculer.

Méthodes simples de quadrature

Méthode des rectangles

Les points (y_i) $i = 0, ..., m$ sont pris régulièrement espacés sur $[a, b]$: $y_i = a + i\frac{b-a}{m}$ Sur chaque intervalle $I_i = [y_i, y_{i+1}]$, la fonction f est approchée par la fonction constante g_i tel que $g_i(t) = f(y_i)$.

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} g_i(t)dt = (y_{i+1} - y_i)f(y_i) = \frac{b-a}{m} f(y_i)$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{y_0}^{y_1} f(t)dt + \int_{y_1}^{y_2} f(t)dt + ... + \int_{y_{m-1}}^{y_m} f(t)dt$$

L'approximation de $\int_a^b f(t)dt$ par la méthode des rectangles est donnée par :

Méthode des rectangles

Les points (y_i) $i = 0, ..., m$ sont pris régulièrement espacés sur $[a, b]$: $y_i = a + i\frac{b-a}{m}$ Sur chaque intervalle $I_i = [y_i, y_{i+1}]$, la fonction f est approchée par la fonction constante g_i tel que $g_i(t) = f(y_i)$.

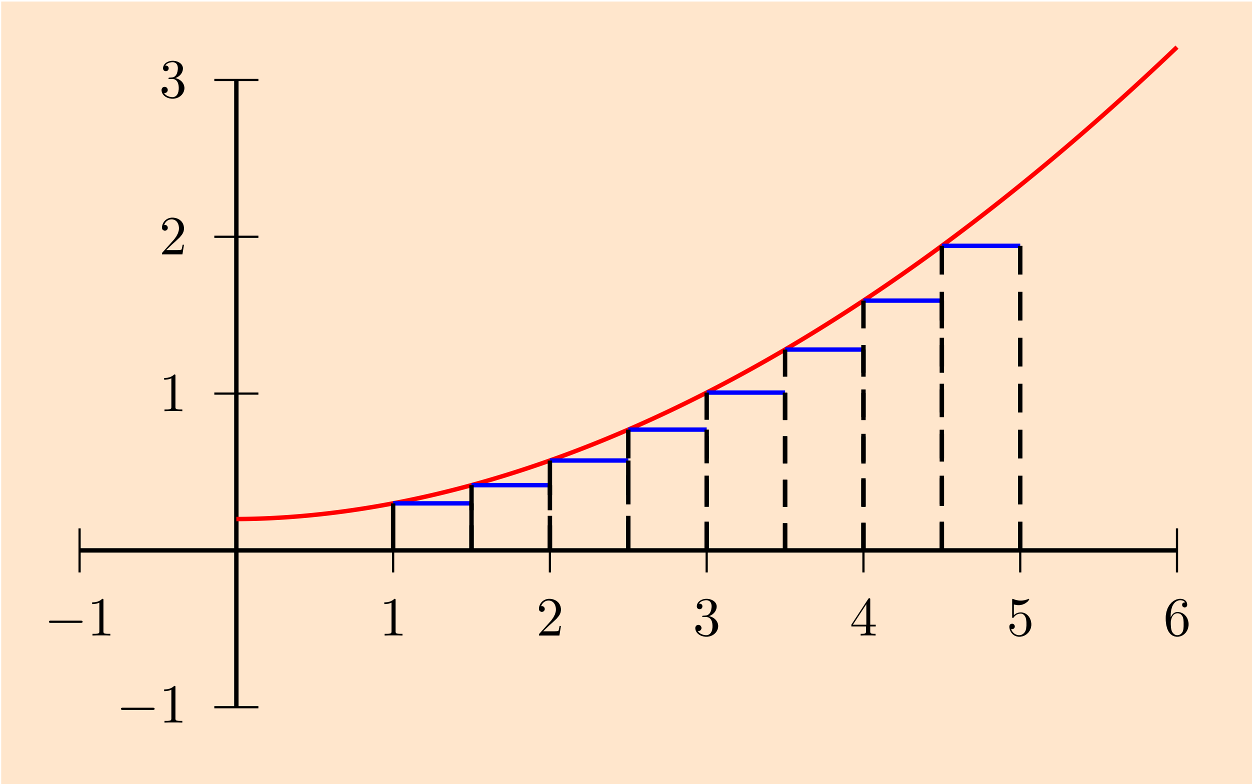
$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} g_i(t)dt = (y_{i+1} - y_i)f(y_i) = \frac{b-a}{m} f(y_i)$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{y_0}^{y_1} f(t)dt + \int_{y_1}^{y_2} f(t)dt + ... + \int_{y_{m-1}}^{y_m} f(t)dt$$

L'approximation de $\int_a^b f(t)dt$ par la méthode des rectangles est donnée par :

$$\boxed{I_R = \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f(y_i)}$$

Exemple



Erreur commise

On applique la formule d'erreur de l'interpolation de LAGRANGE :
$\forall t \in [y_i, y_i + 1]$ il existe $\eta(t) \in [y_i, y_i + 1]$ tel que

Erreur commise

On applique la formule d'erreur de l'interpolation de LAGRANGE :
$\forall t \in [y_i, y_i + 1]$ il existe $\eta(t) \in [y_i, y_i + 1]$ tel que

$$\begin{aligned} f(t) - g_i(t) &= f'(\eta(t))(t - y_i) \\ \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{m} f(y_i) &= \int_{y_i}^{y_{i+1}} f'(\eta(t))(t - y_i)dt \end{aligned}$$

Erreur commise

On applique la formule d'erreur de l'interpolation de LAGRANGE :
$\forall t \in [y_i, y_i + 1]$ il existe $\eta(t) \in [y_i, y_i + 1]$ tel que

$$\begin{aligned} f(t) - g_i(t) &= f'(\eta(t))(t - y_i) \\ \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{m} f(y_i) &= \int_{y_i}^{y_{i+1}} f'(\eta(t))(t - y_i)dt \end{aligned}$$

Soit $M = \sup_{t \in [a,b]} |f'(t)|$

Erreur commise

On applique la formule d'erreur de l'interpolation de LAGRANGE :
$\forall t \in [y_i, y_i + 1]$ il existe $\eta(t) \in [y_i, y_i + 1]$ tel que

$$\begin{aligned} f(t) - g_i(t) &= f'(\eta(t))(t - y_i) \\ \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{m} f(y_i) &= \int_{y_i}^{y_{i+1}} f'(\eta(t))(t - y_i)dt \end{aligned}$$

Soit $M = \sup_{t \in [a,b]} |f'(t)|$

$$\begin{aligned} \left| \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{m} f(y_i) \right| &\leq M \int_{y_i}^{y_{i+1}} (t - y_i)dt \\ &\leq M \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{2} \\ &\leq M \frac{(b-a)^2}{2m^2} \end{aligned}$$

Erreur commise(suite)

Finalement

Finalement

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I_R\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{2m}$$

Remarques :

Erreur commise(suite)

Finalement

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I_R\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{2m}$$

Remarques :

- Pour trouver une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ à ε près, il suffit de prendre m plus grand que $M\frac{(b-a)^2}{2\varepsilon}$

Erreur commise(suite)

Finalement

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I_R\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{2m}$$

Remarques :

- Pour trouver une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ à ε près, il suffit de prendre m plus grand que $M\frac{(b-a)^2}{2\varepsilon}$
- L'approximation est exacte si

Erreur commise(suite)

Finalement

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I_R\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{2m}$$

Remarques :

- Pour trouver une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ à ε près, il suffit de prendre m plus grand que $M\frac{(b-a)^2}{2\varepsilon}$
- L'approximation est exacte si la dérivée f' est nulle c'est-à-dire si la fonction f est constante.

Méthode des trapèzes

Les points (y_i) $i = 0, ..., m$ sont pris régulièrement espacés sur $[a, b]$: $y_i = a + i\frac{b-a}{m}$.
Sur chaque intervalle $I_i = [y_i, y_{i+1}]$, la fonction f est approchée par la fonction affine g_i coïncidant avec f en y_i et y_{i+1} soit :

$$g_i(t) = f(y_i) + \frac{(t - y_i)}{(y_{i+1} - y_i)}(f(y_{i+1}) - f(y_i)).$$

Remarque : g_i est la fonction affine par morceaux reliant les points de coordonnées $(y_i, f(y_i))$.

Calcul de la formule

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} g_i(t)dt$$
$$= \int_{y_i}^{y_{i+1}} [\frac{t}{y_{i+1}-y_i}(f(y_{i+1}) - f(y_i)) - \frac{y_i}{y_{i+1}-y_i}(f(y_{i+1}) - f(y_i)) + f(y_i)]dt$$
$$= \frac{{y_{i+1}}^2 - {y_i}^2}{2(y_{i+1}-y_i)}(f(y_{i+1}) - f(y_i)) - y_i(f(y_{i+1}) - f(y_i)) + (y_{i+1} - y_i)f(y_i)$$
$$= \frac{y_{i+1}+y_i}{2}(f(y_{i+1}) - f(y_i)) - y_i f(y_{i+1}) + y_{i+1} f(y_i)$$
$$= \frac{y_{i+1}-y_i}{2}(f(y_{i+1}) + f(y_i))$$
$$= \frac{b-a}{2m}(f(y_{i+1}) + f(y_i))$$

Or $\int_a^b f(t)dt = \int_{y_0}^{y_1} f(t)dt + \int_{y_1}^{y_2} f(t)dt + \ldots + \int_{y_{m-1}}^{y_m} f(t)dt$

Donc l'approximation de $\int_a^b f(t)dt$ par la méthode des trapèzes est donnée par :

Calcul de la formule

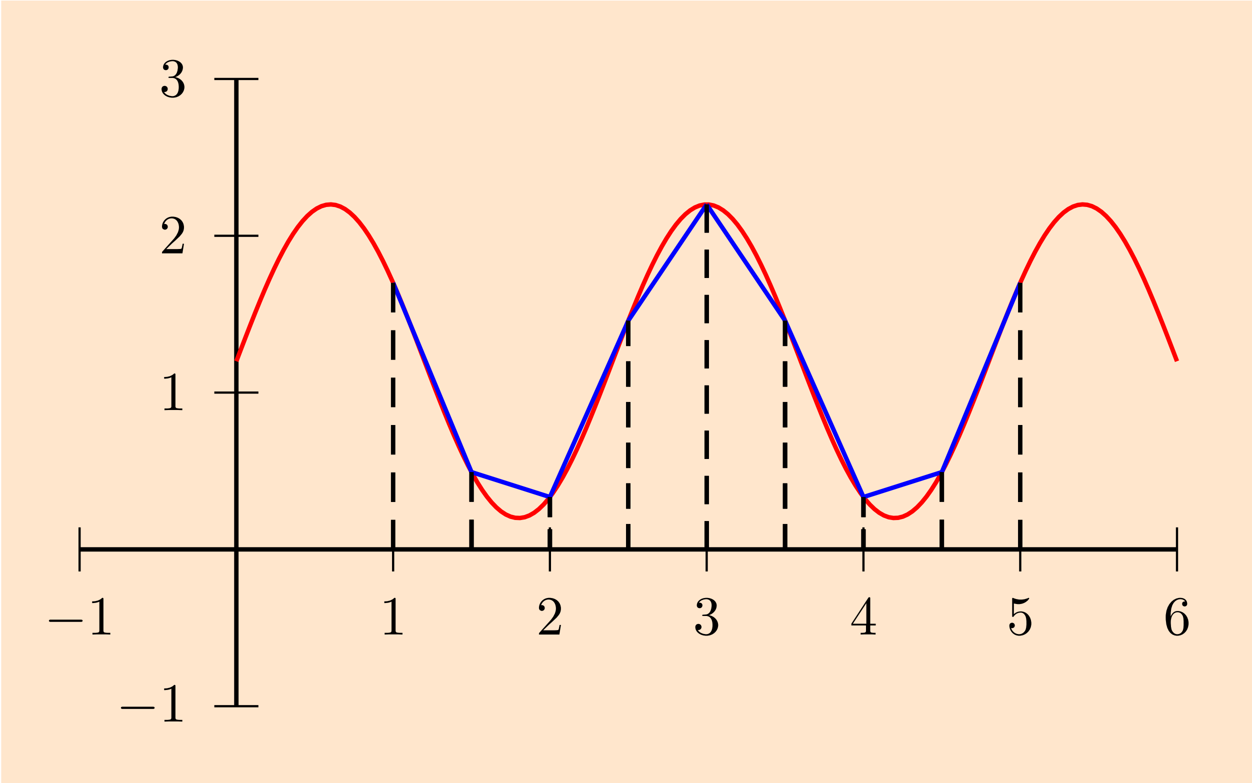
$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} g_i(t)dt$$
$$= \int_{y_i}^{y_{i+1}} [\frac{t}{y_{i+1}-y_i}(f(y_{i+1})-f(y_i)) - \frac{y_i}{y_{i+1}-y_i}(f(y_{i+1})-f(y_i)) + f(y_i)]dt$$
$$= \frac{{y_{i+1}}^2-{y_i}^2}{2(y_{i+1}-y_i)}(f(y_{i+1})-f(y_i)) - y_i(f(y_{i+1})-f(y_i)) + (y_{i+1}-y_i)f(y_i)$$
$$= \frac{y_{i+1}+y_i}{2}(f(y_{i+1})-f(y_i)) - y_i f(y_{i+1}) + y_{i+1}f(y_i)$$
$$= \frac{y_{i+1}-y_i}{2}(f(y_{i+1})+f(y_i))$$
$$= \frac{b-a}{2m}(f(y_{i+1})+f(y_i))$$

Or $\int_a^b f(t)dt = \int_{y_0}^{y_1} f(t)dt + \int_{y_1}^{y_2} f(t)dt + \ldots + \int_{y_{m-1}}^{y_m} f(t)dt$

Donc l'approximation de $\int_a^b f(t)dt$ par la méthode des trapèzes est donnée par :

$$I_T = \frac{b-a}{2m}(f(y_0)+2f(y_1)+\ldots.+2f(y_{m-1})+f(y_m))$$

Exemple



Erreur commise

On applique la formule d'erreur de l'interpolation de LAGRANGE :
$\forall t \in [y_i, y_i + 1]$ il existe $\eta(t) \in [y_i, y_i + 1]$ tel que

Erreur commise

On applique la formule d'erreur de l'interpolation de LAGRANGE :
$\forall t \in [y_i, y_i + 1]$ il existe $\eta(t) \in [y_i, y_i + 1]$ tel que

$$\begin{aligned} f(t) - g_i(t) &= \frac{1}{2} f''(\eta(t))(t - y_i)(t - y_{i+1}) \\ \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{2m}(f(y_{i+1}) + f(y_i)) &= \frac{1}{2} \int_{y_i}^{y_{i+1}} f''(\eta(t))(t - y_i)(t - y_{i+1})dt \end{aligned}$$

d'où si $M = \sup_{t \in [a,b]} |f''(t)|$

$$\left| \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{2m}(f(y_{i+1}) + f(y_i)) \right| \leq M \int_{y_i}^{y_{i+1}} (t - y_i)(y_{i+1} - t)dt$$

Erreur commise (suite)

Pour le calcul de $\int_{y_i}^{y_{i+1}} (t - y_i)(y_{i+1} - t)dt$, on effectue un changement de variable.
Soit $x = t - y_i$ ($t = x + y_i$)

$$\begin{aligned}
\int_{y_i}^{y_{i+1}} (t - y_i)(y_{i+1} - t)dt &= \int_0^{y_{i+1}-y_i} x(y_{i+1} - y_i - x)dx \\
&= \int_0^{y_{i+1}-y_i} -x^2 + x(y_{i+1} - y_i)dx \\
&= -\frac{(y_{i+1}-y_i)^3}{3} + \frac{(y_{i+1}-y_i)^2}{2}(y_{i+1} - y_i) \\
&= \frac{(y_{i+1}-y_i)^3}{6}
\end{aligned}$$

Donc $\left| \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{2m}(f(y_{i+1}) + f(y_i)) \right| \leq M \frac{(y_{i+1}-y_i)^3}{12}$

Erreur commise (suite)

Pour le calcul de $\int_{y_i}^{y_{i+1}}(t-y_i)(y_{i+1}-t)dt$, on effectue un changement de variable.
Soit $x = t - y_i$ $(t = x + y_i)$

$$\begin{aligned}\int_{y_i}^{y_{i+1}}(t-y_i)(y_{i+1}-t)dt &= \int_0^{y_{i+1}-y_i} x(y_{i+1}-y_i-x)dx \\ &= \int_0^{y_{i+1}-y_i} -x^2 + x(y_{i+1}-y_i)dx \\ &= -\frac{(y_{i+1}-y_i)^3}{3} + \frac{(y_{i+1}-y_i)^2}{2}(y_{i+1}-y_i) \\ &= \frac{(y_{i+1}-y_i)^3}{6}\end{aligned}$$

Donc $\left|\int_{y_i}^{y_{i+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{2m}(f(y_{i+1})+f(y_i))\right| \leq M\frac{(y_{i+1}-y_i)^3}{12}$

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I_T\right| \leq M\frac{(b-a)^3}{12m^2}$$

Erreur commise (fin)

Finalement

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I_T\right| \leq M\frac{(b-a)^3}{12m^2}$$

Remarques :

- Pour trouver une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ à ε près, il suffit de prendre m plus grand que $\sqrt{M\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon}}$

Erreur commise (fin)

Finalement

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I_T\right| \leq M\frac{(b-a)^3}{12m^2}$$

Remarques :

- Pour trouver une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ à ε près, il suffit de prendre m plus grand que $\sqrt{M\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon}}$
- L'approximation est exacte si

Erreur commise (fin)

Finalement

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I_T\right| \leq M\frac{(b-a)^3}{12m^2}$$

Remarques :

- Pour trouver une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ à ε près, il suffit de prendre m plus grand que $\sqrt{M\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon}}$
- L'approximation est exacte si la dérivée seconde f'' est nulle c'est-à-dire si la fonction f est affine.

Méthode de SIMPSON

On considère les $2n+1$ points $z_i = a + i\frac{b-a}{2n} \quad (i = 0, ..., 2n)$

On considère les $2n+1$ points $z_i = a + i\frac{b-a}{2n} \quad (i = 0, ..., 2n)$
Sur chaque intervalle $I_i = [z_{2i}, z_{2i+2}]$, la fonction f est approchée par la parabole g_i passant par les points

$$(z_{2i}, f(z_{2i})) \quad (z_{2i+1}, f(z_{2i+1})) \quad (z_{2i+2}, f(z_{2i+2}))$$

Donc

$$\begin{aligned} g_i(t) = f(z_{2i}).&\frac{(t-z_{2i+1})(t-z_{2i+2})}{(z_{2i}-z_{2i+1})(z_{2i}-z_{2i+2})} \\ +f(z_{2i+1}).&\frac{(t-z_{2i})(t-z_{2i+2})}{(z_{2i+1}-z_{2i})(z_{2i+1}-z_{2i+2})} \\ +f(z_{2i+2}).&\frac{(t-z_{2i})(t-z_{2i+1})}{(z_{2i+2}-z_{2i})(z_{2i+2}-z_{2i+1})} \end{aligned}$$

Méthode de SIMPSON (suite)

Ce qui donne, tout calcul fait :

$$\int_{z_{2i}}^{z_{2i+2}} g_i(t)dt = \frac{b-a}{6n}(f(z_{2i}) + 4f(z_{2i+1}) + f(z_{2i+2}))$$

L'approximation de l'intégrale par la méthode de SIMPSON est donc I_S avec

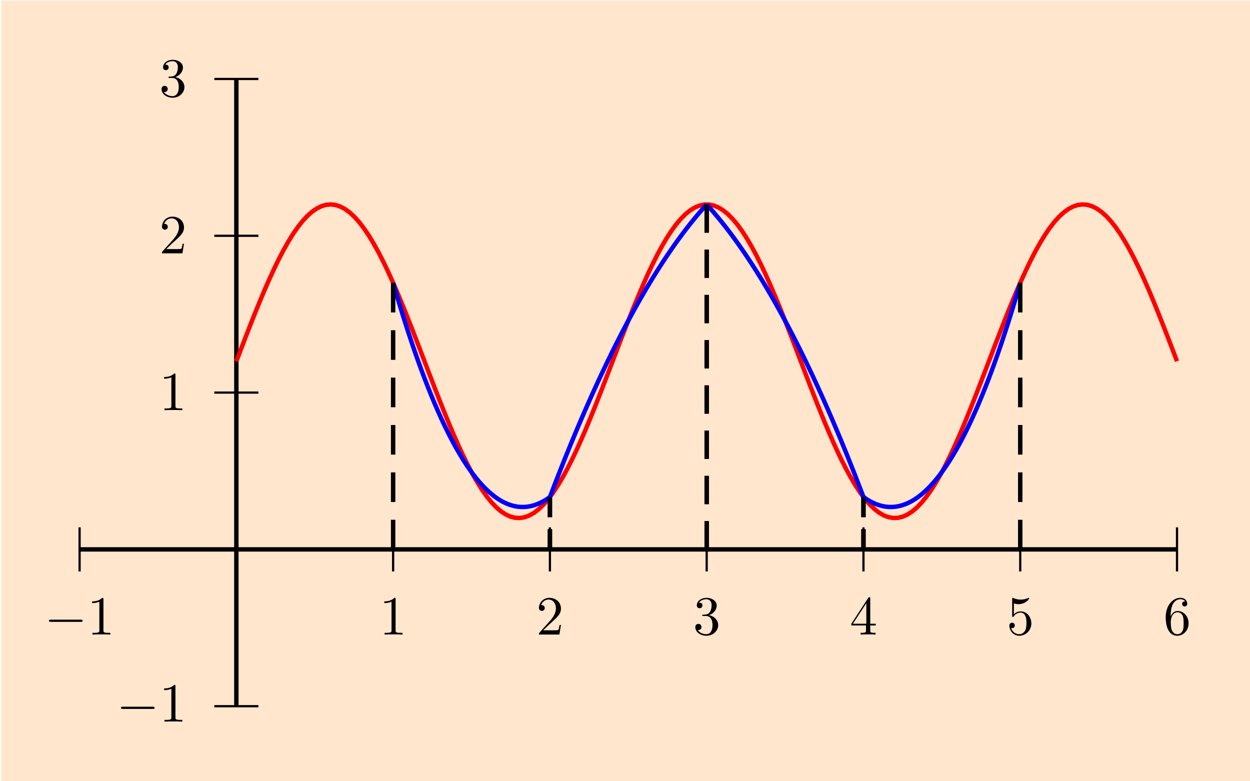
Ce qui donne, tout calcul fait :

$$\int_{z_{2i}}^{z_{2i+2}} g_i(t)dt = \frac{b-a}{6n}(f(z_{2i}) + 4f(z_{2i+1}) + f(z_{2i+2}))$$

L'approximation de l'intégrale par la méthode de SIMPSON est donc I_S avec

$$\boxed{\begin{aligned} I_S \quad = \quad & \frac{b-a}{6n}\Big(f(z_0) + 4f(z_1) + 2f(z_2) + 4f(z_3) + 2f(z_4) + \\ & \cdots + 2f(z_{2n-2}) + 4f(z_{2n-1}) + f(z_{2n})\Big) \end{aligned}}$$

Exemple



Soit $M = \max_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)|$

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I_S\right| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880n^4}$$

Remarques :

- Pour trouver une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ à ε près, il suffit de prendre m plus grand que $\sqrt[4]{M\frac{(b-a)^5}{2880\varepsilon}}$
- L'approximation est exacte si

.

Erreur commise

Soit $M = \max_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)|$

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I_S\right| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880n^4}$$

Remarques :

- Pour trouver une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ à ε près, il suffit de prendre m plus grand que $\sqrt[4]{M\frac{(b-a)^5}{2880\varepsilon}}$
- L'approximation est exacte si la dérivée $f^{(4)}$ est nulle c'est-à-dire si la fonction f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Erreur commise

Soit $M = \max_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)|$

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I_S\right| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880n^4}$$

Remarques :

- Pour trouver une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ à ε près, il suffit de prendre m plus grand que $\sqrt[4]{M\frac{(b-a)^5}{2880\varepsilon}}$
- L'approximation est exacte si la dérivée $f^{(4)}$ est nulle c'est-à-dire si la fonction f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

! *L'erreur est d'ordre* 4 *alors que le polynôme est de degré* 2

Explication

On pourrait s'attendre à ce que l'erreur de ma méthode de SIMPSON soit de la forme

$$M = \max_{t\in[a,b]} |f^{(3)}(t)| \qquad \text{et} \qquad \frac{M(b-a)^4}{Kn^3}$$

or on gagne un facteur $\frac{(b-a)}{n}$.

Explication

On pourrait s'attendre à ce que l'erreur de ma méthode de SIMPSON soit de la forme

$$M = \max_{t \in [a,b]} |f^{(3)}(t)| \qquad \text{et} \qquad \frac{M(b-a)^4}{Kn^3}$$

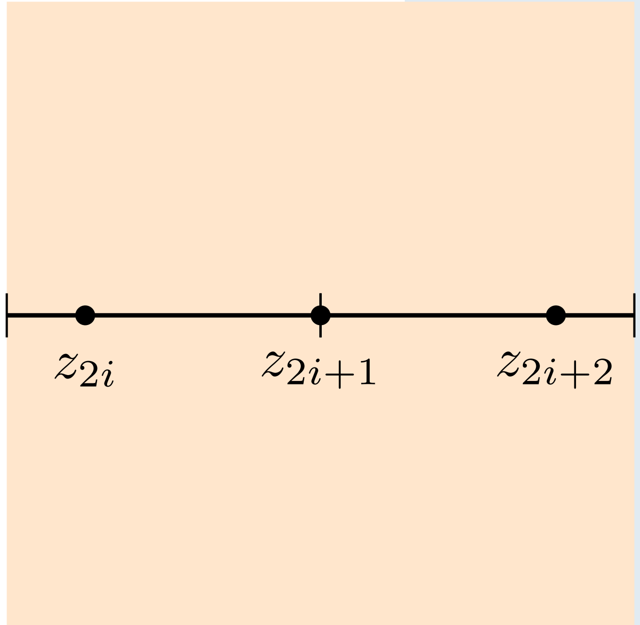
or on gagne un facteur $\frac{(b-a)}{n}$.

Pourquoi ?

On pourrait s'attendre à ce que l'erreur de ma méthode de SIMPSON soit de la forme

$$M = \max_{t \in [a,b]} |f^{(3)}(t)| \qquad \text{et} \qquad \frac{M(b-a)^4}{Kn^3}$$

or on gagne un facteur $\frac{(b-a)}{n}$.

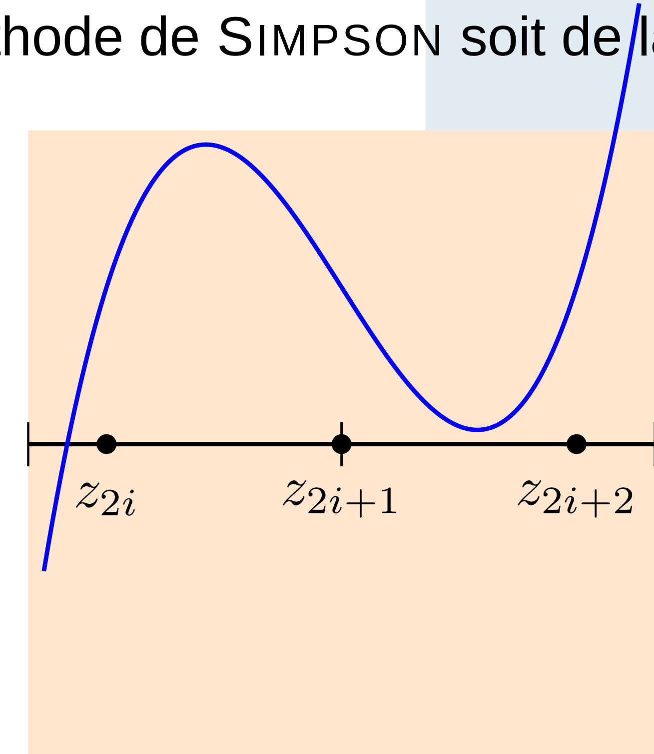


Prenons le cas ou f est un polynôme de degré 3.

On pourrait s'attendre à ce que l'erreur de ma méthode de SIMPSON soit de la forme

$$M = \max_{t\in[a,b]} |f^{(3)}(t)| \qquad \text{et} \qquad \frac{M(b-a)^4}{Kn^3}$$

or on gagne un facteur $\frac{(b-a)}{n}$.



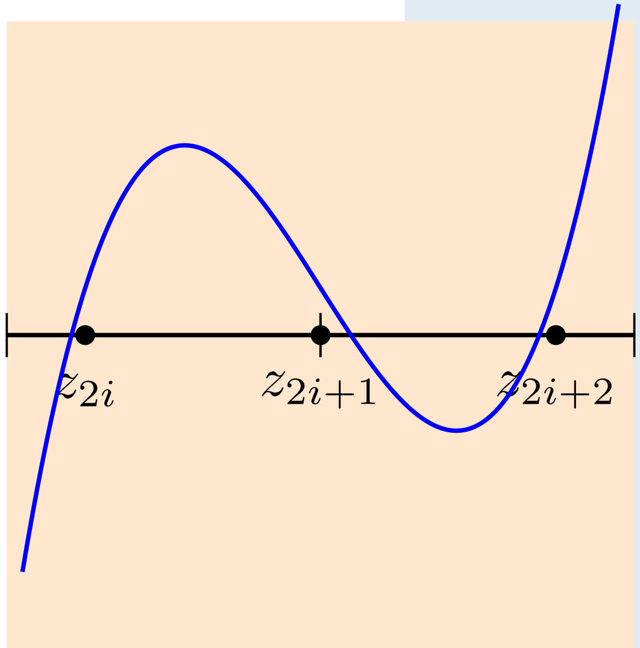
Prenons le cas ou f est un polynôme de degré 3.

- $f(t) - g_i(t)$ est donc un polynôme de degré 3,

On pourrait s'attendre à ce que l'erreur de ma méthode de SIMPSON soit de la forme

$$M = \max_{t\in[a,b]} |f^{(3)}(t)| \qquad \text{et} \qquad \frac{M(b-a)^4}{Kn^3}$$

or on gagne un facteur $\frac{(b-a)}{n}$.



Prenons le cas ou f est un polynôme de degré 3.

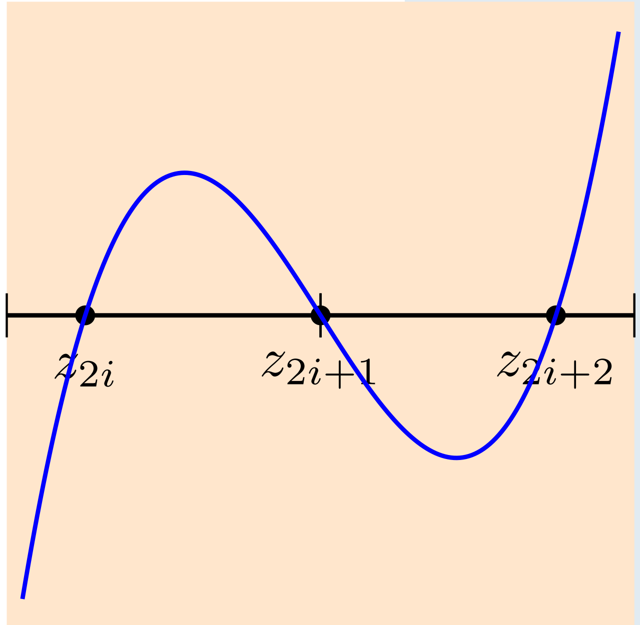
- $f(t) - g_i(t)$ est donc un polynôme de degré 3,
- il s'annule 3 fois en z_{2i}, z_{2i+1} et z_{2i+2},

Explication

On pourrait s'attendre à ce que l'erreur de ma méthode de SIMPSON soit de la forme

$$M = \max_{t\in[a,b]} |f^{(3)}(t)| \qquad \text{et} \qquad \frac{M(b-a)^4}{Kn^3}$$

or on gagne un facteur $\frac{(b-a)}{n}$.



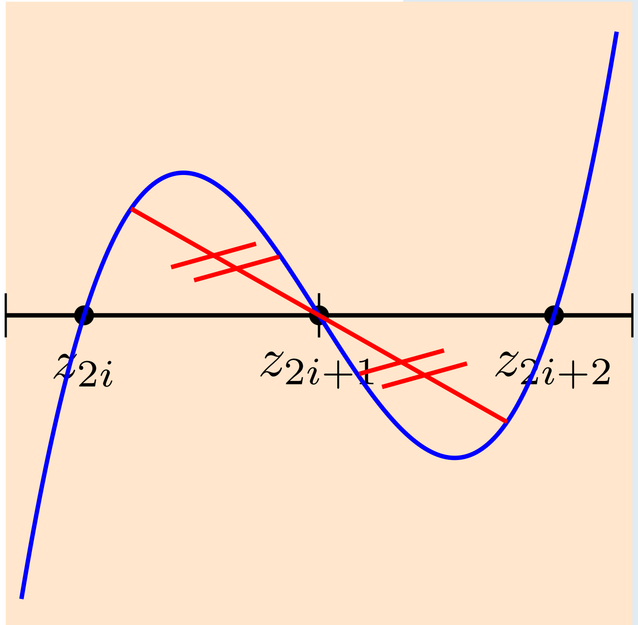
Prenons le cas ou f est un polynôme de degré 3.

- $f(t) - g_i(t)$ est donc un polynôme de degré 3,
- il s'annule 3 fois en z_{2i}, z_{2i+1} et z_{2i+2},
- donc $f(t) - g_i(t) = \alpha(t - z_{2i})(t - z_{2i+1})(t - z_{2i+2})$,

On pourrait s'attendre à ce que l'erreur de ma méthode de SIMPSON soit de la forme

$$M = \max_{t\in[a,b]} |f^{(3)}(t)| \qquad \text{et} \qquad \frac{M(b-a)^4}{Kn^3}$$

or on gagne un facteur $\frac{(b-a)}{n}$.



Prenons le cas ou f est un polynôme de degré 3.

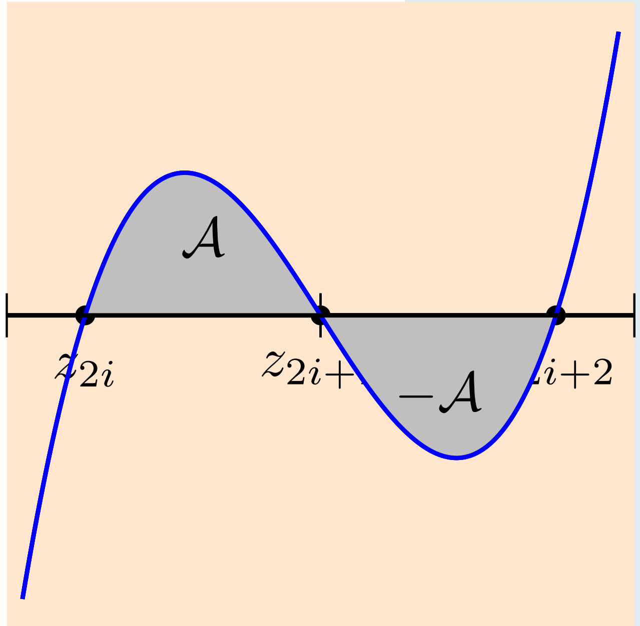
- $f(t) - g_i(t)$ est donc un polynôme de degré 3,
- il s'annule 3 fois en z_{2i}, z_{2i+1} et z_{2i+2},
- donc $f(t) - g_i(t) = \alpha(t - z_{2i})(t - z_{2i+1})(t - z_{2i+2})$,
- il est symétrique par rapport au milieu du segment $[z_{2i}, z_{2i+2}]$,

Explication

On pourrait s'attendre à ce que l'erreur de ma méthode de SIMPSON soit de la forme

$$M = \max_{t \in [a,b]} |f^{(3)}(t)| \qquad \text{et} \qquad \frac{M(b-a)^4}{Kn^3}$$

or on gagne un facteur $\frac{(b-a)}{n}$.



Prenons le cas ou f est un polynôme de degré 3.

- $f(t) - g_i(t)$ est donc un polynôme de degré 3,
- il s'annule 3 fois en z_{2i}, z_{2i+1} et z_{2i+2},
- donc $f(t) - g_i(t) = \alpha(t - z_{2i})(t - z_{2i+1})(t - z_{2i+2})$,
- il est symétrique par rapport au milieu du segment $[z_{2i}, z_{2i+2}]$,
- donc $\int_{z_{2i}}^{z_{2i+2}} f(t) - g_i(t) = 0$

Cela peut se généraliser aux méthodes de NEWTON-COTES

Intégration de Gauss

- Jusqu'à présent le problème a toujours été posé de la façon suivante :
  - On dispose de la valeur de f sur $n+1$ points : $y_0, y_1, \ldots, y_n$ et on cherche a approcher l'intégrale de f par la formule :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) + E \tag{2}$$

ou E est l'erreur de la méthode

- Jusqu'à présent le problème a toujours été posé de la façon suivante :
  - On dispose de la valeur de f sur $n+1$ points : $y_0, y_1, \ldots, y_n$ et on cherche a approcher l'intégrale de f par la formule :

$$\int_a^b f(t)dt \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) + E \tag{2}$$

  ou E est l'erreur de la méthode
- On cherche à minimiser l'erreur E.

Introduction

- Jusqu'à présent le problème a toujours été posé de la façon suivante :
  - On dispose de la valeur de f sur $n+1$ points : $y_0, y_1, \ldots, y_n$ et on cherche a approcher l'intégrale de f par la formule :

$$\int_a^b f(t)dt \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) + E \tag{2}$$

  ou E est l'erreur de la méthode

- On cherche à minimiser l'erreur E.
  - Chaque méthode correspond à un choix de valeurs α_i.

- Jusqu'à présent le problème a toujours été posé de la façon suivante :
  - On dispose de la valeur de f sur $n+1$ points : $y_0, y_1, \dots, y_n$ et on cherche a approcher l'intégrale de f par la formule :

$$\int_a^b f(t)dt \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) + E \tag{2}$$

    ou E est l'erreur de la méthode
- On cherche à minimiser l'erreur E.
  - Chaque méthode correspond à un choix de valeurs α_i.
  - Au mieux on arrive à obtenir une méthode d'ordre $n+1$ c'est à dire dont le terme d'erreur dépend de $\max_{a \leq t \leq b} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$ cela signifie qu'elle est exacte si f est un polynôme de degré $<$ à $n+1$.

Introduction

- Jusqu'à présent le problème a toujours été posé de la façon suivante :
  - On dispose de la valeur de f sur $n+1$ points : $y_0, y_1, \dots, y_n$ et on cherche a approcher l'intégrale de f par la formule :

$$\int_a^b f(t)dt \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) + E \qquad (2)$$

ou E est l'erreur de la méthode

- On cherche à minimiser l'erreur E.
  - Chaque méthode correspond à un choix de valeurs α_i.
  - Au mieux on arrive à obtenir une méthode d'ordre $n+1$ c'est à dire dont le terme d'erreur dépend de $\max_{a \le t \le b} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$ cela signifie qu'elle est exacte si f est un polynôme de degré $<$ à $n+1$.
- Si on est capable de calculer f en n'importe quel point,

Introduction

- Jusqu'à présent le problème a toujours été posé de la façon suivante :
  - On dispose de la valeur de f sur $n+1$ points : $y_0, y_1, \ldots, y_n$ et on cherche a approcher l'intégrale de f par la formule :

$$\int_a^b f(t)dt \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) + E \tag{2}$$

  ou E est l'erreur de la méthode
- On cherche à minimiser l'erreur E.
  - Chaque méthode correspond à un choix de valeurs α_i.
  - Au mieux on arrive à obtenir une méthode d'ordre $n+1$ c'est à dire dont le terme d'erreur dépend de $\max_{a \leq t \leq b} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$ cela signifie qu'elle est exacte si f est un polynôme de degré $<$ à $n+1$.
- Si on est capable de calculer f en n'importe quel point, on peut faire varier les y_i de manière à ce que la méthode soit d'ordre supérieure.

Posons le problème

- Soit f une fonction que l'on peut calculer en *n'importe quel point*

Posons le problème

- Soit f une fonction que l'on peut calculer en *n'importe quel point*
- Soit n le nombre de points de calcul

Posons le problème

- Soit f une fonction que l'on peut calculer en *n'importe quel point*
- Soit n le nombre de points de calcul
- Soient y_1, y_2, . . ., y_n les points et α_1, α_2,. . .,α_n les coefficients

Posons le problème

- Soit f une fonction que l'on peut calculer en *n'importe quel point*
- Soit n le nombre de points de calcul
- Soient y_1, y_2, . . ., y_n les points et α_1, α_2,. . .,α_n les coefficients
- Soit $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à k.

Posons le problème

- Soit f une fonction que l'on peut calculer en *n'importe quel point*
- Soit n le nombre de points de calcul
- Soient y_1, y_2, . . ., y_n les points et α_1, α_2,. . .,α_n les coefficients
- Soit $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à k.
- On cherche les « meilleures valeurs » pour α_i et y_i afin de minimiser E dans la formule :

$$\int_a^b f(t)dt \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) + E$$

Posons le problème

- Soit f une fonction que l'on peut calculer en *n'importe quel point*
- Soit n le nombre de points de calcul
- Soient y_1, y_2, . . ., y_n les points et α_1, α_2,. . .,α_n les coefficients
- Soit $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à k.
- On cherche les « meilleures valeurs » pour α_i et y_i afin de minimiser E dans la formule :

$$\underbrace{\int_a^b f(t)dt}_{I(f)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i)}_{J(f)} + E$$

- Il y a $2n$ degrés de liberté, on espère obtenir une méthode d'ordre

Posons le problème

- Soit f une fonction que l'on peut calculer en *n'importe quel point*
- Soit n le nombre de points de calcul
- Soient y_1, y_2, ..., y_n les points et α_1, α_2,...,α_n les coefficients
- Soit $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à k.
- On cherche les « meilleures valeurs » pour α_i et y_i afin de minimiser E dans la formule :

$$\underbrace{\int_a^b f(t)dt}_{I(f)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i)}_{J(f)} + E$$

- Il y a $2n$ degrés de liberté, on espère obtenir une méthode d'ordre $2n$
  i.e. $E = 0$ si f est un polynôme de degré inférieur à $2n$.

Posons le problème

- Soit f une fonction que l'on peut calculer en *n'importe quel point*
- Soit n le nombre de points de calcul
- Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les points et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les coefficients
- Soit $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à k.
- On cherche les « meilleures valeurs » pour α_i et y_i afin de minimiser E dans la formule :

$$\underbrace{\int_a^b f(t)dt}_{I(f)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i)}_{J(f)} + E$$

- Il y a $2n$ degrés de liberté, on espère obtenir une méthode d'ordre $2n$
  i.e. $E = 0$ si f est un polynôme de degré inférieur à $2n$.
- Comment trouver les valeurs de α_i et y_i ?

Posons le problème

- Soit f une fonction que l'on peut calculer en *n'importe quel point*
- Soit n le nombre de points de calcul
- Soient y_1, y_2, . . ., y_n les points et α_1, α_2,. . .,α_n les coefficients
- Soit $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à k.
- On cherche les « meilleures valeurs » pour α_i et y_i afin de minimiser E dans la formule :

$$\underbrace{\int_a^b f(t)dt}_{I(f)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i)}_{J(f)} + E$$

- Il y a $2n$ degrés de liberté, on espère obtenir une méthode d'ordre $2n$
i.e. $E = 0$ si f est un polynôme de degré inférieur à $2n$.
- Comment trouver les valeurs de α_i et y_i ?
- Quelle est l'erreur si f n'est pas un polynôme de $\mathcal{P}_n$?

On cherche les « meilleures valeurs » pour α_i et y_i afin de minimiser E dans la formule :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) + E$$

Par exemple, si $a, b \in \mathbb{R}$, on peut toujours faire une intégration sur l'intervalle $[-1, 1]$ par le changement de variable $t = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u$

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f(u)du$$

On cherche les « meilleures valeurs » pour α_i et y_i afin de minimiser E dans la formule :

$$\int_a^b f(t)dt \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) + E$$

- Ces valeurs dépendent des bornes de l'intégrale a et b

Par exemple, si $a, b \in \mathbb{R}$, on peut toujours faire une intégration sur l'intervalle $[-1, 1]$ par le changement de variable $t = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u$

$$\int_a^b f(t)dt \quad = \quad \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f(u)du$$

Changement de variable

On cherche les « meilleures valeurs » pour α_i et y_i afin de minimiser E dans la formule :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) + E$$

- Ces valeurs dépendent des bornes de l'intégrale a et b

  $\Rightarrow$ on se ramène toujours à au mêmes bornes grâce à un changement de variable.

Par exemple, si $a, b \in \mathbb{R}$, on peut toujours faire une intégration sur l'intervalle $[-1, 1]$ par le changement de variable $t = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u$

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f(u)du$$

Choix des α_i et y_i

Nous n'étudirons pas ici la façon dont sont trouvées ces valeurs, il vous suffit de savoir que :

- Les points d'évaluations $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont les racines d'un polynôme faisant partie d'une famille de polynômes orthogonaux.
  - Il existe plusieurs familles de polynômes, chacune est associée à une certaine forme d'intégrale.
  - Pour calculer une intégrale de la forme $\int_{-1}^{1} f(u)du$, il faut utiliser les racines des polynômes de LEGENDRE, cela s'appelle la méthode de GAUSS-LEGENDRE
- On trouve les α_i grâce à la résolution d'un système linéaire qui dépend des y_i.

Pour calculer une intégrale de la forme :

$$\int_a^b f(t)dt$$

- On utilise le changment de variable $t = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u$

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(u)du$$

- On approche l'intégrale par :

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \simeq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i)$$

En pratique les valeurs des α_i et des y_i sont connues et tabulées.
Par exemple, en double précision pour la méthode de GAUSS-LEGENDRE à 12 points :

$$\begin{aligned}
y_1 &= 0.98156063424671925069 & y_2 &= 0.90411725637047485667\\
y_3 &= 0.76990267419430468703 & y_4 &= 0.58731795428661744729\\
y_5 &= 0.36783149899818019375 & y_6 &= 0.12523340851146891547\\
y_7 &= -0.12523340851146891547 & y_8 &= -0.36783149899818019375\\
y_9 &= -0.58731795428661744729 & y_{10} &= -0.76990267419430468703\\
y_{11} &= -0.90411725637047485667 & y_{12} &= -0.98156063424671925069
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0.047175336386511827 & \alpha_2 &= 0.10693932599531843\\
\alpha_3 &= 0.16007832854334622 & \alpha_4 &= 0.20316742672306592\\
\alpha_5 &= 0.23349253653835480 & \alpha_6 &= 0.24914704581340278\\
\alpha_7 &= 0.24914704581340278 & \alpha_8 &= 0.23349253653835480\\
\alpha_9 &= 0.20316742672306592 & \alpha_{10} &= 0.16007832854334622\\
\alpha_{11} &= 0.10693932599531843 & \alpha_{12} &= 0.047175336386511827
\end{aligned}$$

L'algorithme

L'algorithme de calcul de $\int_a^b f(t)dt$ en tenant compte du changement de variable pour se ramener à $[-1, 1]$ est le suivant :

Données : n, $(y_i)_{1\leq i\leq n}$, $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$, f, a, b

début

som $\leftarrow 0$

pour $i = 1$ à n **faire**

$t \leftarrow \frac{b-a}{2} y_i + \frac{a+b}{2}$

som $\leftarrow$ som $+\alpha_i \times f(t)$

fin

Résultat : $som \times \frac{b-a}{2}$

Calcul de l'erreur sur $[-1, 1]$

Sur $[-1, 1]$ si la fonction f n'est pas un polynôme, mais qu'elle est C^{2n} (sa dérivée $2n^{\text{e}}$ est continue).

Calcul de l'erreur sur $[-1, 1]$

Sur $[-1, 1]$ si la fonction f n'est pas un polynôme, mais qu'elle est C^{2n} (sa dérivée $2n^{\text{e}}$ est continue). Alors, on sait par le développement de TAYLOR que $\forall x \in [-1, 1]$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}(0) \\
&\quad + \int_0^x \frac{(x-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n)}(s) ds
\end{aligned}
$$

Calcul de l'erreur sur $[-1, 1]$

Sur $[-1, 1]$ si la fonction f n'est pas un polynôme, mais qu'elle est C^{2n} (sa dérivée $2n^{\text{e}}$ est continue). Alors, on sait par le développement de TAYLOR que $\forall x \in [-1, 1]$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}(0) \\
&\quad + \int_0^x \frac{(x-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n)}(s) ds
\end{aligned}
$$

On peut montrer que l'erreur $E = \sum_1^n \alpha_i f(y_i) - \int_{-1}^1 f(t)dt$ est de la forme

$$
E = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^{2n} - \frac{2}{2n+1} \right) \times \frac{f^{(2n)}(\gamma)}{(2n)!}
$$

avec $\gamma \in [-1, 1]$.

Calcul de l’erreur sur $[a, b]$

Calcul de l'erreur sur $[a, b]$

Sur $[a, b]$, On effectue le changement de variable :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2}\right) dt$$

Calcul de l'erreur sur $[a, b]$

Sur $[a, b]$, On effectue le changement de variable :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2}\right) dt$$

Donc cela donne

$$E = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^{2n} - \frac{2}{2n+1}\right) \times \frac{f^{(2n)}(\varepsilon)}{(2n)!}$$

avec $\varepsilon \in [a, b]$

La méthode est d'ordre $2n$ c'est à dire qu'elle est exacte si f est un polynôme de degré $< 2n$.

Exemple - I

Soit f la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+cos(x)}}$$

En calculant la somme :

$$\sum_{i=1}^{12} \alpha_i f(y_i) = \mathbf{1.734096183925}5953$$

Alors que $\int_{-1}^{1} f(t)dt = 1.73409618392561521854 33\ldots$

Exemple - II

Soit f la fonction :

$$f(x) \quad = \quad \sqrt{x}$$

En calcul ant la somme :

$$\sum_{i=1}^{12} \alpha_i f(y_i) \quad = \quad \mathbf{\color{red}{1.885}}7676976624573$$

$$\text{Alors que } \int_O^2 f(t)dt \quad = \quad 1.88561808316412\ldots$$

Soit f la fonction :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

En calculant la somme :

$$\sum_{i=1}^{12} \alpha_i f(y_i) = \mathbf{1.885}7676976624573$$

Alors que $$\int_O^2 f(t)dt = 1.88561808316412\ldots$$

La méthode n'est pas très efficace car $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Autres familles orthogonales

Il est possible d'utiliser cette méthode pour d'autres formes d'intégrales :

$$\int_a^b w(t)f(t)dt$$

où $[a, b]$ est un intervalle quelconque et $w(x)$ une fonction positive sur $[a, b]$ appelée *poids*.

Pour chaque forme d'intégrale, il existe une famille de polynômes orthogonaux, donc des points d'interpolation et des coefficients qui permettent de calculer l'intégrale sur $[a, b]$ avec la formule :

$$\int_a^b w(t)f(t)dt \quad \simeq \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i)$$

GAUSS-CHEBYSHEV

- La fonction de poids est $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- L'intervalle considéré est $]-1, 1[$
- Les polynômes orthogonaux sont :

$$\left\{\begin{array}{lcl} T_0(x) & = & 1 \\ T_1(x) & = & x \\ T_n(x) & = & 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad = \quad \cos(n \arccos(x)) \end{array}\right.$$

- Cette méthode est adaptée au calcul des intégrales de la forme

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) + E$$

Gauss-Laguerre

- La fonction de poids est $w(x) = \exp(-x)$
- L'intervalle considéré est $[0, \infty]$
- Les polynômes orthogonaux sont :

$$\begin{cases} L_0(x) & = & 1 \\ L_1(x) & = & 1 - x \\ L_n(x) & = & \frac{2n-1-x}{n} L_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} L_{n-2}(x) \end{cases}$$

- Cette méthode est adaptée au calcul des intégrales de la forme

$$\int_0^{\infty} \exp(-t) f(t) dt = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) + E$$

Accélération de la méthode

Il y a deux méthodes pour obtenir une meilleure approximation :

- Augmenter le nombre de points de GAUSS

Accélération de la méthode

Il y a deux méthodes pour obtenir une meilleure approximation :

- Augmenter le nombre de points de GAUSS

  Mais cela n'est pas toujours efficace

Accélération de la méthode

Il y a deux méthodes pour obtenir une meilleure approximation :

- Augmenter le nombre de points de GAUSS

  Mais cela n'est pas toujours efficace

- Diviser l'intervalle d'intégration en petits intervalles
  - Soient $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ avec $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$
  - Alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a_0}^{a_1} f(t)dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t)dt + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(t)dt$$

  - on calcule séparément chaque petite intégrale.
  - la borne d'erreur sur le calcul est :

Accélération de la méthode

Il y a deux méthodes pour obtenir une meilleure approximation :

- Augmenter le nombre de points de GAUSS

  Mais cela n'est pas toujours efficace

- Diviser l'intervalle d'intégration en petits intervalles
  - Soient $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ avec $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$
  - Alors

$$\int_a^b f(t)dt \quad = \quad \int_{a_0}^{a_1} f(t)dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t)dt + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(t)dt$$

  - on calcule séparément chaque petite intégrale.
  - la borne d'erreur sur le calcul est :

$$|E| \quad < \quad n \times \left(\frac{b-a}{2n}\right)^{2n+1} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^{2n} - \frac{2}{2n+1}\right) \max_{a \le t \le b} \left|f^{(2n)}(t)\right|$$

Cas des intégrales impropres

Parfois on ne peut pas utiliser directement ces méthodes pour le calcul de l'intégrale d'une fonction :

Cas des intégrales impropres

Parfois on ne peut pas utiliser directement ces méthodes pour le calcul de l'intégrale d'une fonction :

- Si l'une des bornes de l'intégrale est infinie $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$

Cas des intégrales impropres

Parfois on ne peut pas utiliser directement ces méthodes pour le calcul de l'intégrale d'une fonction :

- Si l'une des bornes de l'intégrale est infinie $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$
- Si la fonction n'est pas définie sur l'une des bornes $\int_0^1 \log(t) dt$

Cas des intégrales impropres

Parfois on ne peut pas utiliser directement ces méthodes pour le calcul de l'intégrale d'une fonction :

- Si l'une des bornes de l'intégrale est infinie $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$
- Si la fonction n'est pas définie sur l'une des bornes $\int_0^1 \log(t) dt$
- Si la fonction n'est pas dérivable sur l'une des bornes $\int_0^1 \sqrt{x} dt$

Cas des intégrales impropres

Parfois on ne peut pas utiliser directement ces méthodes pour le calcul de l'intégrale d'une fonction :

- Si l'une des bornes de l'intégrale est infinie $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$
- Si la fonction n'est pas définie sur l'une des bornes $\displaystyle\int_0^1 \log(t) dt$
- Si la fonction n'est pas dérivable sur l'une des bornes $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x} dt$

Alors, on sépare l'intégrale en de petites intégrales :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{1+10k}^{1+10(k+1)} \frac{1}{t^2} dt$$

ou

$$\int_0^1 \log(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \log(t) dt$$

On calcule chaque petite intégrale séparément et on s'arrête *quand le reste est négligeable*

Conclusion

- Pour le calcul de l'intégrale d'une fonction, on se ramène au calcul de l'intégrale d'un polynôme.
  - Car c'est un ensemble de fonctions très simple.
  - Il permet d'approcher presque toutes les fonctions intégrables.
  - Mais cela ne fonctionne bien que sur les fonctions *très régulières*.
- On peut couper l'intervalle d'intégration en petits morceaux.
  - Pour accélérer la convergence
  - Si l'intégrale est impropre
  - Si la fonction n'est pas assez régulière (non dérivable)