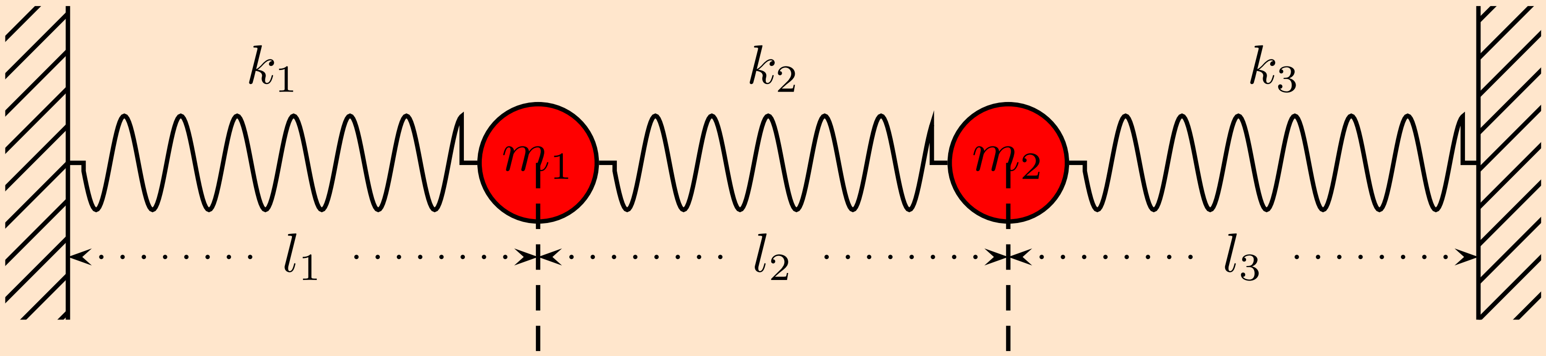
Méthode de la Puissance itérée

Polytech'Paris-UPMC

Introduction

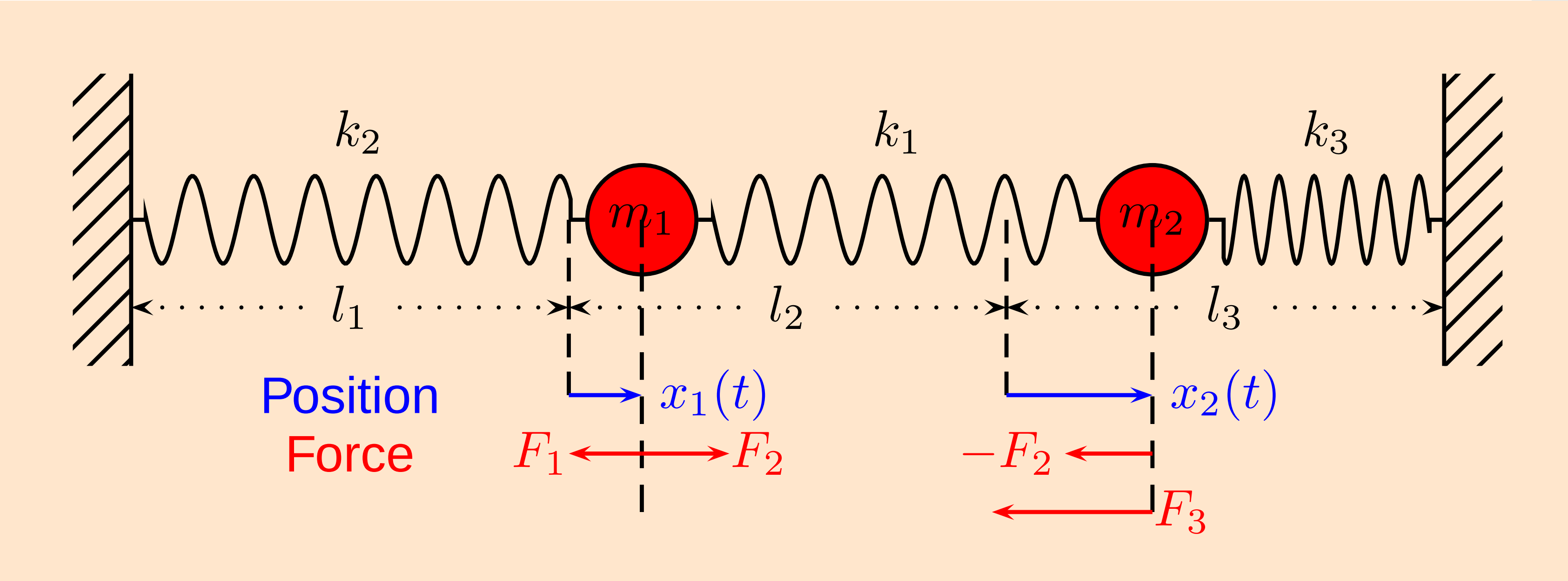
Un problème de Physique

Considérons un système de deux billes reliées par 3 ressorts



Un problème de Physique

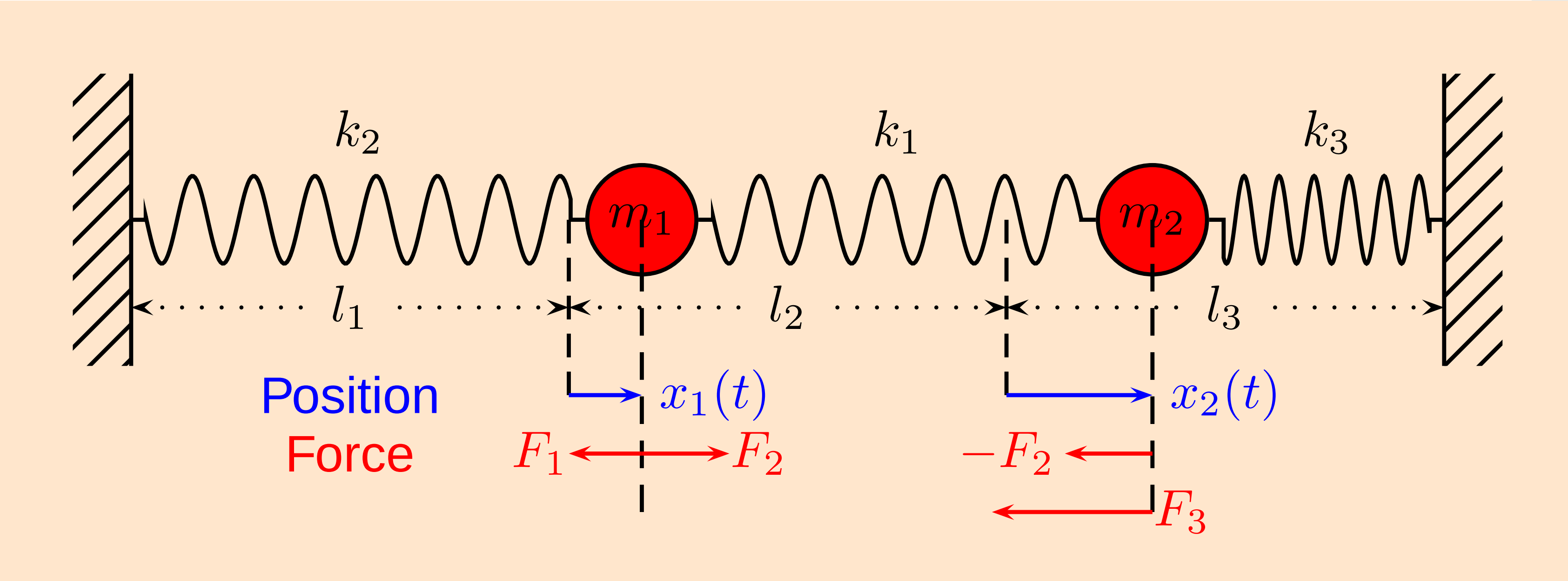
Considérons un système de deux billes reliées par 3 ressorts



Le système doit osciller, mais à quelle fréquence et à quelle amplitude ?

Un problème de Physique

Considérons un système de deux billes reliées par 3 ressorts



Le système doit osciller, mais à quelle fréquence et à quelle amplitude ?

D'après les lois de NEWTON

$$\begin{cases} m_1 x_1''(t) = F_1(t) + F_2(t) \\ m_2 x_2''(t) = -F_2(t) + F_3(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} F_1(t) = -k_1 x_1(t) \\ F_2(t) = k_2(x_2(t) - x_1(t)) \\ F_3(t) = -k_3 x_2(t) \end{cases}$$

Donc, $\left\{ \begin{array}{lll} x_1''(t) & = & -\frac{k_1+k_2}{m_1} x_1(t) + \frac{k_2}{m_1} x_2(t) \\ x_2''(t) & = & \frac{k_2}{m_2} x_1(t) - \frac{k_2+k_3}{m_2} F_3(t) \end{array} \right.$ Sous forme matricielle :

$$\overrightarrow{x}''(t) \quad = \quad -A\overrightarrow{x}(t) \qquad \text{avec} \qquad A \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2+k_3}{m_2} \end{pmatrix}$$

En cherchant les positions sous la forme $x_1(t) = C_1 \cos(\omega t)$ et $x_2(t) = C_2 \cos(\omega t)$ on obtient :

$$A \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad = \quad \omega^2 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Le problème revient donc à chercher $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ et ω tels que les deux équations ci-dessus soient satisfaites.
Cela revient à chercher les valeurs propres de la matrice A.

Le problème

Soit une matrice A, répondant à certaines conditions par exemple :

- A est symétrique, hermitienne
- A est diagonalisable
- Les valeurs propres de A sont toutes différentes

Le problème

Soit une matrice A, répondant à certaines conditions par exemple :

- A est symétrique, hermitienne
- A est diagonalisable
- Les valeurs propres de A sont toutes différentes

On cherche à obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Le problème

Soit une matrice A, répondant à certaines conditions par exemple :

- A est symétrique, hermitienne
- A est diagonalisable
- Les valeurs propres de A sont toutes différentes

On cherche à obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

- Méthodes basées sur le polynôme caractéristique

Le problème

Soit une matrice A, répondant à certaines conditions par exemple :

- A est symétrique, hermitienne
- A est diagonalisable
- Les valeurs propres de A sont toutes différentes

On cherche à obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

- Méthodes basées sur le polynôme caractéristique
- Méthodes basées sur les matrices semblables

Le problème

Soit une matrice A, répondant à certaines conditions par exemple :

- A est symétrique, hermitienne
- A est diagonalisable
- Les valeurs propres de A sont toutes différentes

On cherche à obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

- Méthodes basées sur le polynôme caractéristique
- Méthodes basées sur les matrices semblables
- Méthodes itératives

Le problème

Soit une matrice A, répondant à certaines conditions par exemple :

- A est symétrique, hermitienne
- A est diagonalisable
- Les valeurs propres de A sont toutes différentes

On cherche à obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

- Méthodes basées sur le polynôme caractéristique
- Méthodes basées sur les matrices semblables
- Méthodes itératives

Les méthodes itératives sont basées sur une suite de vecteurs $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers un vecteur propre.

Le problème

Soit une matrice A, répondant à certaines conditions par exemple :

- A est symétrique, hermitienne
- A est diagonalisable
- Les valeurs propres de A sont toutes différentes

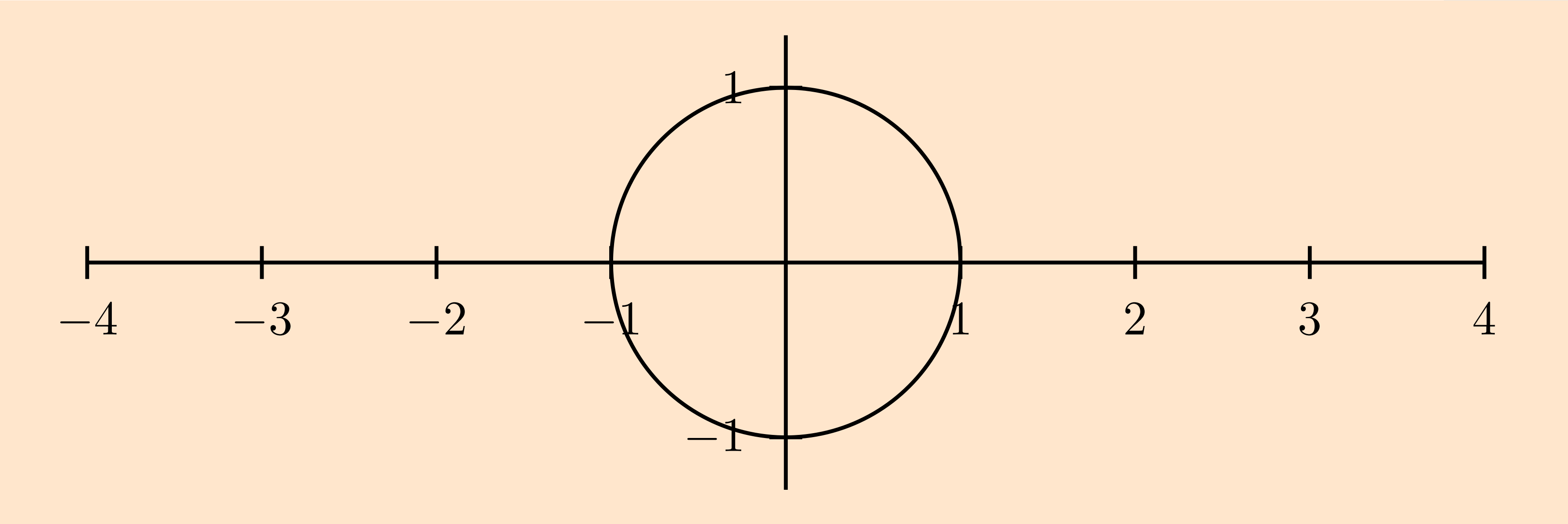
On cherche à obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

- Méthodes basées sur le polynôme caractéristique
- Méthodes basées sur les matrices semblables
- Méthodes itératives

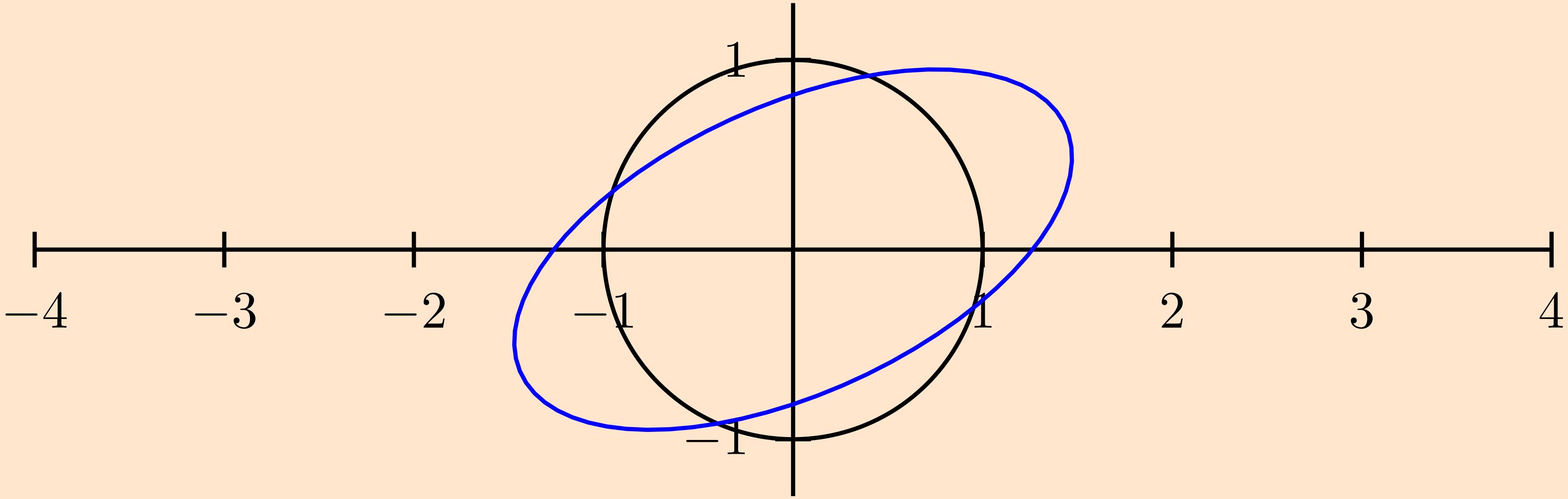
Les méthodes itératives sont basées sur une suite de vecteurs $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers un vecteur propre.

Comment construire cette suite ?

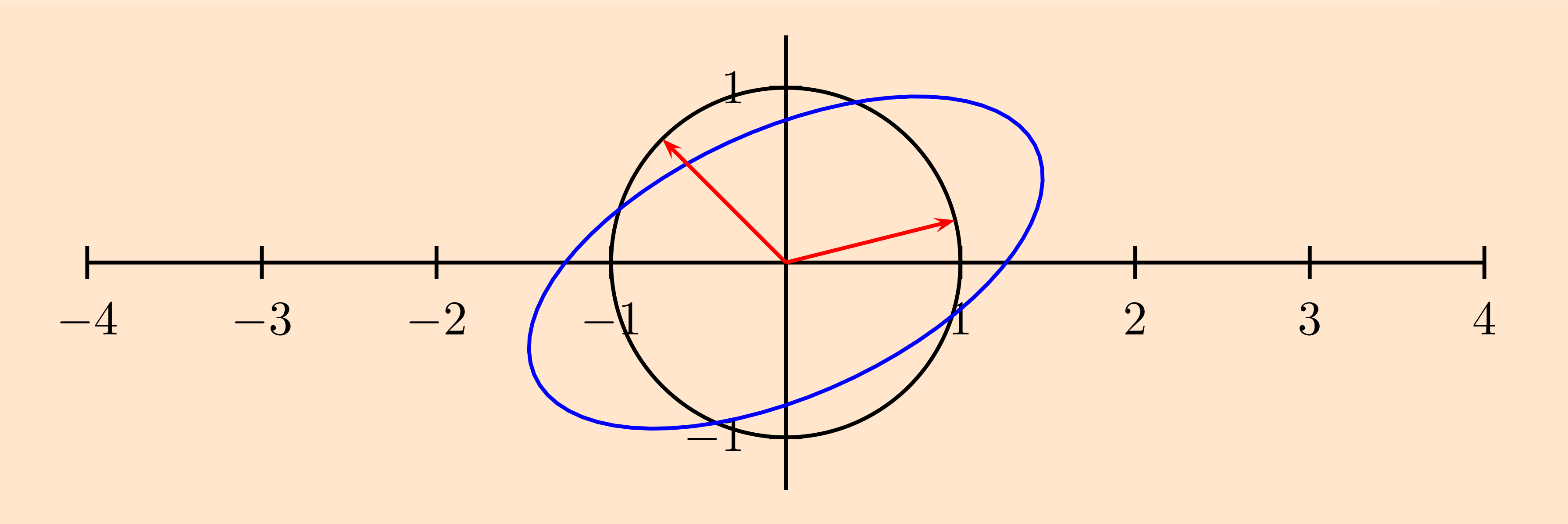
Algorithme de la puissance itérée



matrice $A = \begin{pmatrix} 1,36 & 0,56 \\ 0.14 & 0.94 \end{pmatrix}$

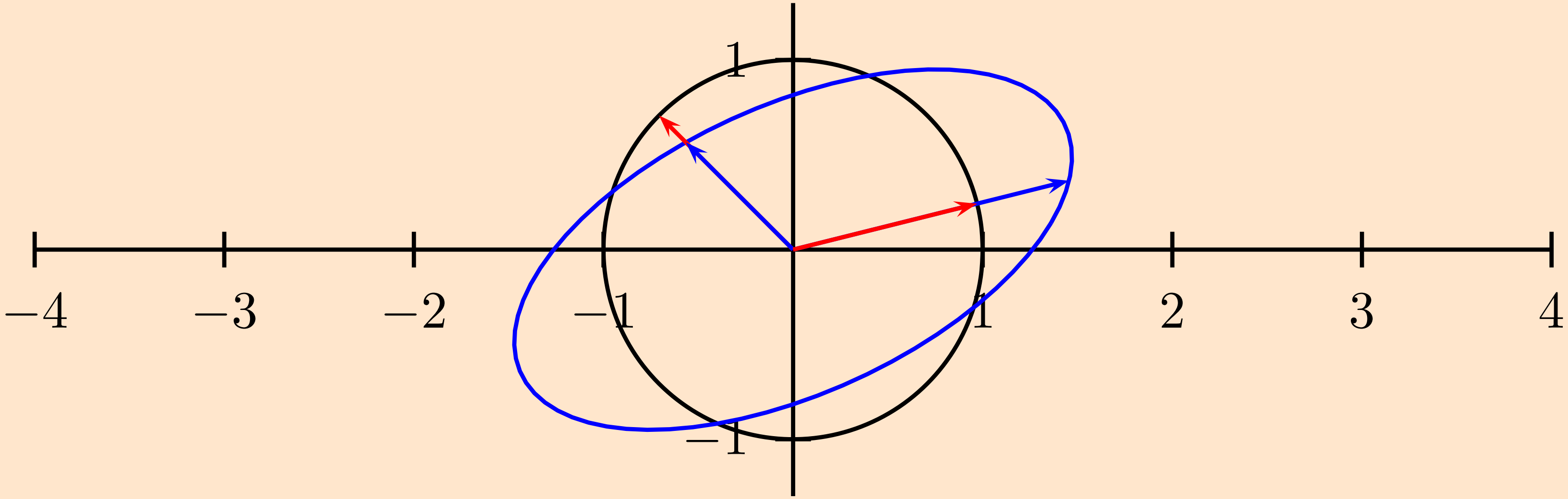


matrice $A = \begin{pmatrix} 1,36 & 0,56 \\ 0.14 & 0.94 \end{pmatrix}$



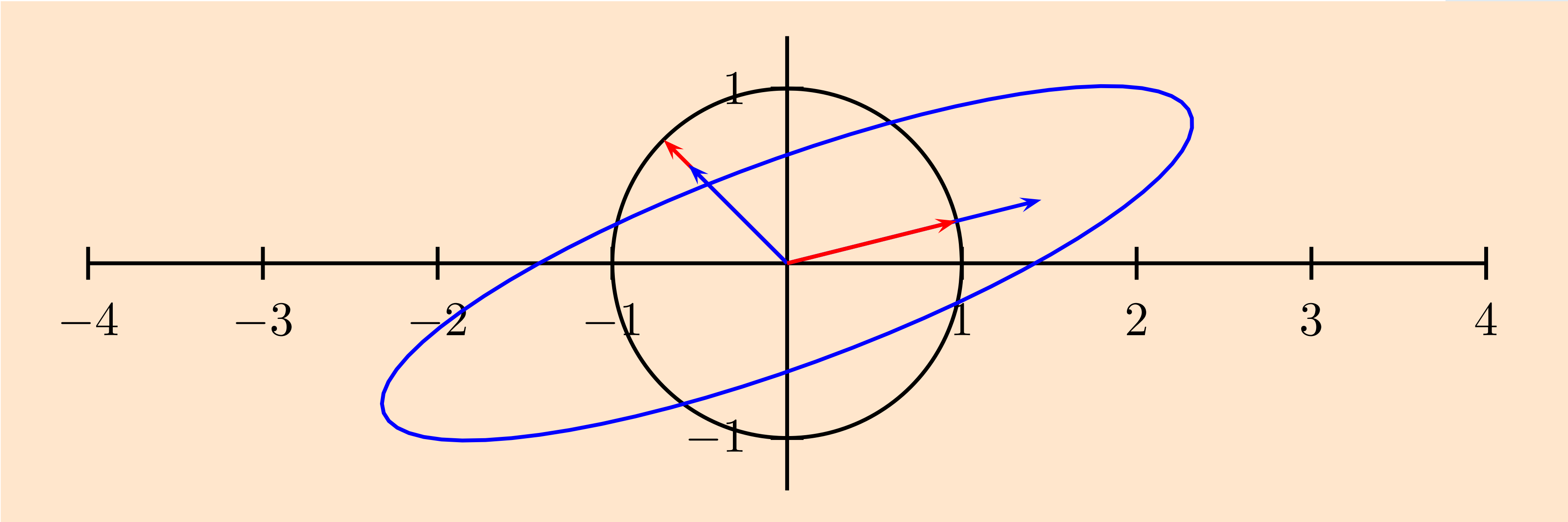
matrice $A = \begin{pmatrix} 1,36 & 0,56 \\ 0.14 & 0.94 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs propres sont :

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



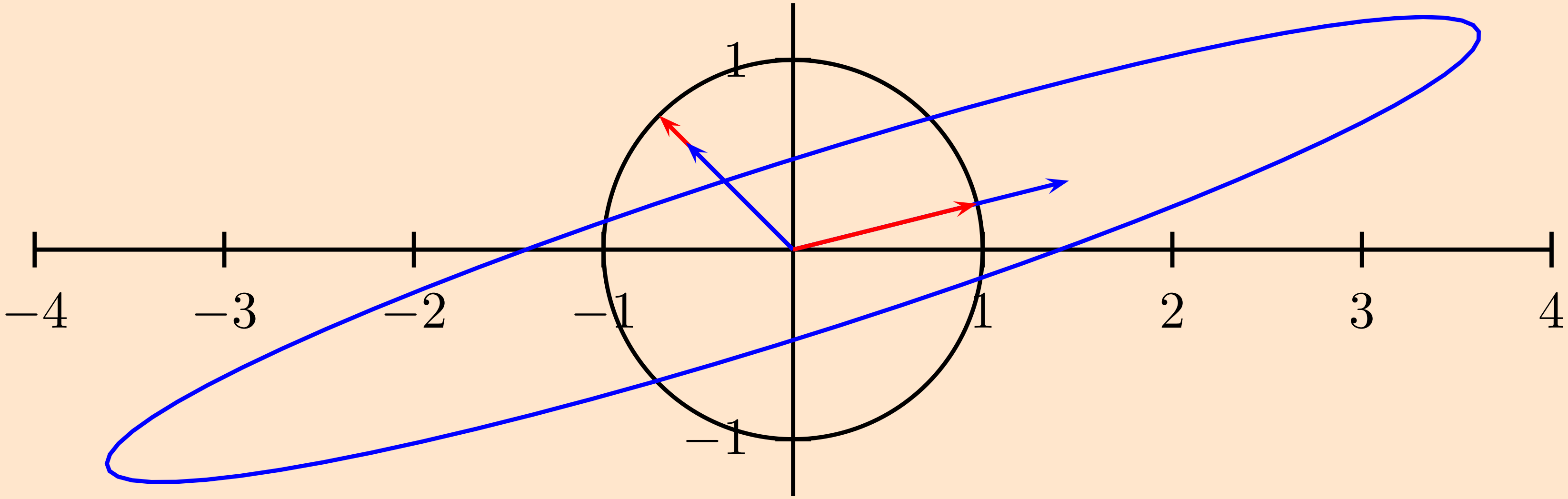
matrice $A = \begin{pmatrix} 1,36 & 0,56 \\ 0.14 & 0.94 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs propres sont :

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre $1,5$
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre $0,8$



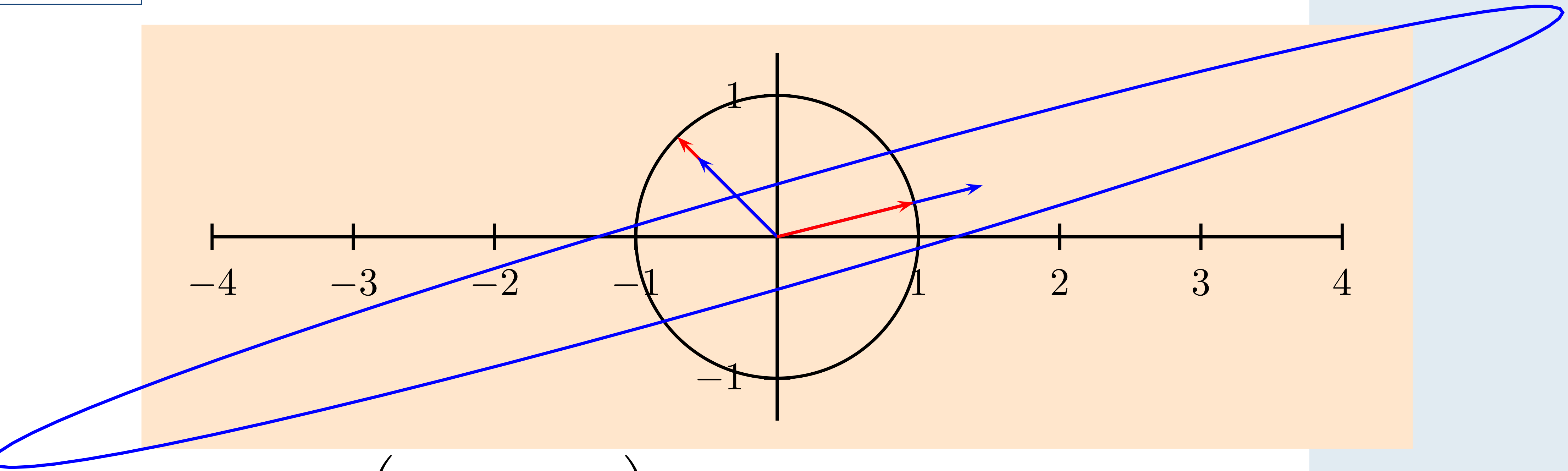
matrice $A = \begin{pmatrix} 1,36 & 0,56 \\ 0.14 & 0.94 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs propres sont :

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre $1,5$
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre $0,8$



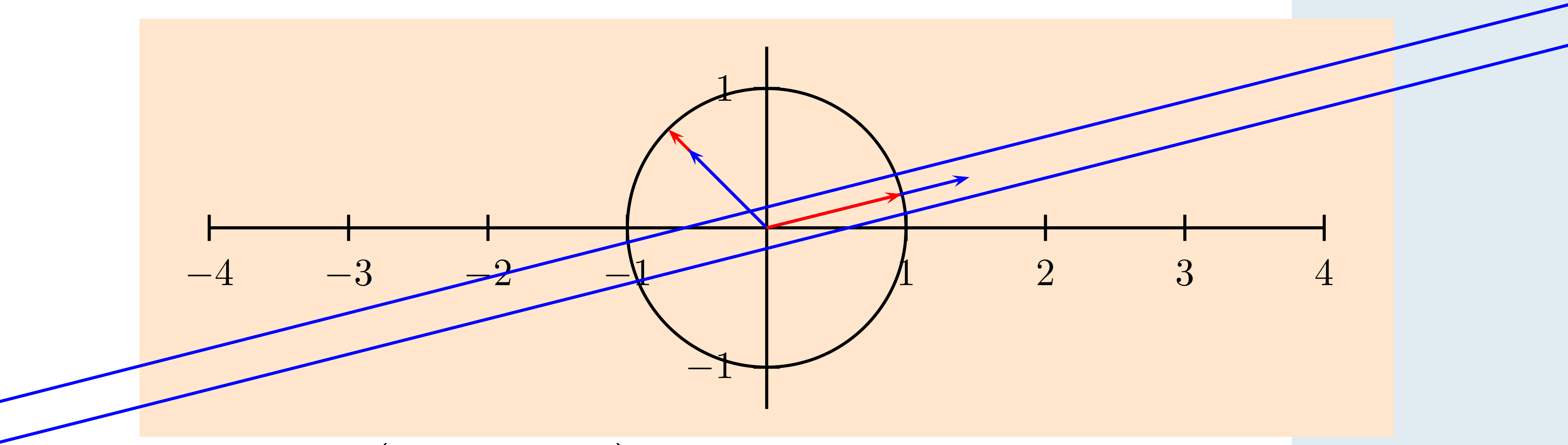
matrice $A = \begin{pmatrix} 1,36 & 0,56 \\ 0.14 & 0.94 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs propres sont :

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre $1,5$
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre $0,8$



matrice $A = \begin{pmatrix} 1,36 & 0,56 \\ 0.14 & 0.94 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs propres sont :

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre $1,5$
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre $0,8$



matrice $A = \begin{pmatrix} 1,36 & 0,56 \\ 0.14 & 0.94 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs propres sont :

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre $1,5$
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre $0,8$

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dont on cherche les valeurs propres,

- supposons que A possède n valeurs propres de modules différents

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{telles que} \quad |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$

  et soient $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres associés

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dont on cherche les valeurs propres,

- supposons que A possède n valeurs propres de modules différents

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{telles que} \quad |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$

  et soient $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres associés
- Alors, si $\overrightarrow{x_0}$ est un vecteur quelconque,

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dont on cherche les valeurs propres,

- supposons que A possède n valeurs propres de modules différents

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{telles que} \quad |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$

  et soient $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres associés
- Alors, si $\overrightarrow{x_0}$ est un vecteur quelconque,

$$\overrightarrow{x_0} = a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{u_n}$$

Principe

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dont on cherche les valeurs propres,

- supposons que A possède n valeurs propres de modules différents

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{telles que} \quad |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$

  et soient $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres associés
- Alors, si $\overrightarrow{x_0}$ est un vecteur quelconque,

$$\overrightarrow{x_0} = a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{u_n}$$

- Supposons que $a_n \neq 0$,

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dont on cherche les valeurs propres,

- supposons que A possède n valeurs propres de modules différents

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad \text{telles que} \quad |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$

  et soient $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres associés
- Alors, si $\overrightarrow{x_0}$ est un vecteur quelconque,

$$\overrightarrow{x_0} \quad = \quad a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{u_n}$$

- Supposons que $a_n \neq 0$, on calcule la suite $\overrightarrow{x_{k+1}} \quad = \quad A\overrightarrow{x_k}$
  c'est à dire

Principe

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dont on cherche les valeurs propres,

- supposons que A possède n valeurs propres de modules différents

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{telles que} \quad |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$

  et soient $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres associés

- Alors, si $\overrightarrow{x_0}$ est un vecteur quelconque,

$$\overrightarrow{x_0} = a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{u_n}$$

- Supposons que $a_n \neq 0$, on calcule la suite $\overrightarrow{x_{k+1}} = A\overrightarrow{x_k}$
  c'est à dire $\overrightarrow{x_k} = A^k\overrightarrow{x_0}$

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dont on cherche les valeurs propres,

- supposons que A possède n valeurs propres de modules différents

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{telles que} \quad |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$

  et soient $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres associés

- Alors, si $\overrightarrow{x_0}$ est un vecteur quelconque,

$$\overrightarrow{x_0} \quad = \quad a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{u_n}$$

- Supposons que $a_n \neq 0$, on calcule la suite $\overrightarrow{x_{k+1}} \quad = \quad A\overrightarrow{x_k}$

  c'est à dire
$$\begin{aligned} \overrightarrow{x_k} &= A^k\overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{x_k} &= \lambda_1^k a_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2^k a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_n^k a_n\overrightarrow{u_n} \end{aligned}$$

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dont on cherche les valeurs propres,

- supposons que A possède n valeurs propres de modules différents

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{telles que} \quad |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$

  et soient $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres associés
- Alors, si $\overrightarrow{x_0}$ est un vecteur quelconque,

$$\overrightarrow{x_0} = a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{u_n}$$

- Supposons que $a_n \neq 0$, on calcule la suite $\overrightarrow{x_{k+1}} = A\overrightarrow{x_k}$

  c'est à dire

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x_k} &= A^k\overrightarrow{x_0} \\
\overrightarrow{x_k} &= \lambda_1^k a_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2^k a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_n^k a_n\overrightarrow{u_n} \\
\overrightarrow{x_k} &= \lambda_n^k \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k a_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k a_{n-1}\overrightarrow{u_{n-1}} + a_n\overrightarrow{u_n} \right)
\end{aligned}$$

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dont on cherche les valeurs propres,

- supposons que A possède n valeurs propres de modules différents

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{telles que} \quad |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$

  et soient $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres associés

- Alors, si $\overrightarrow{x_0}$ est un vecteur quelconque,

$$\overrightarrow{x_0} = a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{u_n}$$

- Supposons que $a_n \neq 0$, on calcule la suite $\overrightarrow{x_{k+1}} = A\overrightarrow{x_k}$

  c'est à dire
$$\begin{aligned} \overrightarrow{x_k} &= A^k\overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{x_k} &= \lambda_1^k a_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2^k a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_n^k a_n\overrightarrow{u_n} \\ \overrightarrow{x_k} &= \lambda_n^k \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k a_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k a_{n-1}\overrightarrow{u_{n-1}} + a_n\overrightarrow{u_n} \right) \end{aligned}$$

Or si $i \neq n$, $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \to 0$ donc le terme prépondérant devient $\lambda_n^k a_n\overrightarrow{u_n}$

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ dont on cherche les valeurs propres,

- supposons que A possède n valeurs propres de modules différents

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{telles que} \quad |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$

  et soient $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres associés
- Alors, si $\overrightarrow{x_0}$ est un vecteur quelconque,

$$\overrightarrow{x_0} = a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{u_n}$$

- Supposons que $a_n \neq 0$, on calcule la suite $\overrightarrow{x_{k+1}} = A\overrightarrow{x_k}$

  c'est à dire

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x_k} &= A^k\overrightarrow{x_0} \\
\overrightarrow{x_k} &= \lambda_1^k a_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2^k a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_n^k a_n\overrightarrow{u_n} \\
\overrightarrow{x_k} &= \lambda_n^k \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k a_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k a_{n-1}\overrightarrow{u_{n-1}} + a_n\overrightarrow{u_n} \right)
\end{aligned}$$

Or si $i \neq n$, $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \to 0$ donc le terme prépondérant devient $\lambda_n^k a_n\overrightarrow{u_n}$

Principe (suite)

Au bout d'un « certain nombre » d'itérations :

- La plus grande valeur propre est
- Le vecteur propre associé est

Principe (suite)

Au bout d'un « certain nombre » d'itérations :

- La plus grande valeur propre est
- Le vecteur propre associé est $\overrightarrow{u_n} \simeq \overrightarrow{x_k}$

Principe (suite)

Au bout d'un « certain nombre » d'itérations :

- La plus grande valeur propre est $|\lambda_n| \simeq \dfrac{\|\overrightarrow{x_{k+1}}\|}{\|\overrightarrow{x_k}\|}$
- Le vecteur propre associé est $\overrightarrow{u_n} \simeq \overrightarrow{x_k}$

Principe (suite)

Au bout d'un « certain nombre » d'itérations :

- La plus grande valeur propre est $|\lambda_n| \simeq \dfrac{\|\overrightarrow{x_{k+1}}\|}{\|\overrightarrow{x_k}\|}$
- Le vecteur propre associé est $\overrightarrow{u_n} \simeq \overrightarrow{x_k}$

En pratique :

- Si λ_n est grand, il peut y avoir dépassement de capacité

Principe (suite)

Au bout d'un « certain nombre » d'itérations :

- La plus grande valeur propre est $|\lambda_n| \simeq \dfrac{\|\overrightarrow{x_{k+1}}\|}{\|\overrightarrow{x_k}\|}$
- Le vecteur propre associé est $\overrightarrow{u_n} \simeq \overrightarrow{x_k}$

En pratique :

- Si λ_n est grand, il peut y avoir dépassement de capacité
  $\Rightarrow$ *On normalise la suite*

$$\overrightarrow{b_k} = \frac{\overrightarrow{x_k}}{\|\overrightarrow{x_k}\|} \quad \textit{et} \quad \overrightarrow{x_{k+1}} = A\overrightarrow{b_k}$$

Principe (suite)

Au bout d'un « certain nombre » d'itérations :

- La plus grande valeur propre est $|\lambda_n| \simeq \dfrac{\|\overrightarrow{x_{k+1}}\|}{\|\overrightarrow{x_k}\|}$
- Le vecteur propre associé est $\overrightarrow{u_n} \simeq \overrightarrow{x_k}$

En pratique :

- Si λ_n est grand, il peut y avoir dépassement de capacité
  $\Rightarrow$*On normalise la suite*

$$\overrightarrow{b_k} = \frac{\overrightarrow{x_k}}{\|\overrightarrow{x_k}\|} \quad \textit{et} \quad \overrightarrow{x_{k+1}} = A\overrightarrow{b_k}$$

- On cherche à obtenir λ_n, pour cela on utilise le produit scalaire :

$$\begin{aligned} {}^{t}\overrightarrow{b_k}\,\overrightarrow{x_{k+1}} &= {}^{t}\overrightarrow{b_k}\,A\overrightarrow{b_k} \\ &\simeq \lambda_n\,{}^{t}\overrightarrow{b_k}\,\overrightarrow{b_k} \\ &\simeq \lambda_n \qquad \text{si les } \overrightarrow{b_k} \text{ sont normalisés} \end{aligned}$$

Algorithme

Données : A, $\overrightarrow{x_0}$ et ε

début

$\overrightarrow{x} \leftarrow \overrightarrow{x_0}$

$\lambda_{anc} \leftarrow 1$; $\lambda \leftarrow 0$

tant que $|\lambda - \lambda_{anc}| > \varepsilon$ **faire**

$\lambda_{anc} \leftarrow \lambda$

$\overrightarrow{b} \leftarrow \frac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|}$

$\overrightarrow{x} \leftarrow A\,\overrightarrow{b}$

$\lambda \leftarrow {}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{x}$

retourner λ, b

fin

Polytech'Paris-UPMC

Algorithme

Données : A, $\overrightarrow{x_0}$ et ε

début

$\overrightarrow{x} \leftarrow \overrightarrow{x_0}$

$\lambda_{anc} \leftarrow 1$; $\lambda \leftarrow 0$

tant que $|\lambda - \lambda_{anc}| > \varepsilon$ **faire**

$\lambda_{anc} \leftarrow \lambda$

$\overrightarrow{b} \leftarrow \dfrac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|}$

$\overrightarrow{x} \leftarrow A\,\overrightarrow{b}$

$\lambda \leftarrow {}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{x}$

retourner λ, b

fin

- On peut ajouter un test de convergence sur le vecteur pour obtenir un vecteur propre.

Algorithme

Données : A, $\overrightarrow{x_0}$ et ε

début

$\overrightarrow{x} \leftarrow \overrightarrow{x_0}$

$\lambda_{anc} \leftarrow 1$; $\lambda \leftarrow 0$

tant que $|\lambda - \lambda_{anc}| > \varepsilon$ **faire**

$\lambda_{anc} \leftarrow \lambda$

$\overrightarrow{b} \leftarrow \dfrac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|}$

$\overrightarrow{x} \leftarrow A\,\overrightarrow{b}$

$\lambda \leftarrow {}^{t}\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{x}$

retourner λ, b

fin

- On peut ajouter un test de convergence sur le vecteur pour obtenir un vecteur propre.
- Ici, on utilise la norme euclidienne $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{{}^{t}\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{x}}$ pour utiliser une autre norme, il faut changer le calcul de λ :

Algorithme

Données : A, $\overrightarrow{x_0}$ et ε

début

$\overrightarrow{x} \leftarrow \overrightarrow{x_0}$

$\lambda_{anc} \leftarrow 1$; $\lambda \leftarrow 0$

tant que $|\lambda - \lambda_{anc}| > \varepsilon$ **faire**

$\lambda_{anc} \leftarrow \lambda$

$\overrightarrow{b} \leftarrow \frac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|}$

$\overrightarrow{x} \leftarrow A\,\overrightarrow{b}$

$\lambda \leftarrow {}^{t}\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{x}$

retourner λ, b

fin

- On peut ajouter un test de convergence sur le vecteur pour obtenir un vecteur propre.
- Ici, on utilise la norme euclidienne $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{{}^{t}\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{x}}$ pour utiliser une autre norme, il faut changer le calcul de λ : $\lambda \leftarrow \frac{{}^{t}\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{x}}{{}^{t}\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{b}}$

- supposons que A possède n valeurs propres de modules différents

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad \text{telles que} \quad |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$

  et soient $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres associés

$$\overrightarrow{x_0} = a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{u_n}$$

En normalisant,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{b_k} &= \frac{\lambda_n^k}{\|A^k\overrightarrow{x_0}\|}\left(\frac{\lambda_1^k}{\lambda_n^k}a_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}^k}{\lambda_n^k}a_{n-1}\overrightarrow{u_{n-1}} + a_n\overrightarrow{u_n}\right) \\
&= \frac{\lambda_n^k}{\|A^k\overrightarrow{x_0}\|}a_n\overrightarrow{u_n} + \frac{\lambda_n^k}{\|A^k\overrightarrow{x_0}\|}\left(\frac{\lambda_1^k}{\lambda_n^k}a_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}^k}{\lambda_n^k}a_{n-1}\overrightarrow{u_{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

Le terme d'erreur le plus important est $\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k a_n\overrightarrow{u_{n-1}}$

Vitesse de convergence

Par définition, $\frac{|\lambda_n|^k}{\|A^k\overrightarrow{x_0}\|}$ est borné car $\overrightarrow{b_k}$ est de norme 1. Donc il existe C tel que :

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{b_k} - \frac{\lambda_n^k}{\|A^k\overrightarrow{x_0}\|}a_n\overrightarrow{u_n}\right\| &\leq C\left\|\frac{\lambda_1^k}{\lambda_n^k}a_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}^k}{\lambda_n^k}a_{n-1}\overrightarrow{u_{n-1}}\right\| \\ &\leq C\frac{|\lambda_{n-1}|^k}{|\lambda_n|^k}\left(\|a_1\overrightarrow{u_1}\| + \|a_2\overrightarrow{u_2}\| + \|a_{n-1}\overrightarrow{u_{n-1}}\|\right)\end{aligned}$$

La convergence dépend donc du rapport entre la plus grande et la deuxième plus grande valeur propre :

$$\frac{|\lambda_{n-1}|}{|\lambda_n|}$$

$\Rightarrow$*Si les valeurs propres sont très proches, la convergence sera lente*

Méthode de déflation

Méthode de déflation

Comment faire pour trouver la deuxième plus grande valeur propre ?

Méthode de déflation

Comment faire pour trouver la deuxième plus grande valeur propre ?

Idée : trouver une matrice qui a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ *et* 0

Méthode de déflation

Comment faire pour trouver la deuxième plus grande valeur propre ?

Idée : trouver une matrice qui a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ et 0

Soient $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres de A, ils forment une base de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une *base duale* $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ telle que

$$\forall i, j \qquad {}^{t}\overrightarrow{v_i}\,\overrightarrow{u_j} = \delta_{ij}$$

Rappel : $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$

Méthode de déflation

Comment faire pour trouver la deuxième plus grande valeur propre ?

Idée : trouver une matrice qui a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ *et* 0

Soient $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres de A, ils forment une base de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une *base duale* $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ telle que

$$\forall i, j \qquad {}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{v_i}\,\overrightarrow{u_j} = \delta_{ij}$$

Rappel : $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$

Alors soit

$$B = A - \lambda_n \overrightarrow{u_n}\,{}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{v_n}$$

Méthode de déflation

Comment faire pour trouver la deuxième plus grande valeur propre ?

Idée : trouver une matrice qui a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ et 0

Soient $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres de A, ils forment une base de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une *base duale* $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ telle que

$$\forall i, j \qquad {}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{v_i}\,\overrightarrow{u_j} = \delta_{ij}$$

Rappel : $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$

Alors soit

$$B = A - \lambda_n \overrightarrow{u_n}\,{}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{v_n}$$

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} B(\overrightarrow{u_i}) &= A\overrightarrow{u_i} - \lambda_n \overrightarrow{u_n}({}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{v_n}\,\overrightarrow{u_i}) \\ &= \lambda_i \overrightarrow{u_i} - \lambda_n \delta_{in} \overrightarrow{u_n} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } i = n \\ \lambda_i \overrightarrow{u_i} \text{ si } i \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

Méthode de déflation

Comment faire pour trouver la deuxième plus grande valeur propre ?

Idée : trouver une matrice qui a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ et 0

Soient $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ les vecteurs propres de A, ils forment une base de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une *base duale* $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$ telle que

$$\forall i, j \qquad {}^{t}\overrightarrow{v_i}\,\overrightarrow{u_j} \;=\; \delta_{ij}$$

Rappel : $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$
Alors soit

$$B = A - \lambda_n \overrightarrow{u_n}\,{}^{t}\overrightarrow{v_n}$$

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} B(\overrightarrow{u_i}) &= A\overrightarrow{u_i} - \lambda_n \overrightarrow{u_n}({}^{t}\overrightarrow{v_n}\,\overrightarrow{u_i}) \\ &= \lambda_i \overrightarrow{u_i} - \lambda_n \delta_{in} \overrightarrow{u_n} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } i = n \\ \lambda_i \overrightarrow{u_i} \text{ si } i \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

Donc B a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ et 0 et les mêmes vecteurs propres que A.

Méthode de déflation (suite)

En appliquant la méthode de la puissance itérée à B, on obtient λ_{n-1} et $\overrightarrow{u_{n-1}}$

Méthode de déflation (suite)

En appliquant la méthode de la puissance itérée à B, on obtient λ_{n-1} et $\overrightarrow{u_{n-1}}$
Connaissant λ_n et $\overrightarrow{u_n}$ et A, comment trouver le vecteur de la base duale $\overrightarrow{v_n}$?

Méthode de déflation (suite)

En appliquant la méthode de la puissance itérée à B, on obtient λ_{n-1} et $\overrightarrow{u_{n-1}}$

Connaissant λ_n et $\overrightarrow{u_n}$ et A, comment trouver le vecteur de la base duale $\overrightarrow{v_n}$?

- Si A est symétrique,

En appliquant la méthode de la puissance itérée à B, on obtient λ_{n-1} et $\overrightarrow{u_{n-1}}$

Connaissant λ_n et $\overrightarrow{u_n}$ et A, comment trouver le vecteur de la base duale $\overrightarrow{v_n}$?

- Si A est symétrique, les vecteur propres sont orthogonaux donc $\overrightarrow{v_n} = \frac{\overrightarrow{u_n}}{{}^t\overrightarrow{u_n}\,\overrightarrow{u_n}}$.

Méthode de déflation (suite)

En appliquant la méthode de la puissance itérée à B, on obtient λ_{n-1} et $\overrightarrow{u_{n-1}}$

Connaissant λ_n et $\overrightarrow{u_n}$ et A, comment trouver le vecteur de la base duale $\overrightarrow{v_n}$?

- Si A est symétrique, les vecteur propres sont orthogonaux donc $\overrightarrow{v_n} = \frac{\overrightarrow{u_n}}{{}^t\overrightarrow{u_n}\,\overrightarrow{u_n}}$.
- Sinon, considérons ${}^tA$,
  - Elle a les mêmes valeurs propres que A.

Méthode de déflation (suite)

En appliquant la méthode de la puissance itérée à B, on obtient λ_{n-1} et $\overrightarrow{u_{n-1}}$

Connaissant λ_n et $\overrightarrow{u_n}$ et A, comment trouver le vecteur de la base duale $\overrightarrow{v_n}$?

- Si A est symétrique, les vecteur propres sont orthogonaux donc $\overrightarrow{v_n} = \frac{\overrightarrow{u_n}}{{}^t\overrightarrow{u_n}\,\overrightarrow{u_n}}$.
- Sinon, considérons ${}^tA$,
  - Elle a les mêmes valeurs propres que A.
  - Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur propre associé à λ_n,

$$ {}^t\overrightarrow{v}\,A\overrightarrow{u_i} \quad = $$

Méthode de déflation (suite)

En appliquant la méthode de la puissance itérée à B, on obtient λ_{n-1} et $\overrightarrow{u_{n-1}}$

Connaissant λ_n et $\overrightarrow{u_n}$ et A, comment trouver le vecteur de la base duale $\overrightarrow{v_n}$?

- Si A est symétrique, les vecteur propres sont orthogonaux donc $\overrightarrow{v_n} = \frac{\overrightarrow{u_n}}{{}^t\overrightarrow{u_n}\,\overrightarrow{u_n}}$.
- Sinon, considérons ${}^tA$,
  - Elle a les mêmes valeurs propres que A.
  - Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur propre associé à λ_n,

$$ {}^t\overrightarrow{v}\,A\overrightarrow{u_i} \quad = \quad ({}^t\overrightarrow{v}\,A)\,\overrightarrow{u_i} $$

Méthode de déflation (suite)

En appliquant la méthode de la puissance itérée à B, on obtient λ_{n-1} et $\overrightarrow{u_{n-1}}$

Connaissant λ_n et $\overrightarrow{u_n}$ et A, comment trouver le vecteur de la base duale $\overrightarrow{v_n}$?

- Si A est symétrique, les vecteur propres sont orthogonaux donc $\overrightarrow{v_n} = \frac{\overrightarrow{u_n}}{{}^t\overrightarrow{u_n}\,\overrightarrow{u_n}}$.
- Sinon, considérons ${}^tA$,
  - Elle a les mêmes valeurs propres que A.
  - Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur propre associé à λ_n,

$$
{}^t\overrightarrow{v}\,A\overrightarrow{u_i} \quad = \quad \left({}^t\overrightarrow{v}\,A\right)\overrightarrow{u_i} \quad = \quad \lambda_n\,{}^t\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u_i}
$$

Méthode de déflation (suite)

En appliquant la méthode de la puissance itérée à B, on obtient λ_{n-1} et $\overrightarrow{u_{n-1}}$

Connaissant λ_n et $\overrightarrow{u_n}$ et A, comment trouver le vecteur de la base duale $\overrightarrow{v_n}$?

- Si A est symétrique, les vecteur propres sont orthogonaux donc $\overrightarrow{v_n} = \frac{\overrightarrow{u_n}}{{}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{u_n}\,\overrightarrow{u_n}}$.
- Sinon, considérons ${}^{\mathrm{t}}A$,
  - Elle a les mêmes valeurs propres que A.
  - Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur propre associé à λ_n,

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{v}\,A\overrightarrow{u_i} &= ({}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{v}\,A)\,\overrightarrow{u_i} = \lambda_n\,{}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u_i} \\ &= {}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{v}\,(A\overrightarrow{u_i}) \end{aligned}$$

Méthode de déflation (suite)

En appliquant la méthode de la puissance itérée à B, on obtient λ_{n-1} et $\overrightarrow{u_{n-1}}$

Connaissant λ_n et $\overrightarrow{u_n}$ et A, comment trouver le vecteur de la base duale $\overrightarrow{v_n}$?

- Si A est symétrique, les vecteur propres sont orthogonaux donc $\overrightarrow{v_n} = \frac{\overrightarrow{u_n}}{{}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{u_n}\,\overrightarrow{u_n}}$.
- Sinon, considérons ${}^{\mathrm{t}}A$,
  - Elle a les mêmes valeurs propres que A.
  - Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur propre associé à λ_n,

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{v}\,A\overrightarrow{u_i} &= \left({}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{v}\,A\right)\overrightarrow{u_i} &&= \lambda_n\,{}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u_i} \\
&= {}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{v}\left(A\overrightarrow{u_i}\right) &&= \lambda_i\,{}^{\mathrm{t}}\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u_i}
\end{aligned}$$

Méthode de déflation (suite)

En appliquant la méthode de la puissance itérée à B, on obtient λ_{n-1} et $\overrightarrow{u_{n-1}}$
Connaissant λ_n et $\overrightarrow{u_n}$ et A, comment trouver le vecteur de la base duale $\overrightarrow{v_n}$?

- Si A est symétrique, les vecteur propres sont orthogonaux donc $\overrightarrow{v_n} = \frac{\overrightarrow{u_n}}{{}^t\overrightarrow{u_n}\,\overrightarrow{u_n}}$.
- Sinon, considérons ${}^tA$,
    - Elle a les mêmes valeurs propres que A.
    - Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur propre associé à λ_n,

$$\begin{aligned} {}^t\overrightarrow{v}\,A\overrightarrow{u_i} &= \left({}^t\overrightarrow{v}\,A\right)\overrightarrow{u_i} = \lambda_n\,{}^t\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u_i} \\ &= {}^t\overrightarrow{v}\left(A\overrightarrow{u_i}\right) = \lambda_i\,{}^t\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u_i} \end{aligned}$$

Donc si $i \neq n$, ${}^t\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u_i} = 0$, la base duale est celle des vecteurs propres de ${}^tA$.

Méthode de déflation (suite)

En appliquant la méthode de la puissance itérée à B, on obtient λ_{n-1} et $\overrightarrow{u_{n-1}}$
Connaissant λ_n et $\overrightarrow{u_n}$ et A, comment trouver le vecteur de la base duale $\overrightarrow{v_n}$?

- Si A est symétrique, les vecteur propres sont orthogonaux donc $\overrightarrow{v_n} = \frac{\overrightarrow{u_n}}{{}^{t}\overrightarrow{u_n}\overrightarrow{u_n}}$.
- Sinon, considérons ${}^{t}A$,
  - Elle a les mêmes valeurs propres que A.
  - Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur propre associé à λ_n,

$$\begin{aligned} {}^{t}\overrightarrow{v}A\overrightarrow{u_i} &= ({}^{t}\overrightarrow{v}A)\,\overrightarrow{u_i} &&= \lambda_n {}^{t}\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u_i} \\ &= {}^{t}\overrightarrow{v}\,(A\overrightarrow{u_i}) &&= \lambda_i {}^{t}\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u_i} \end{aligned}$$

Donc si $i \neq n$, ${}^{t}\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u_i} = 0$, la base duale est celle des vecteurs propres de ${}^{t}A$.
Pour construire la matrice de déflation, il suffit donc de trouver un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de ${}^{t}A$.

Utilisation de la méthode

- La méthode de déflation permet de trouver toutes les valeurs propres de la matrice
  - Sans les connaître
  - En obtenant des vecteurs propres
- Il y a accumulation de l'erreur
  - La méthode de la puissance donne une approximation de la plus grande valeur propre et du vecteur propre.
  - La matrice B utilisée n'est pas exactement la bonne.
  - Il y a dégradation du résultat.

Méthode de la puissance inverse

Que faire si on recherche la valeur propre de plus petit module ?

Algorithme de la puissance inverse

Que faire si on recherche la valeur propre de plus petit module ?

Rq : Les valeurs propres de A^{-1} *sont les inverses des valeurs propres de* A

Algorithme de la puissance inverse

Que faire si on recherche la valeur propre de plus petit module ?

Rq : Les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A

Si A est inversible, on applique l'algorithme de la puissance itérée à A^{-1} :

Algorithme de la puissance inverse

Que faire si on recherche la valeur propre de plus petit module ?

Rq : Les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A

Si A est inversible, on applique l'algorithme de la puissance itérée à A^{-1} :

- On effectue la décomposition PLU de A : $PA = LU$

Algorithme de la puissance inverse

Que faire si on recherche la valeur propre de plus petit module ?

Rq : Les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A

Si A est inversible, on applique l'algorithme de la puissance itérée à A^{-1} :

- On effectue la décomposition PLU de A : $PA = LU$
- soit $\overrightarrow{b}_0$ le vecteur de départ,
- On construit les suites $\overrightarrow{b}_k$ et λ_k :

Algorithme de la puissance inverse

Que faire si on recherche la valeur propre de plus petit module ?

Rq : Les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A

Si A est inversible, on applique l'algorithme de la puissance itérée à A^{-1} :

- On effectue la décomposition PLU de A : $PA = LU$
- soit $\overrightarrow{b}_0$ le vecteur de départ,
- On construit les suites $\overrightarrow{b}_k$ et λ_k :
  - On résout le système $LU\overrightarrow{x}_{k+1} = P\overrightarrow{b}_k$

Algorithme de la puissance inverse

Que faire si on recherche la valeur propre de plus petit module ?

Rq : Les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A

Si A est inversible, on applique l'algorithme de la puissance itérée à A^{-1} :

- On effectue la décomposition PLU de A : $PA = LU$
- soit $\overrightarrow{b}_0$ le vecteur de départ,
- On construit les suites $\overrightarrow{b}_k$ et λ_k :
  - On résout le système $LU\overrightarrow{x}_{k+1} = P\overrightarrow{b}_k$
  - On pose :

$$\overrightarrow{b}_k = \qquad \text{et} \qquad \lambda_k =$$

Algorithme de la puissance inverse

Que faire si on recherche la valeur propre de plus petit module ?

Rq : Les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A

Si A est inversible, on applique l'algorithme de la puissance itérée à A^{-1} :

- On effectue la décomposition PLU de A : $PA = LU$
- soit $\overrightarrow{b}_0$ le vecteur de départ,
- On construit les suites $\overrightarrow{b}_k$ et λ_k :
  - On résout le système $LU\overrightarrow{x}_{k+1} = P\overrightarrow{b}_k$
  - On pose :

$$\overrightarrow{b}_k = \frac{\overrightarrow{x}_k}{\|\overrightarrow{x}_k\|} \quad \text{et} \quad \lambda_k =$$

Algorithme de la puissance inverse

Que faire si on recherche la valeur propre de plus petit module ?

Rq : Les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A

Si A est inversible, on applique l'algorithme de la puissance itérée à A^{-1} :

- On effectue la décomposition PLU de A : $PA = LU$
- soit $\overrightarrow{b}_0$ le vecteur de départ,
- On construit les suites $\overrightarrow{b}_k$ et λ_k :
  - On résout le système $LU\overrightarrow{x}_{k+1} = P\overrightarrow{b}_k$
  - On pose :

$$\overrightarrow{b}_k = \frac{\overrightarrow{x}_k}{\|\overrightarrow{x}_k\|} \qquad \text{et} \qquad \lambda_k = \frac{1}{{}^t\overrightarrow{x}_{k+1}\overrightarrow{b}_k}$$

Algorithme de la puissance inverse

Que faire si on recherche la valeur propre de plus petit module ?

Rq : Les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A

Si A est inversible, on applique l'algorithme de la puissance itérée à A^{-1} :

- On effectue la décomposition PLU de A : $PA = LU$
- soit $\overrightarrow{b}_0$ le vecteur de départ,
- On construit les suites $\overrightarrow{b}_k$ et λ_k :
  - On résout le système $LU\overrightarrow{x}_{k+1} = P\overrightarrow{b}_k$
  - On pose :

$$\overrightarrow{b}_k = \frac{\overrightarrow{x}_k}{\|\overrightarrow{x}_k\|} \quad \text{et} \quad \lambda_k = \frac{1}{{}^t\overrightarrow{x}_{k+1}\overrightarrow{b}_k}$$

- On s'arrête quand $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| < \varepsilon$

Algorithme de la puissance inverse

Que faire si on recherche la valeur propre de plus petit module ?

Rq : Les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A

Si A est inversible, on applique l'algorithme de la puissance itérée à A^{-1} :

- On effectue la décomposition PLU de A : $PA = LU$
- soit $\overrightarrow{b}_0$ le vecteur de départ,
- On construit les suites $\overrightarrow{b}_k$ et λ_k :
  - On résout le système $LU\overrightarrow{x}_{k+1} = P\overrightarrow{b}_k$
  - On pose :

$$\overrightarrow{b}_k = \frac{\overrightarrow{x}_k}{\|\overrightarrow{x}_k\|} \qquad \text{et} \qquad \lambda_k = \frac{1}{{}^t\overrightarrow{x}_{k+1}\overrightarrow{b}_k}$$

- On s'arrête quand $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| < \varepsilon$

La suite λ_k converge vers l'inverse de la plus grande valeur propre de A^{-1} donc vers la valeur propre de A de plus petit module.

Données : A, P, L, U tels que $PA = LU$, $\overrightarrow{x}_0$ et ε

début

$\overrightarrow{x} \leftarrow \overrightarrow{x}_0$

$\lambda_{anc} \leftarrow 1$

$\lambda \leftarrow 0$

tant que $|\lambda - \lambda_{anc}| > \varepsilon$ **faire**

$\lambda_{anc} \leftarrow \lambda$

$\overrightarrow{b} \leftarrow \dfrac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|}$

résoudre $LU\overrightarrow{x} = P\overrightarrow{b}$

$\lambda \leftarrow \dfrac{1}{{}^{t}\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{b}}$

retourner λ *et* $\overrightarrow{b}$

fin

Méthode de décalage

Quelles sont les valeurs propres de la matrice $A - \alpha I$?

Méthode de décalage

Quelles sont les valeurs propres de la matrice $A - \alpha I$? Si λ_i est valeur propre de A de vecteur propre $\overrightarrow{u}_i$,

$$\begin{aligned} (A - \alpha I)\overrightarrow{u}_i &= A\overrightarrow{u}_i - \alpha\overrightarrow{u}_i \\ &= \lambda_i\overrightarrow{u}_i - \alpha\overrightarrow{u}_i \\ &= (\lambda_i - \alpha)\overrightarrow{u}_i \end{aligned}$$

Méthode de décalage

Quelles sont les valeurs propres de la matrice $A - \alpha I$? Si λ_i est valeur propre de A de vecteur propre $\overrightarrow{u}_i$,

$$\begin{aligned}(A - \alpha I)\overrightarrow{u}_i &= A\overrightarrow{u}_i - \alpha\overrightarrow{u}_i \\ &= \lambda_i\overrightarrow{u}_i - \alpha\overrightarrow{u}_i \\ &= (\lambda_i - \alpha)\overrightarrow{u}_i\end{aligned}$$

Que se passe-t-il si on applique à la matrice $A - \alpha I$

- la méthode de la puissance itérée ?

Méthode de décalage

Quelles sont les valeurs propres de la matrice $A - \alpha I$? Si λ_i est valeur propre de A de vecteur propre $\overrightarrow{u}_i$,

$$\begin{aligned}(A - \alpha I)\overrightarrow{u}_i &= A\overrightarrow{u}_i - \alpha\overrightarrow{u}_i \\ &= \lambda_i\overrightarrow{u}_i - \alpha\overrightarrow{u}_i \\ &= (\lambda_i - \alpha)\overrightarrow{u}_i\end{aligned}$$

Que se passe-t-il si on applique à la matrice $A - \alpha I$

- la méthode de la puissance itérée ?
  - On obtient la valeur propre $\lambda_k - \alpha$ de module maximum.
  - Cela permet d'accélérer le calcul d'une valeur propre.

Méthode de décalage

Quelles sont les valeurs propres de la matrice $A - \alpha I$? Si λ_i est valeur propre de A de vecteur propre $\overrightarrow{u}_i$,

$$\begin{aligned}(A - \alpha I)\overrightarrow{u}_i &= A\overrightarrow{u}_i - \alpha\overrightarrow{u}_i \\ &= \lambda_i\overrightarrow{u}_i - \alpha\overrightarrow{u}_i \\ &= (\lambda_i - \alpha)\overrightarrow{u}_i\end{aligned}$$

Que se passe-t-il si on applique à la matrice $A - \alpha I$

- la méthode de la puissance itérée ?
  - On obtient la valeur propre $\lambda_k - \alpha$ de module maximum.
  - Cela permet d'accélérer le calcul d'une valeur propre.
- la méthode de la puissance inverse ?

Méthode de décalage

Quelles sont les valeurs propres de la matrice $A - \alpha I$? Si λ_i est valeur propre de A de vecteur propre $\overrightarrow{u}_i$,

$$\begin{aligned}(A - \alpha I)\overrightarrow{u}_i &= A\overrightarrow{u}_i - \alpha\overrightarrow{u}_i \\ &= \lambda_i\overrightarrow{u}_i - \alpha\overrightarrow{u}_i \\ &= (\lambda_i - \alpha)\overrightarrow{u}_i\end{aligned}$$

Que se passe-t-il si on applique à la matrice $A - \alpha I$

- la méthode de la puissance itérée ?
  - On obtient la valeur propre $\lambda_k - \alpha$ de module maximum.
  - Cela permet d'accélérer le calcul d'une valeur propre.
- la méthode de la puissance inverse ?
  - Cela permet d'obtenir la valeur propre $\lambda_k - \alpha$ de module minimum
  - C'est la valeur propre la plus proche de α

    $\Rightarrow$*C'est un moyen d'améliorer le calcul d'une valeur propre et d'obtenir un vecteur propre correspondant à cette valeur*

Exemple d'utilisation

Supposons qu'un premier calcul est fourni une approximation d'une valeur propre : α.

Données : A, α, $\overrightarrow{x}_0$ et ε

début

$\overrightarrow{x} \leftarrow \overrightarrow{x}_0$

$\lambda_{anc} \leftarrow 0$

$\lambda \leftarrow \alpha$

tant que $|\lambda - \lambda_{anc}| > \varepsilon$ **faire**

$\lambda_{anc} \leftarrow \lambda$

$\overrightarrow{b} \leftarrow \frac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|}$

résoudre $(A - \alpha I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$

$\lambda \leftarrow \frac{1}{{}^t\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{b}}$

retourner λ *et* $\overrightarrow{b}$

fin

Cet algorithme améliore l'approximation et permet de calculer un vecteur propre associé à la valeur propre.

Méthode de décalage (fin)

Cette méthode permet

Méthode de décalage (fin)

Cette méthode permet

- de calculer un vecteur propre correspondant à une valeur propre connue approximativement
- d'améliorer la précision de la valeur propre.

Méthode de décalage (fin)

Cette méthode permet

- de calculer un vecteur propre correspondant à une valeur propre connue approximativement
- d'améliorer la précision de la valeur propre.
- Avantages :
  - Convergence plus rapide
  - Permet de s'approcher indéfiniment d'une valeur et d'un vecteur propre

Méthode de décalage (fin)

Cette méthode permet

- de calculer un vecteur propre correspondant à une valeur propre connue approximativement
- d'améliorer la précision de la valeur propre.
- Avantages :
  - Convergence plus rapide
  - Permet de s'approcher indéfiniment d'une valeur et d'un vecteur propre
- Inconvénients :
  - Utilisation d'un système linéaire presque singulier
  - Peut converger vers une autre valeur propre.

Conditions de convergence

Plusieurs conditions sont nécessaires pour que la méthode fonctionne :

Plusieurs conditions sont nécessaires pour que la méthode fonctionne :

- A est une matrice de dimension n possédant n valeurs propres de modules différents $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$

  $\Longrightarrow$ *A est diagonalisable*

Plusieurs conditions sont nécessaires pour que la méthode fonctionne :

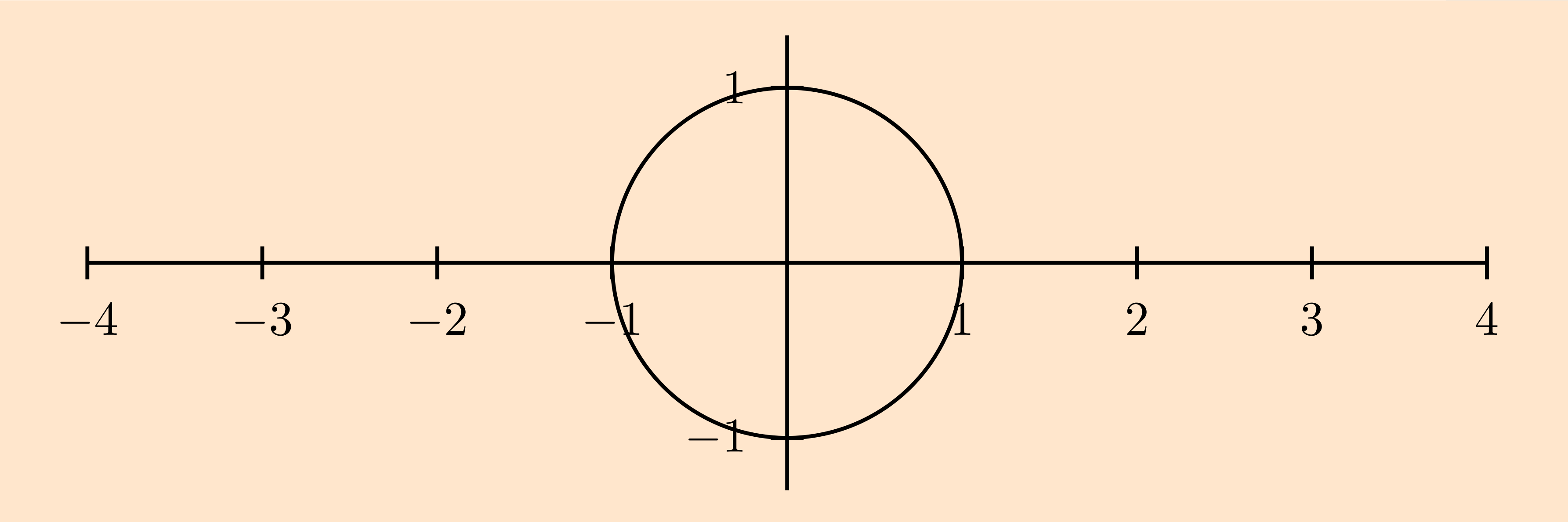
- A est une matrice de dimension n possédant n valeurs propres de modules différents $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$
  $\Longrightarrow$ *A est diagonalisable*

- Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ les vecteurs propres associés aux valeurs propres de A. On doit partir d'un vecteur $\vec{x}_0$

$$\vec{x}_0 = a_1 \vec{u}_1 + \cdots + a_n \vec{u}_n$$

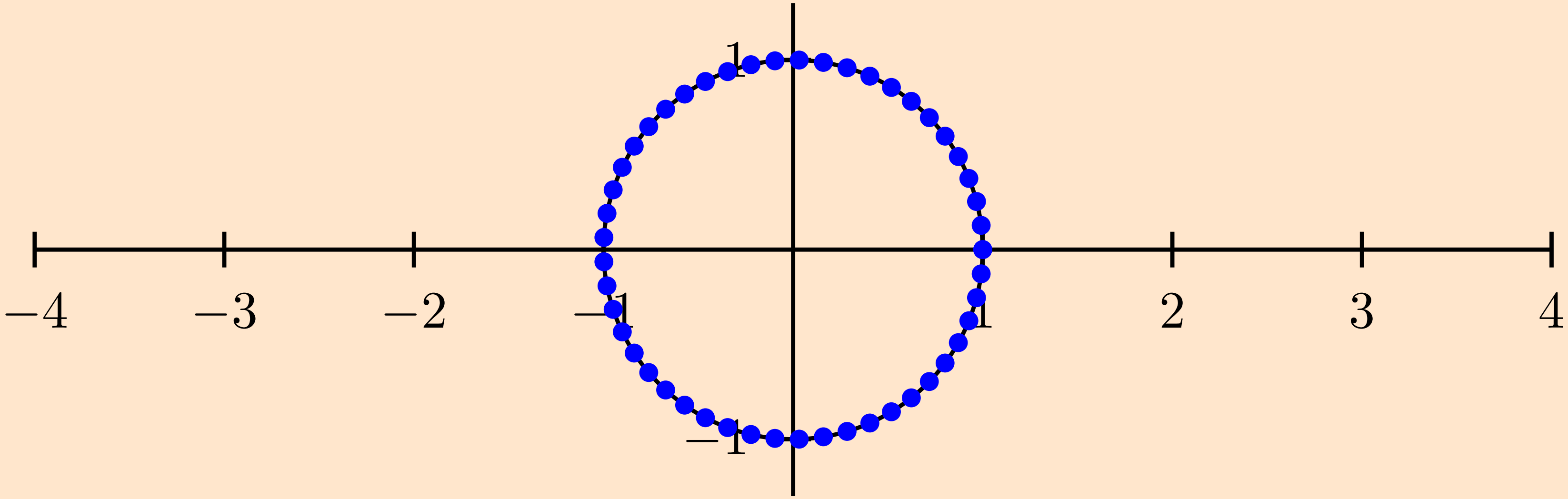
où $\underline{\mathbf{a_n \neq 0}}$

Que se passe-t-il si $a_n = 0$?



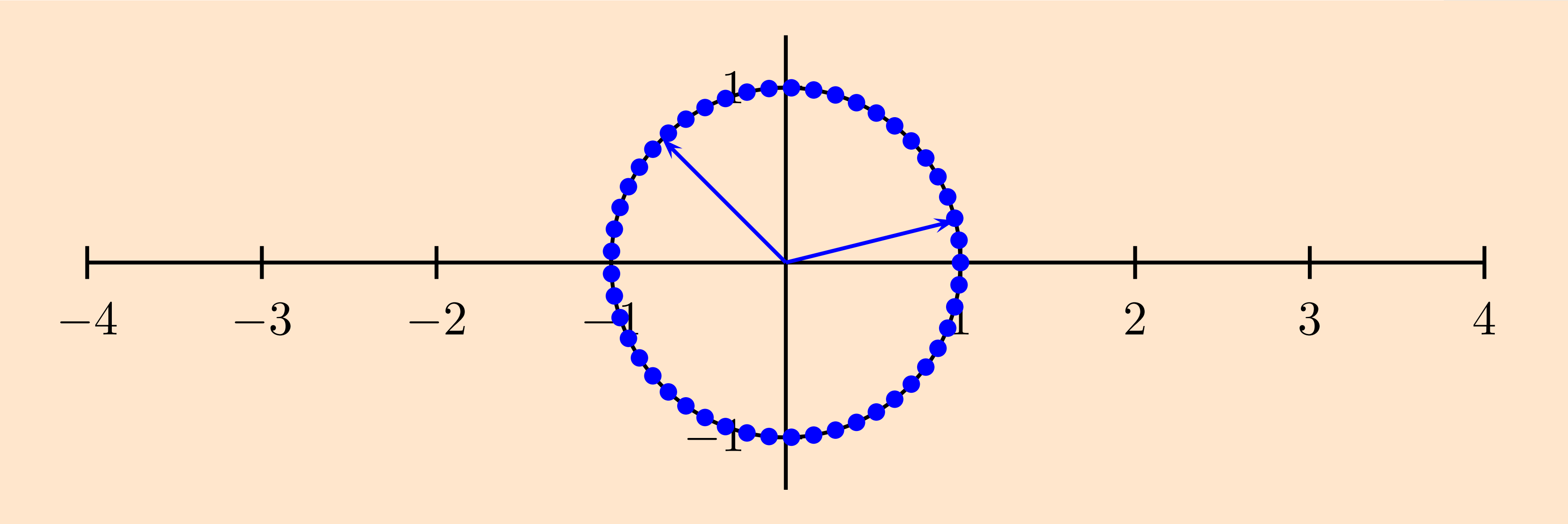
matrice $A = \begin{pmatrix} 2,72 & 1,12 \\ 0,28 & 1,88 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs propres sont :

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 3
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 1.6



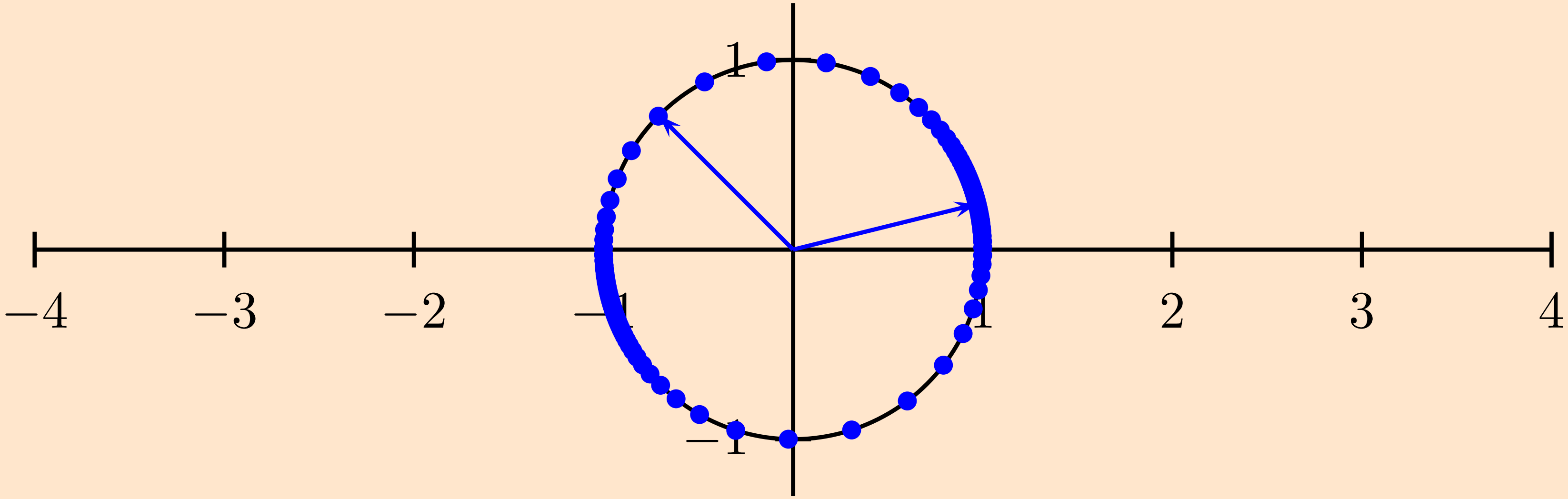
matrice $A = \begin{pmatrix} 2,72 & 1,12 \\ 0,28 & 1,88 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs propres sont :

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 3
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 1.6



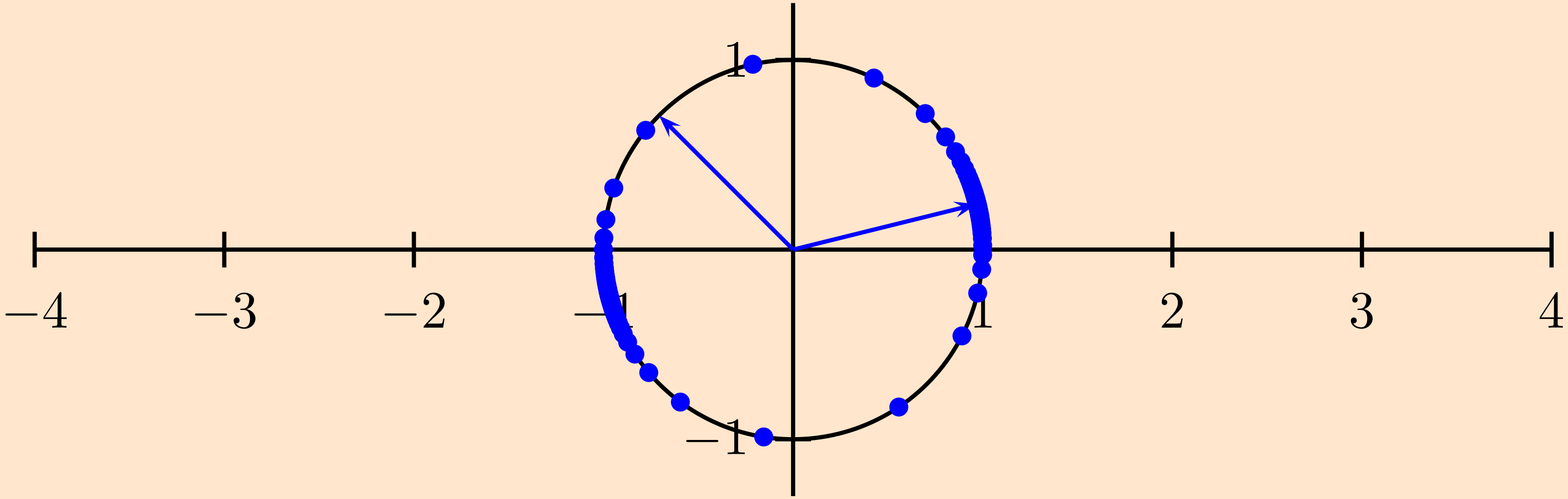
matrice $A = \begin{pmatrix} 2,72 & 1,12 \\ 0,28 & 1,88 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs propres sont :

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 3
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 1.6



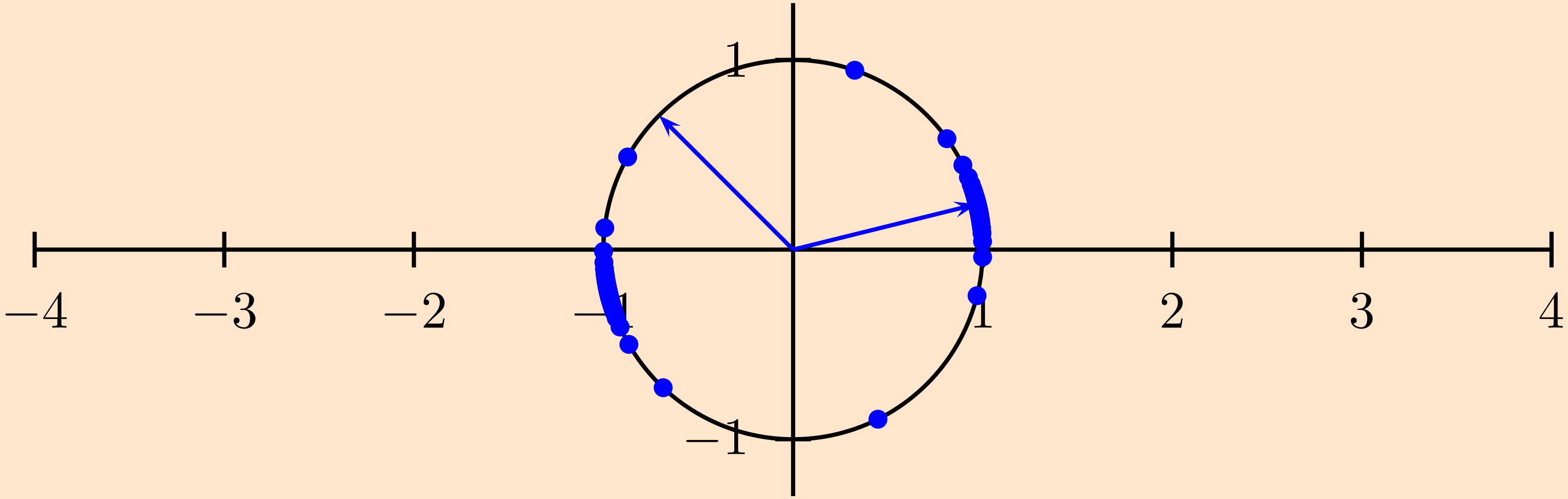
matrice $A = \begin{pmatrix} 2,72 & 1,12 \\ 0,28 & 1,88 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs propres sont :

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 3
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 1.6



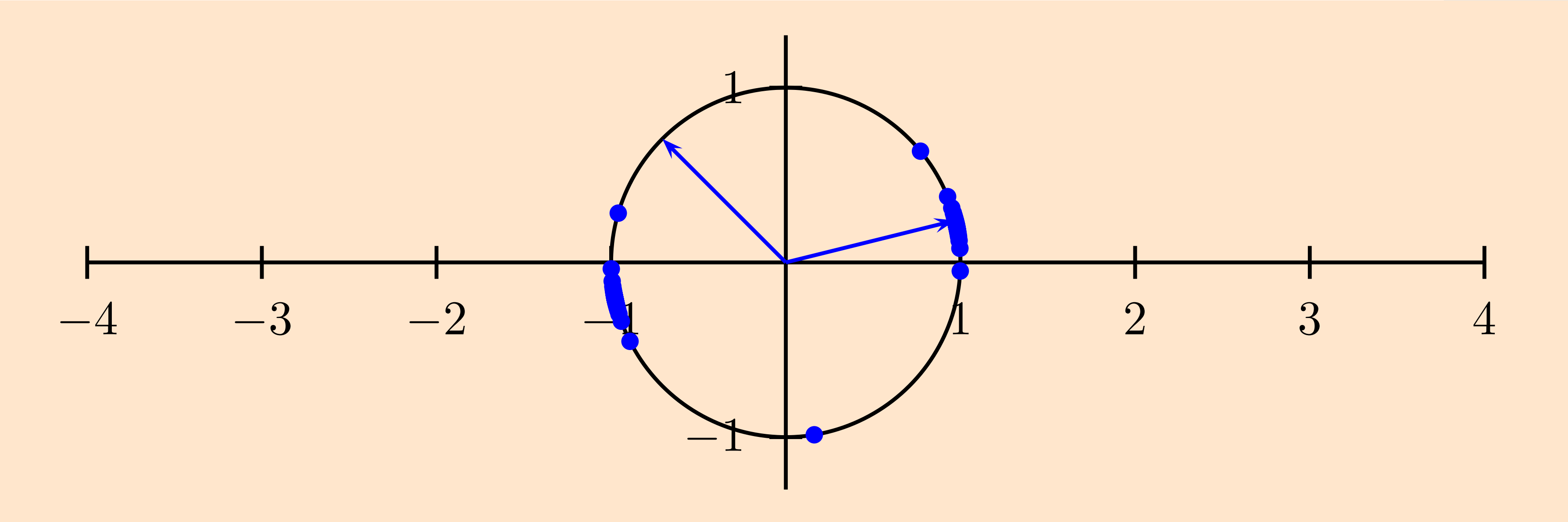
matrice $A = \begin{pmatrix} 2,72 & 1,12 \\ 0,28 & 1,88 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs propres sont :

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 3
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 1.6



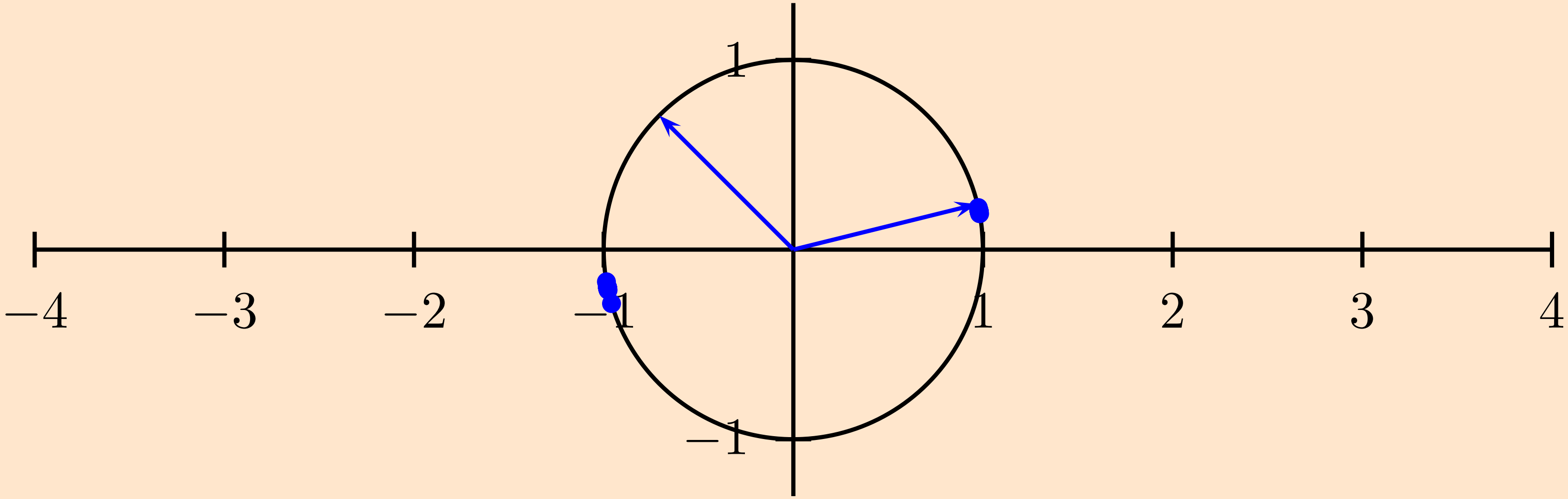
matrice $A = \begin{pmatrix} 2,72 & 1,12 \\ 0,28 & 1,88 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs propres sont :

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 3
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 1.6



matrice $A = \begin{pmatrix} 2,72 & 1,12 \\ 0,28 & 1,88 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs propres sont :

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 3
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 1.6



matrice $A = \begin{pmatrix} 2,72 & 1,12 \\ 0,28 & 1,88 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs propres sont :

- $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 3
- $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 1.6

Si on part du point de départ

$$\overrightarrow{x}_0 = a_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + a_{n-1} \overrightarrow{u}_{n-1} + 0 \overrightarrow{u}_n$$

Si on part du point de départ

$$\vec{x}_0 = a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_{n-1}\vec{u}_{n-1} + 0\vec{u}_n$$

- Lorsqu'on calcule le premier terme

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= A\vec{x}_0 \\ &= \lambda_1 a_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_{n-1}a_{n-1}\vec{u}_{n-1} + 0\vec{u}_n\end{aligned}$$

Si on part du point de départ

$$\vec{x}_0 = a_1 \vec{u}_1 + \cdots + a_{n-1} \vec{u}_{n-1} + 0 \vec{u}_n$$

- Lorsqu'on calcule le premier terme

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= A \vec{x}_0 \\ &= \lambda_1 a_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_{n-1} a_{n-1} \vec{u}_{n-1} + 0 \vec{u}_n \end{aligned}$$

à cause des erreurs de calcul, on obtient en fait

si $a_n = 0$

Si on part du point de départ

$$\vec{x}_0 = a_1 \vec{u}_1 + \cdots + a_{n-1} \vec{u}_{n-1} + 0 \vec{u}_n$$

- Lorsqu'on calcule le premier terme

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= A \vec{x}_0 \\ &= \lambda_1 a_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_{n-1} a_{n-1} \vec{u}_{n-1} + 0 \vec{u}_n \end{aligned}$$

à cause des erreurs de calcul, on obtient en fait

$$\widetilde{\vec{x}_1} = \widetilde{\lambda_1 a_1} \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_{n-\widetilde{1 a_{n-1}}} \vec{u}_{n-1}$$

si $a_n = 0$

Si on part du point de départ

$$\overrightarrow{x}_0 = a_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + a_{n-1}\overrightarrow{u}_{n-1} + 0\overrightarrow{u}_n$$

- Lorsqu'on calcule le premier terme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}_1 &= A\overrightarrow{x}_0 \\ &= \lambda_1 a_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + \lambda_{n-1}a_{n-1}\overrightarrow{u}_{n-1} + 0\overrightarrow{u}_n\end{aligned}$$

à cause des erreurs de calcul, on obtient en fait

$$\widetilde{\overrightarrow{x}_1} = \widetilde{\lambda_1 a_1}\overrightarrow{u}_1 + \cdots + \widetilde{\lambda_{n-1}a_{n-1}}\overrightarrow{u}_{n-1} + \varepsilon\overrightarrow{u}_n$$

si $a_n = 0$

Si on part du point de départ

$$\overrightarrow{x}_0 = a_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + a_{n-1} \overrightarrow{u}_{n-1} + 0 \overrightarrow{u}_n$$

- Lorsqu'on calcule le premier terme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x}_1 &= A \overrightarrow{x}_0 \\ &= \lambda_1 a_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \lambda_{n-1} a_{n-1} \overrightarrow{u}_{n-1} + 0 \overrightarrow{u}_n \end{aligned}$$

à cause des erreurs de calcul, on obtient en fait

$$\widetilde{\overrightarrow{x}_1} = \widetilde{\lambda_1 a_1} \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \widetilde{\lambda_{n-1} a_{n-1}} \overrightarrow{u}_{n-1} + \varepsilon \overrightarrow{u}_n$$

- Si λ_n est beaucoup plus grande que les autres valeurs propres, les calculs suivants font ressortir le coefficient associé à $\overrightarrow{u}_n$ alors qu'ils annulent les autres.

si $a_n = 0$

Si on part du point de départ

$$\overrightarrow{x}_0 = a_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + a_{n-1}\overrightarrow{u}_{n-1} + 0\overrightarrow{u}_n$$

- Lorsqu'on calcule le premier terme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}_1 &= A\overrightarrow{x}_0 \\ &= \lambda_1 a_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + \lambda_{n-1}a_{n-1}\overrightarrow{u}_{n-1} + 0\overrightarrow{u}_n\end{aligned}$$

à cause des erreurs de calcul, on obtient en fait

$$\widetilde{\overrightarrow{x}_1} = \widetilde{\lambda_1 a_1}\overrightarrow{u}_1 + \cdots + \widetilde{\lambda_{n-1}a_{n-1}}\overrightarrow{u}_{n-1} + \varepsilon\overrightarrow{u}_n$$

- Si λ_n est beaucoup plus grande que les autres valeurs propres, les calculs suivants font ressortir le coefficient associé à $\overrightarrow{u}_n$ alors qu'ils annulent les autres.
- Donc l'algorithme nous donne toujours $\overrightarrow{u}_n$ et λ_n grâce aux erreurs de calcul.

si $a_n = 0$ (suite)

- Si les deux plus grandes valeurs propres λ_n et λ_{n-1} sont proches l'une de l'autre,

si $a_n = 0$ (suite)

- Si les deux plus grandes valeurs propres λ_n et λ_{n-1} sont proches l'une de l'autre,
- l'algorithme peut s'arrêter en obtenant λ_{n-1} et $\overrightarrow{u}_{n-1}$ au lieu de λ_n et $\overrightarrow{u}_n$.

Polytech'Paris-UPMC

- Si les deux plus grandes valeurs propres λ_n et λ_{n-1} sont proches l'une de l'autre,
- l'algorithme peut s'arrêter en obtenant λ_{n-1} et $\overrightarrow{u}_{n-1}$ au lieu de λ_n et $\overrightarrow{u}_n$.

Si on généralise le phénomène en utilisant la méthode de déflation, cela signifie que les valeurs propres qui sont proches les unes des autres ne sont pas forcément obtenues dans le bon ordre.

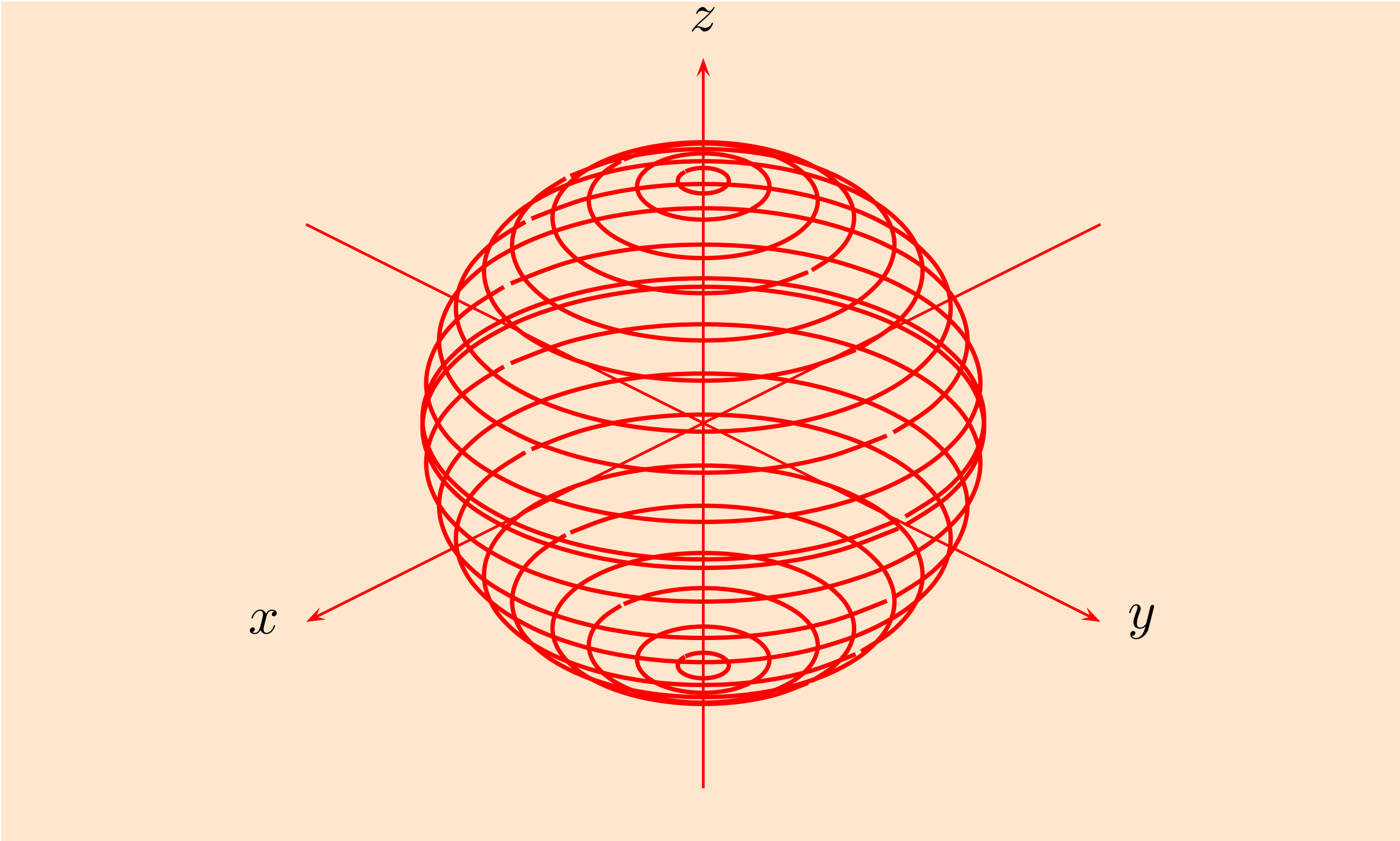
Autres conditions de convergences

Jusqu'à présent on a considéré que les valeurs propres de la matrice A ont des modules différents. Mais que se passe-t-il si :

- A possède une valeur propre dégénérée
  - Un espace propre de dimension > 1
  - A n'est pas diagonalisable
- A possède des valeurs propres différentes mais de module identique
  - Valeurs propres réelles de signes différents
  - Valeurs propres complexes conjuguées
  - Plusieurs valeurs propres complexes de même module

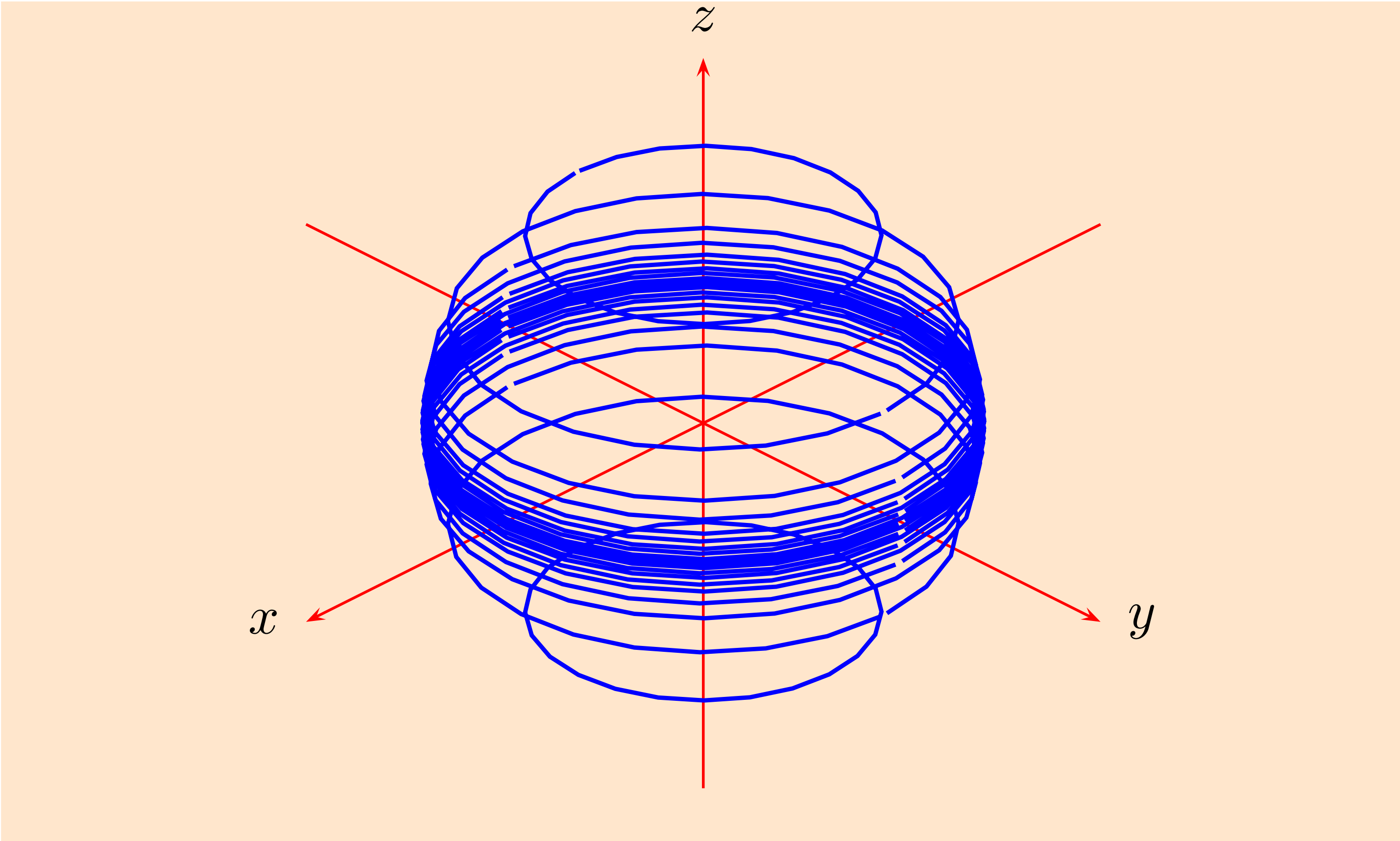
Polytech'Paris-UPMC

Sous espace propre de dimension > 1



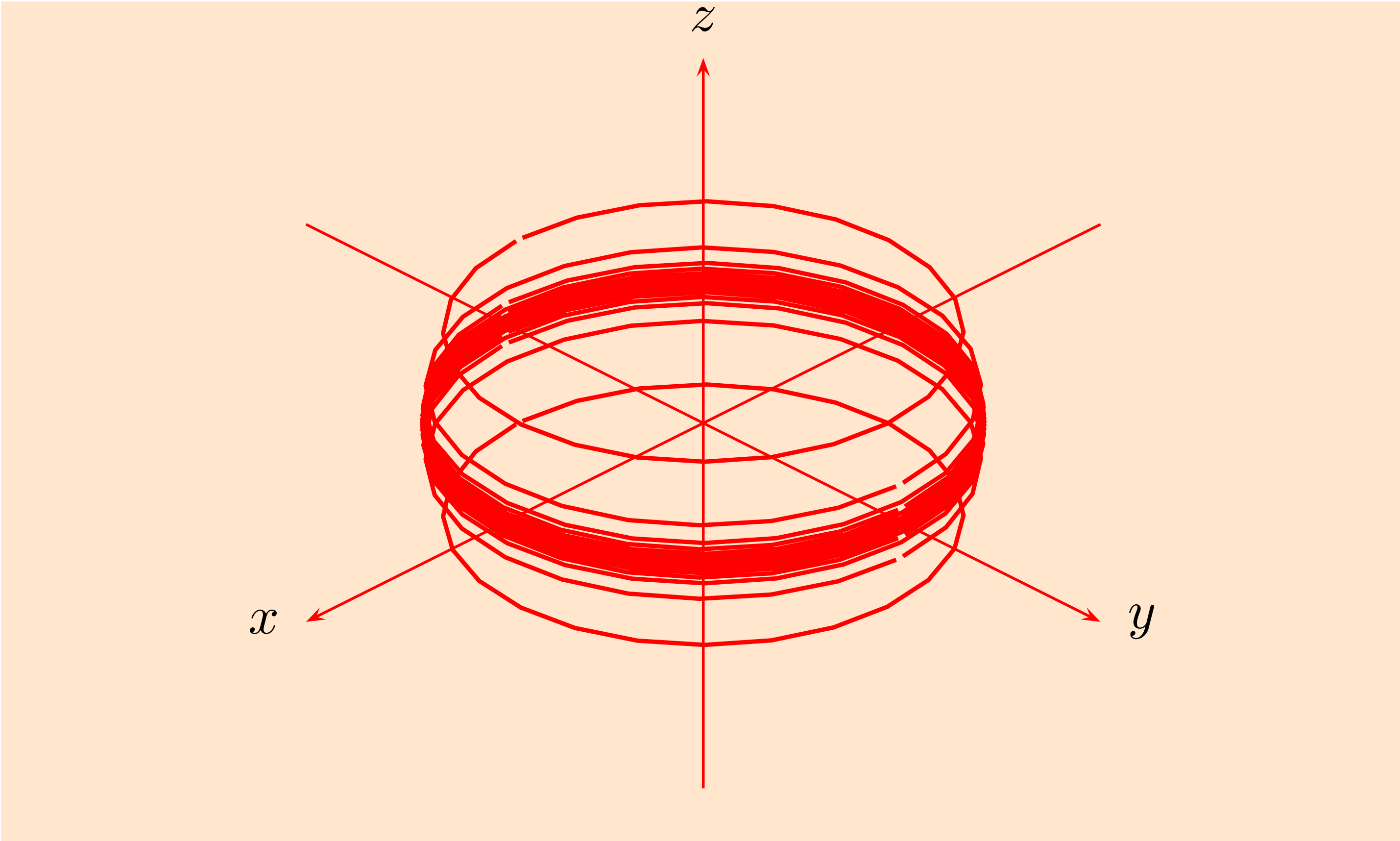
Matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $\dfrac{Ax}{\|Ax\|}$

Sous espace propre de dimension > 1



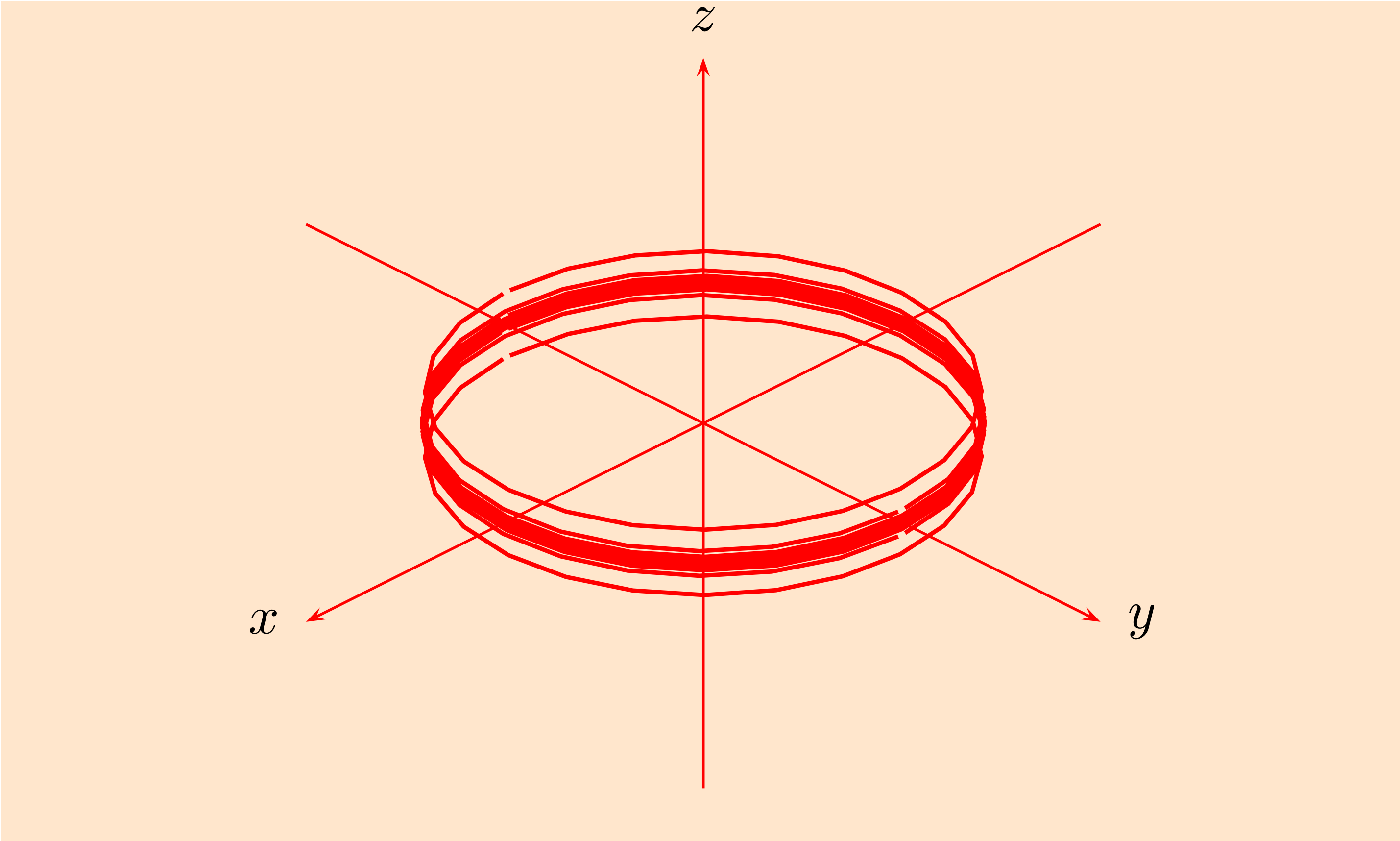
Matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $\dfrac{Ax}{\|Ax\|}$

Sous espace propre de dimension > 1



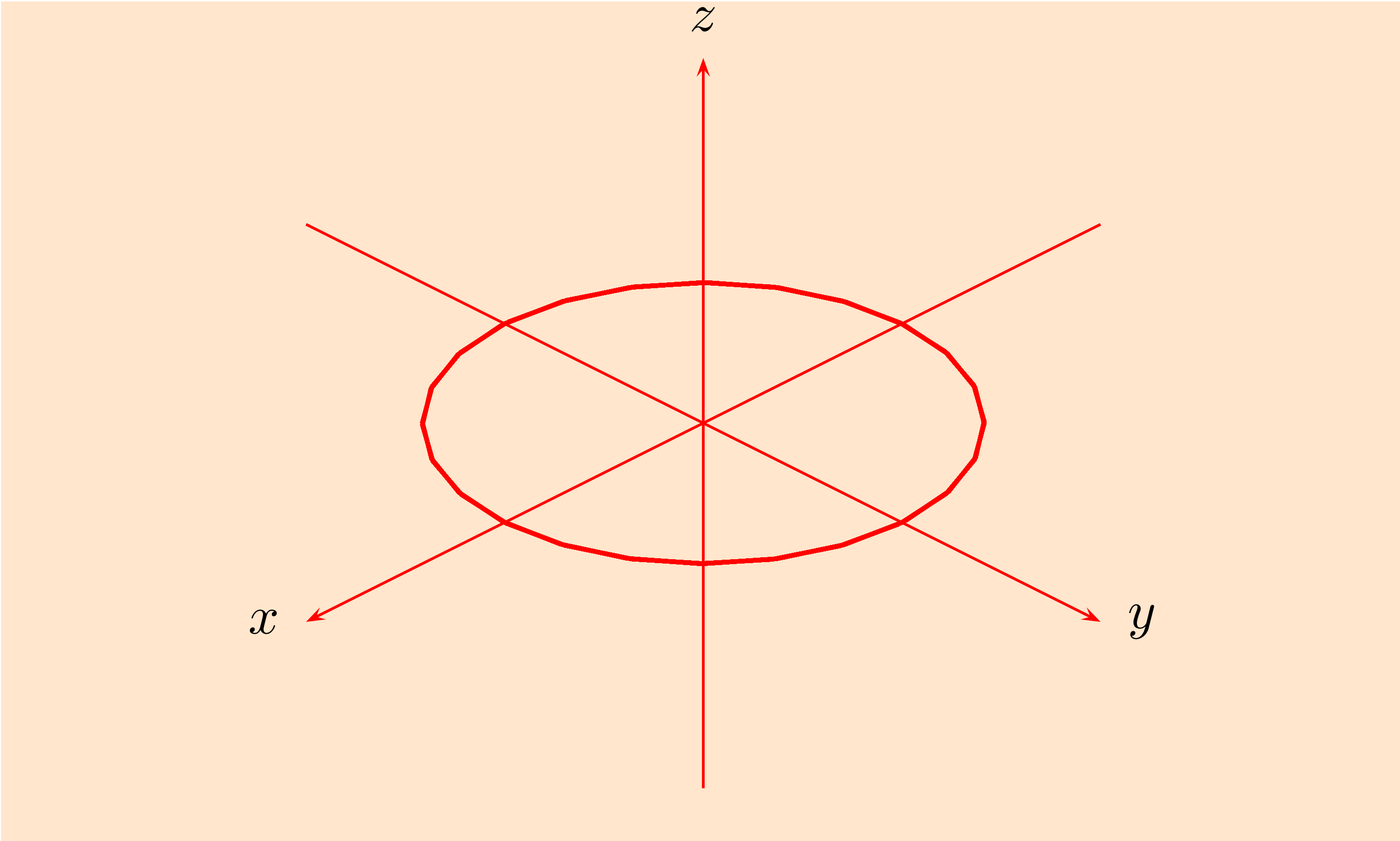
Matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $\dfrac{Ax}{\|Ax\|}$

Sous espace propre de dimension > 1



Matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $\dfrac{Ax}{\|Ax\|}$

Sous espace propre de dimension > 1



Matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $\dfrac{Ax}{\|Ax\|}$

Sous espace propre de dimension > 1

La suite $\overrightarrow{x}_k$ tend vers

Sous espace propre de dimension > 1

La suite $\vec{x}_k$ tend vers *un* vecteur du sous espace propre

Sous espace propre de dimension > 1

La suite $\overrightarrow{x}_k$ tend vers *un* vecteur du sous espace propre

- Soit λ la valeur propre de plus grand module et d la dimension de son sous espace propre.
- Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-d}$ les autres valeurs propres et $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{n-d}$ les vecteurs propres associés
- En reprenant le raisonnement précédant

$$\overrightarrow{x}_0 = a_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + a_{n-d} \overrightarrow{u}_{n-d} + \overrightarrow{u}$$

où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de valeur propre λ

La suite $\overrightarrow{x}_k$ tend vers *un* vecteur du sous espace propre

- Soit λ la valeur propre de plus grand module et d la dimension de son sous espace propre.
- Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-d}$ les autres valeurs propres et $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{n-d}$ les vecteurs propres associés
- En reprenant le raisonnement précédant

$$\overrightarrow{x}_0 = a_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + a_{n-d} \overrightarrow{u}_{n-d} + \overrightarrow{u}$$

où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de valeur propre λ

- On calcule la suite $\overrightarrow{x}_{k+1} = A \overrightarrow{x}_k$

  c'est à dire

Sous espace propre de dimension > 1

La suite $\overrightarrow{x}_k$ tend vers *un* vecteur du sous espace propre

- Soit λ la valeur propre de plus grand module et d la dimension de son sous espace propre.
- Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-d}$ les autres valeurs propres et $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{n-d}$ les vecteurs propres associés
- En reprenant le raisonnement précédant

$$\overrightarrow{x}_0 = a_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + a_{n-d}\overrightarrow{u}_{n-d} + \overrightarrow{u}$$

  où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de valeur propre λ
- On calcule la suite $\overrightarrow{x}_{k+1} = A\overrightarrow{x}_k$

  c'est à dire

$$\overrightarrow{x}_k = A^k\overrightarrow{u}_0$$

Polytech'Paris-UPMC

Sous espace propre de dimension > 1

La suite $\overrightarrow{x}_k$ tend vers *un* vecteur du sous espace propre

- Soit λ la valeur propre de plus grand module et d la dimension de son sous espace propre.
- Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-d}$ les autres valeurs propres et $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{n-d}$ les vecteurs propres associés
- En reprenant le raisonnement précédant

$$\overrightarrow{x}_0 = a_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + a_{n-d}\overrightarrow{u}_{n-d} + \overrightarrow{u}$$

  où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de valeur propre λ
- On calcule la suite $\overrightarrow{x}_{k+1} = A\overrightarrow{x}_k$

  c'est à dire

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}_k &= A^k\overrightarrow{u}_0 \\ \overrightarrow{x}_k &= \lambda_1^k a_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + \lambda_{n-d}^k a_{n-d}\overrightarrow{u}_{n-d} + \lambda^k\overrightarrow{u}\end{aligned}$$

Sous espace propre de dimension > 1

La suite $\overrightarrow{x}_k$ tend vers *un* vecteur du sous espace propre

- Soit λ la valeur propre de plus grand module et d la dimension de son sous espace propre.
- Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-d}$ les autres valeurs propres et $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_{n-d}$ les vecteurs propres associés
- En reprenant le raisonnement précédant

$$\overrightarrow{x}_0 = a_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + a_{n-d}\overrightarrow{u}_{n-d} + \overrightarrow{u}$$

où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de valeur propre λ

- On calcule la suite $\overrightarrow{x}_{k+1} = A\overrightarrow{x}_k$

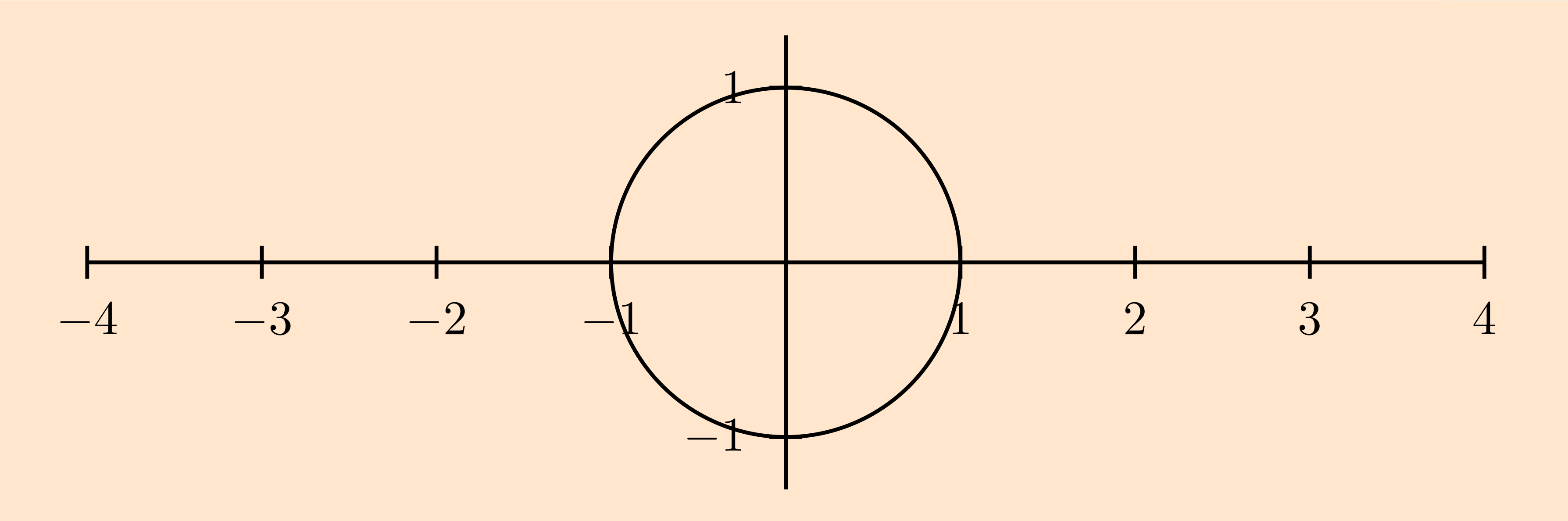
c'est à dire

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x}_k &= A^k\overrightarrow{u}_0 \\
\overrightarrow{x}_k &= \lambda_1^k a_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + \lambda_{n-d}^k a_{n-d}\overrightarrow{u}_{n-d} + \lambda^k\overrightarrow{u} \\
\overrightarrow{x}_k &= \lambda_n^k\left(\frac{\lambda_1^k}{\lambda_n^k}a_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + \frac{\lambda_{n-d}^k}{\lambda_n^k}a_{n-d}\overrightarrow{u}_{n-d} + \overrightarrow{u}\right)
\end{aligned}$$

Le terme prépondérant devient $\lambda_n^k \overrightarrow{u}$
Donc la suite normalisée $\frac{\overrightarrow{x}_k}{\|\overrightarrow{x}_n\|}$ tend vers *un* vecteur du sous espace propre

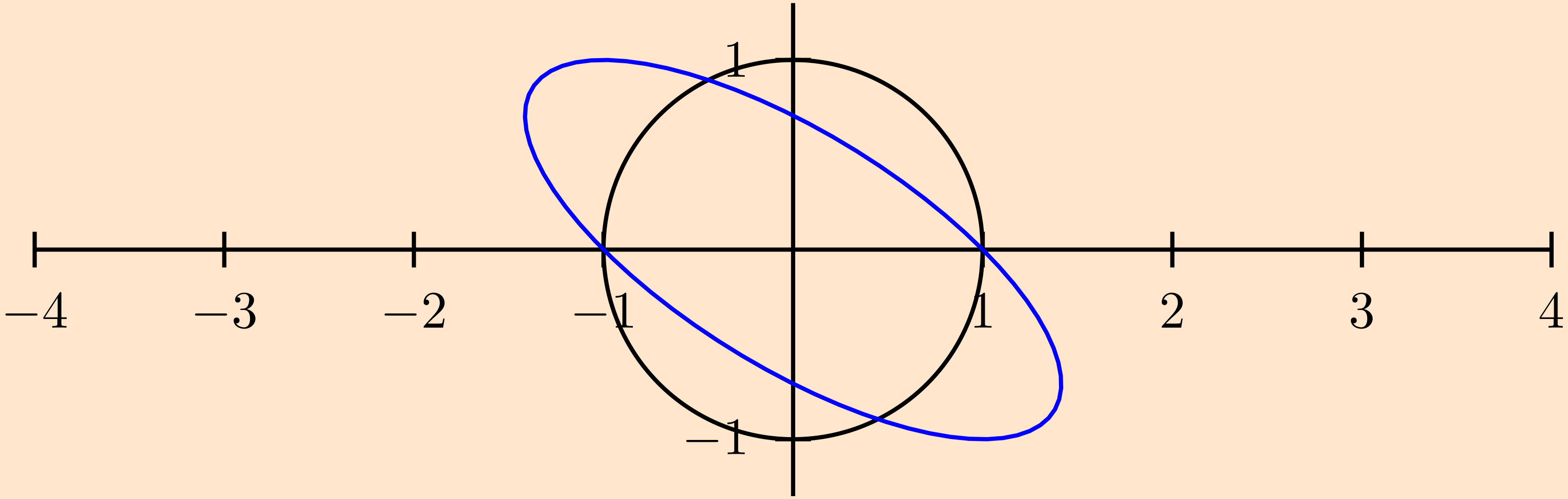
- Selon la valeur de $\overrightarrow{x}_0$ la suite $\frac{\overrightarrow{x}_k}{\|\overrightarrow{x}_k\|}$ tend vers différents vecteurs du sous espace vectoriel.
- Ce cas ne peut être détecté que si on calcule plusieurs fois la suite à partir de points de départ différents

A non diagonalisable



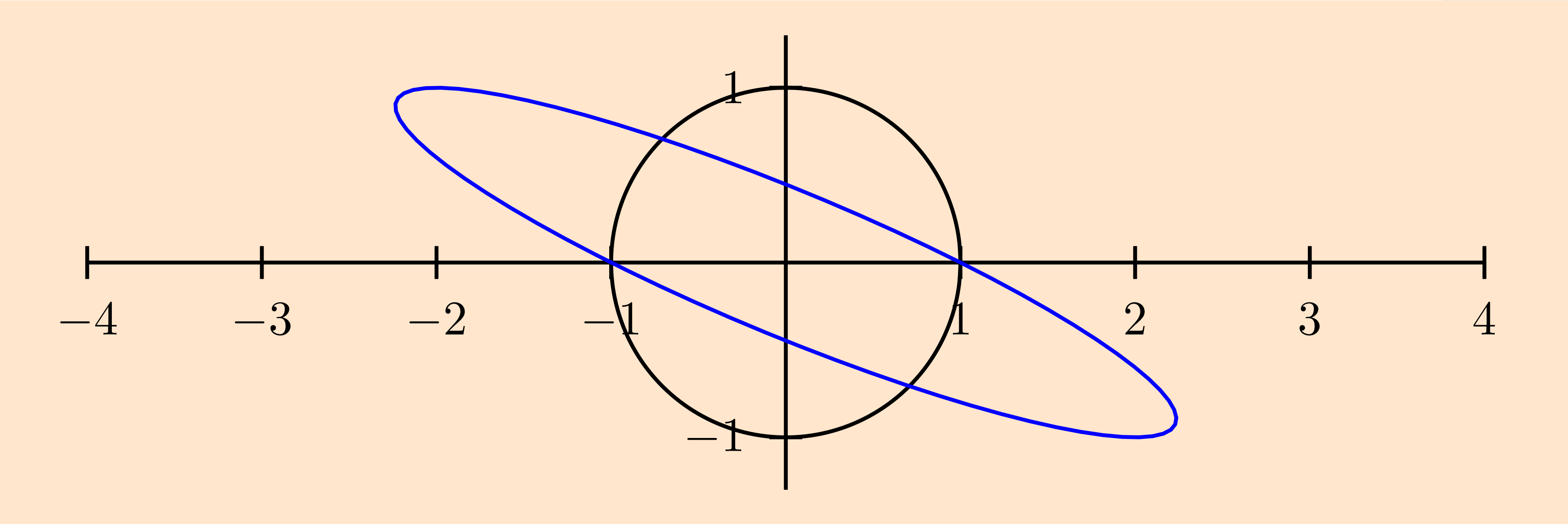
Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $A\overrightarrow{x}$

A non diagonalisable



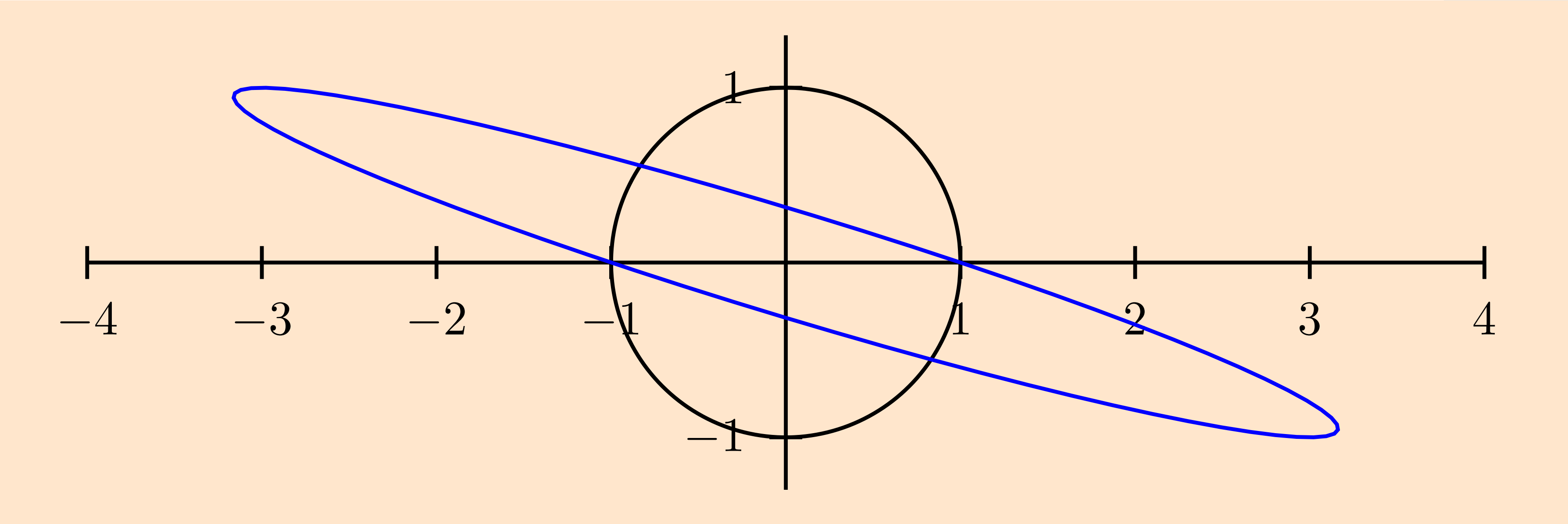
Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $A\overrightarrow{x}$

A non diagonalisable



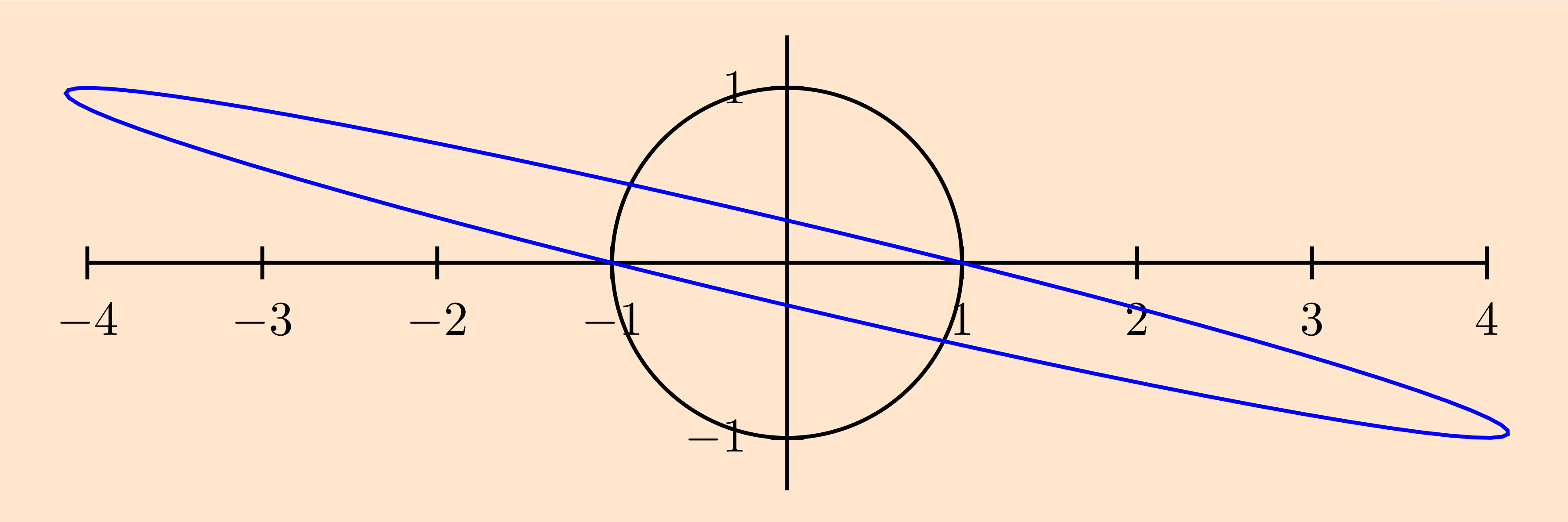
Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $A\overrightarrow{x}$

A non diagonalisable



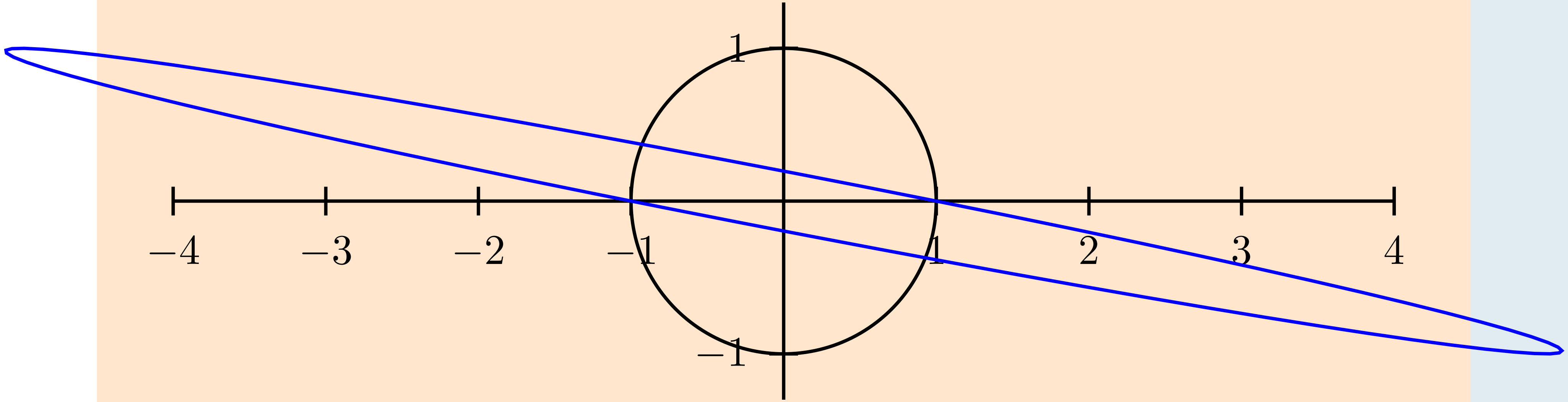
Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $A\overrightarrow{x}$

A non diagonalisable



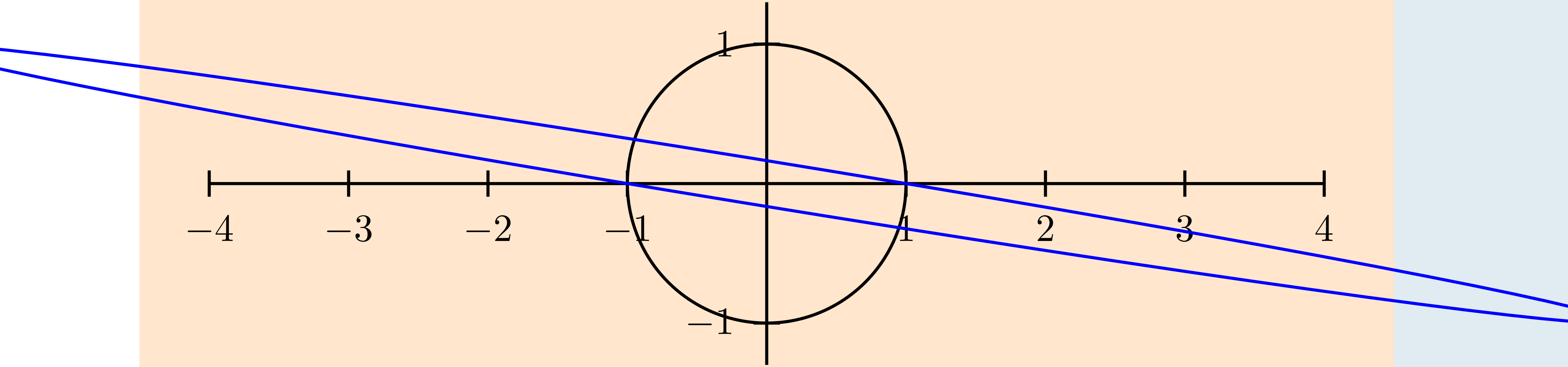
Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $A\overrightarrow{x}$

A non diagonalisable

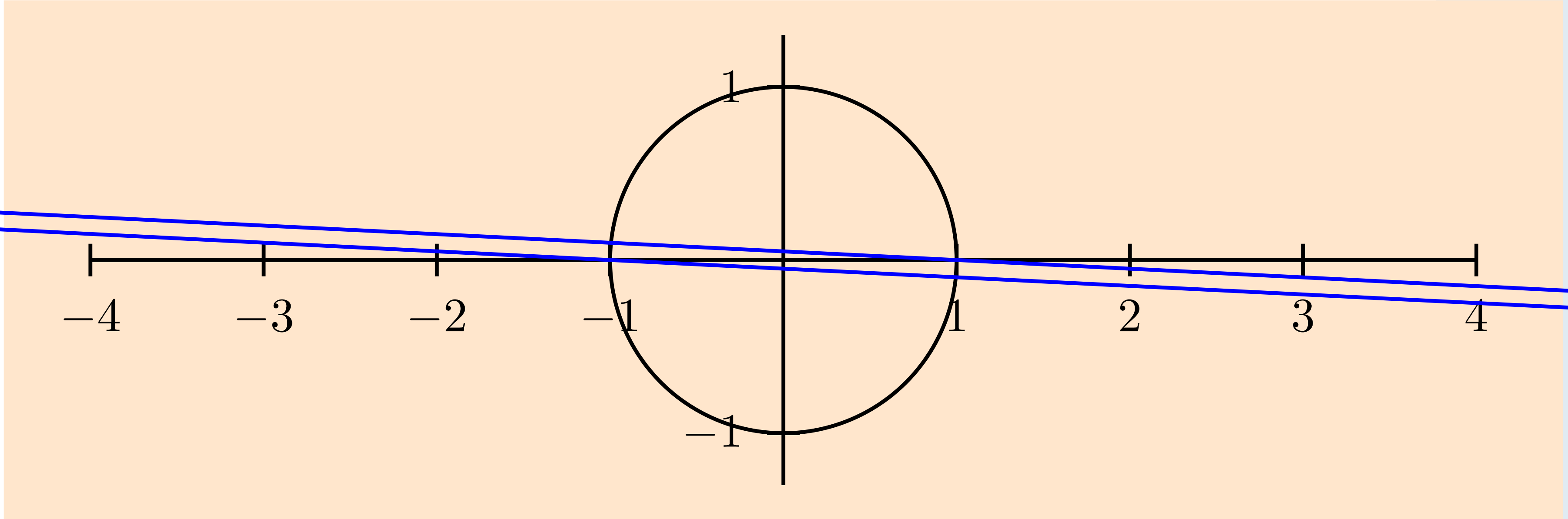


Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $A\overrightarrow{x}$

A non diagonalisable

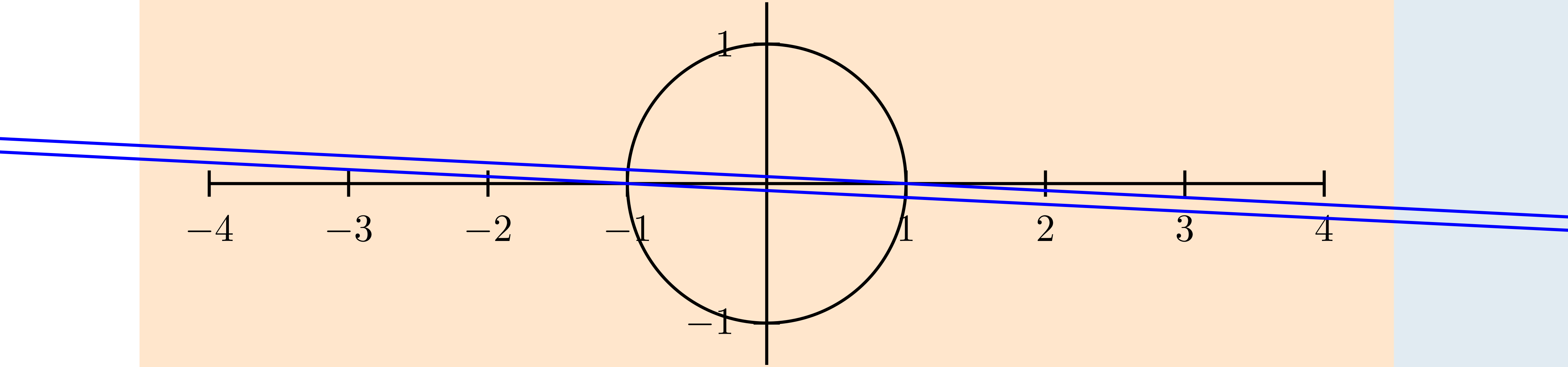


Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $A\overrightarrow{x}$



Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $A\overrightarrow{x}$

A non diagonalisable

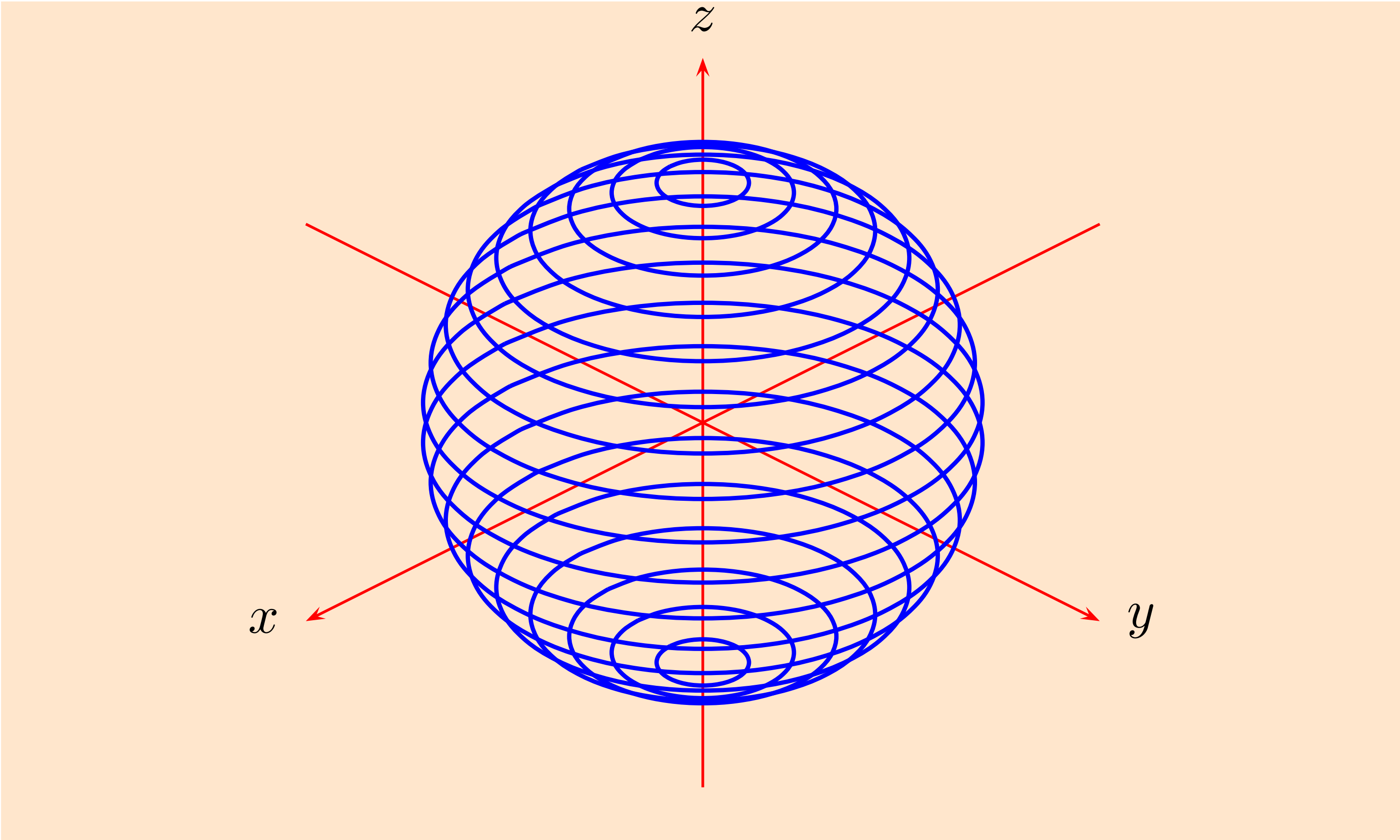


Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $A\overrightarrow{x}$

La suite $\frac{\overrightarrow{x}_k}{\|\overrightarrow{x}_k\|}$ converge vers un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre.

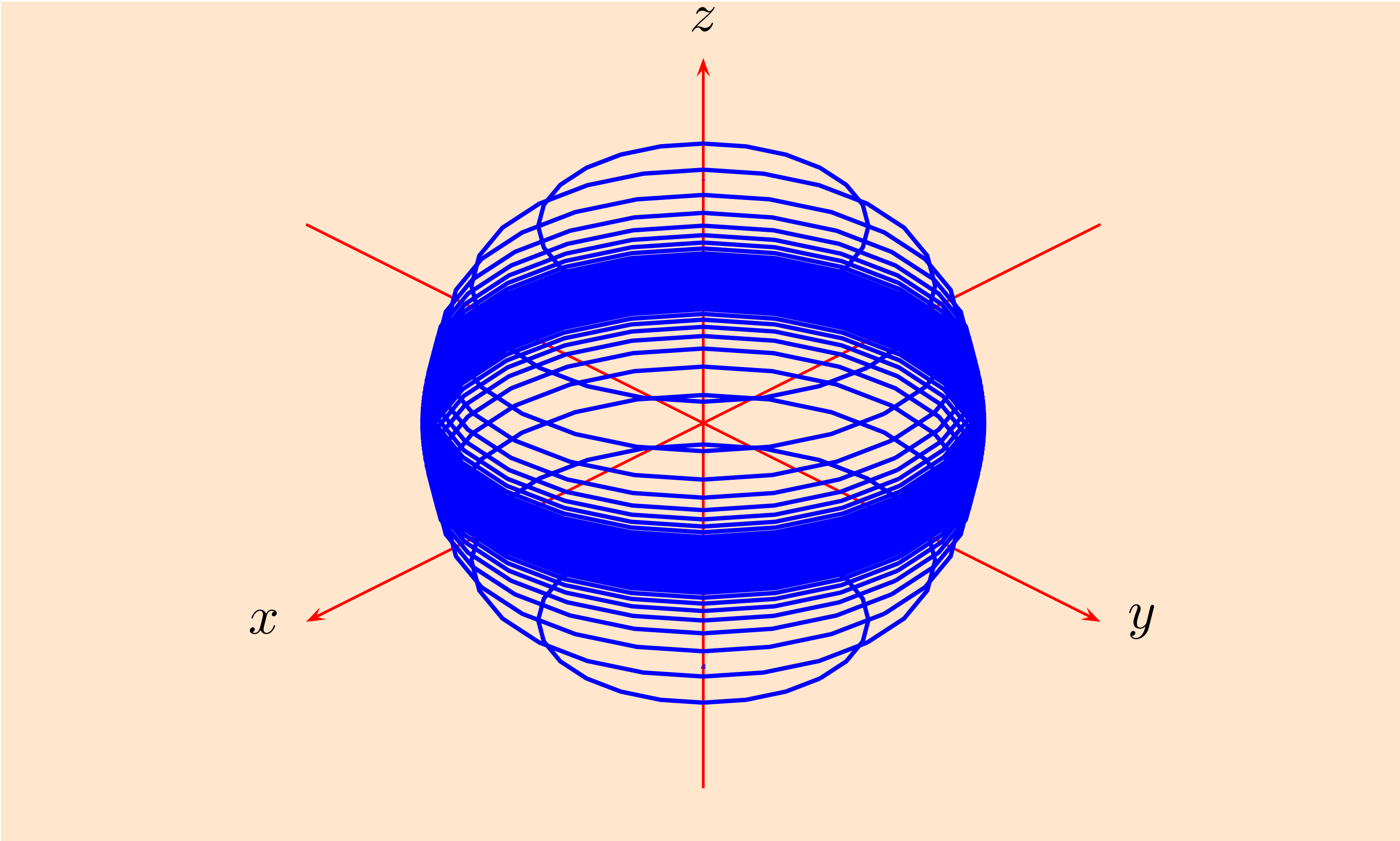
La preuve utilise la décomposition de Jordan.

Valeurs propres complexes conjuguées



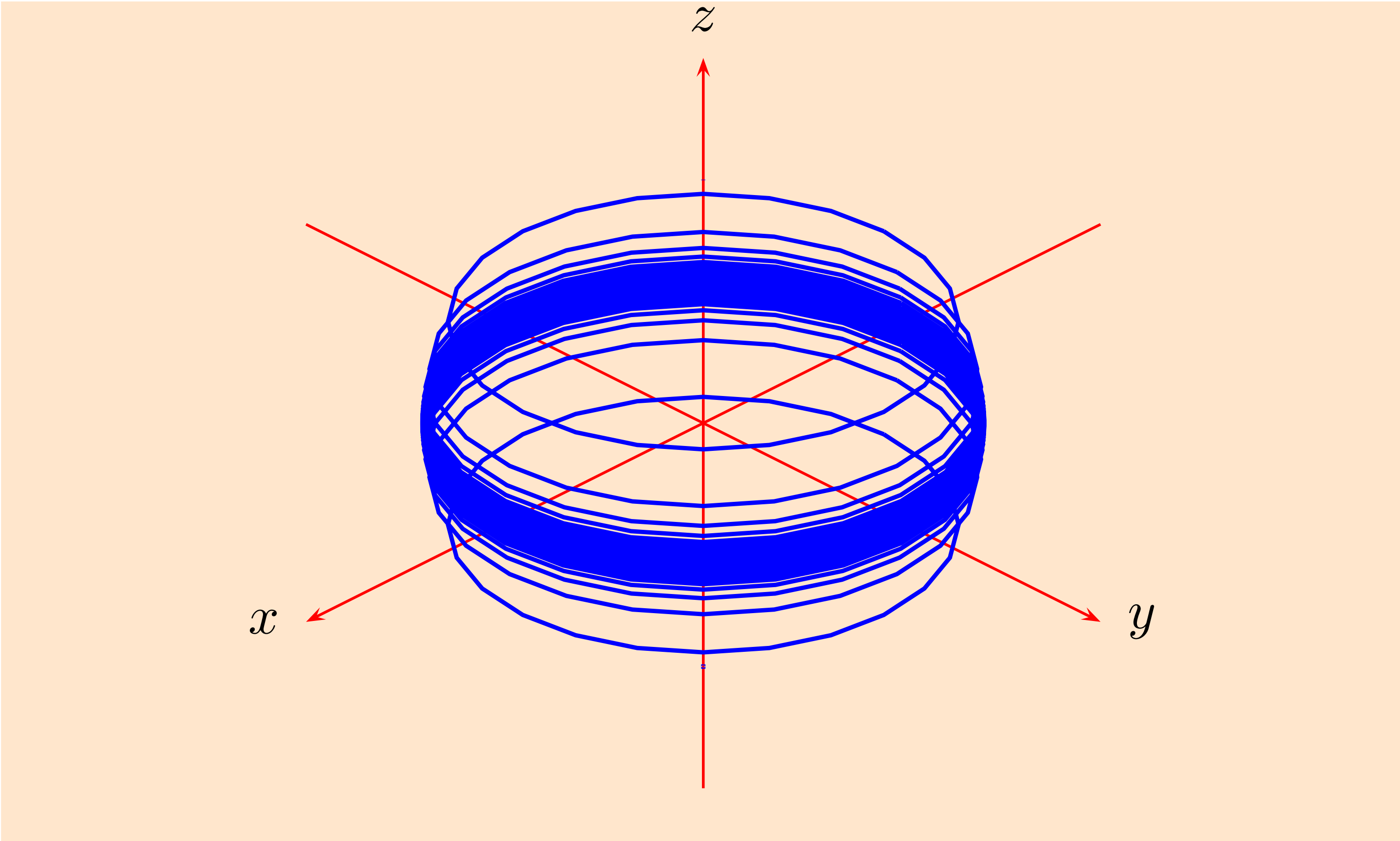
Matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $\dfrac{A\vec{x}}{\|A\vec{x}\|}$

Valeurs propres complexes conjuguées



Matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $\dfrac{A\vec{x}}{\|A\vec{x}\|}$

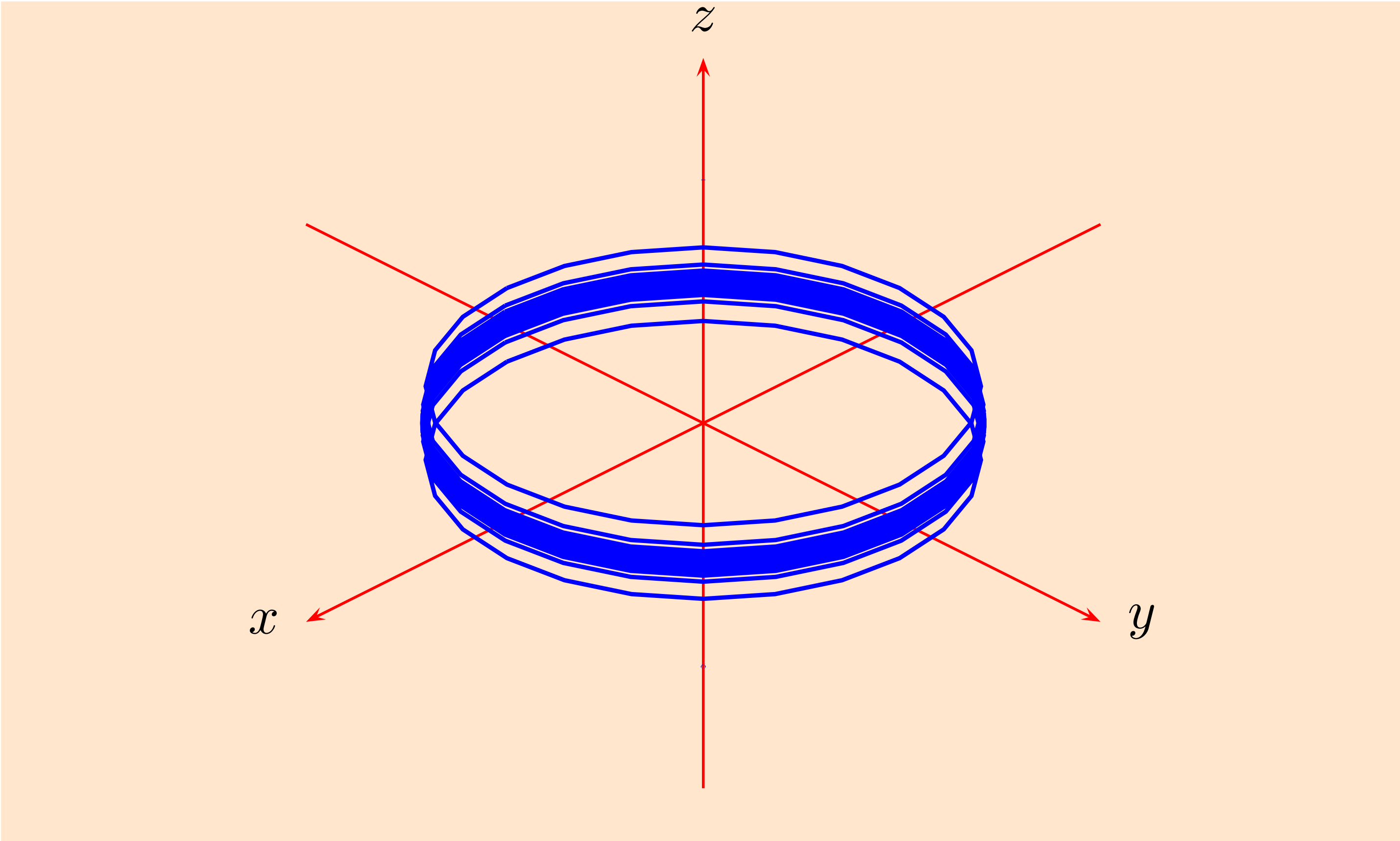
Valeurs propres complexes conjuguées



Matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $\dfrac{A\vec{x}}{\|A\vec{x}\|}$

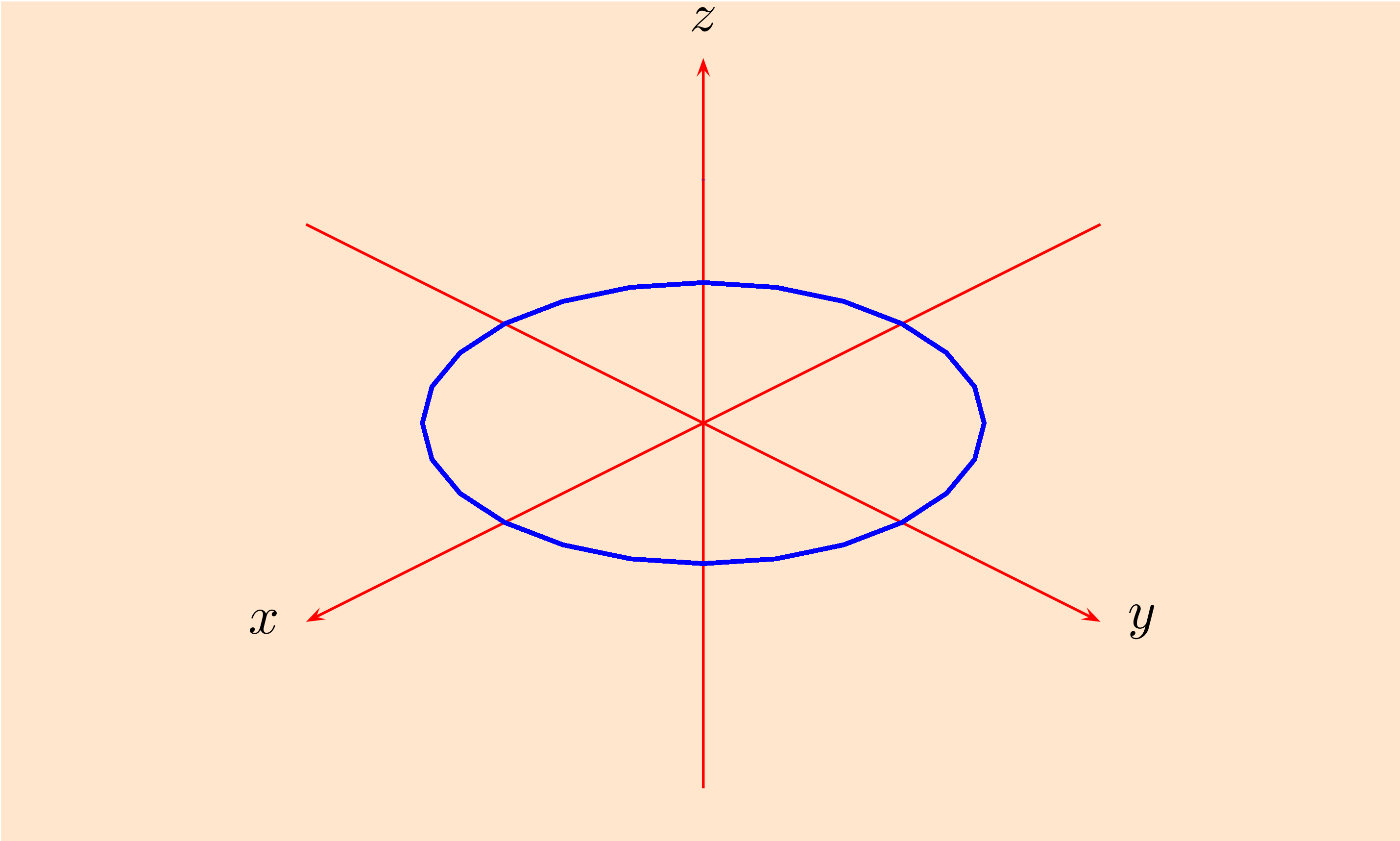
Polytech'Paris-UPMC

Valeurs propres complexes conjuguées



Matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $\dfrac{A\vec{x}}{\|A\vec{x}\|}$

Valeurs propres complexes conjuguées



Matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trace $\dfrac{A\vec{x}}{\|A\vec{x}\|}$

La situation est-elle la même que pour les valeurs propres réelles d'ordre > 1 ?

Valeurs de même module

La situation est-elle la même que pour les valeurs propres réelles d'ordre > 1 ?
Si A possède des valeurs propres différentes mais de module identique
Soit $\lambda_n, \ldots \lambda_{n-k} \in \mathbb{C}^{k+1}$ ces valeurs propres. Et soit $E_{\lambda_n}, \ldots, E_{\lambda_{n-1}}$ les sous-espaces propres associés à ces valeurs.

Polytech'Paris-UPMC

Valeurs de même module

La situation est-elle la même que pour les valeurs propres réelles d'ordre > 1 ?
Si A possède des valeurs propres différentes mais de module identique
Soit $\lambda_n, \dots \lambda_{n-k} \in \mathbb{C}^{k+1}$ ces valeurs propres. Et soit $E_{\lambda_n}, \dots, E_{\lambda_{n-1}}$ les sous-espaces propres associés à ces valeurs.

- La suite $\frac{\overrightarrow{x}_k}{\|\overrightarrow{x}_k\|}$ tend vers le sous-espace engendré par les sous-espaces propres

$$E \quad = \quad E_{\lambda_n} \oplus E_{\lambda_{n-1}} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_{n-k}}$$

Valeurs de même module

La situation est-elle la même que pour les valeurs propres réelles d'ordre > 1 ?
Si A possède des valeurs propres différentes mais de module identique
Soit $\lambda_n, \ldots \lambda_{n-k} \in \mathbb{C}^{k+1}$ ces valeurs propres. Et soit $E_{\lambda_n}, \ldots, E_{\lambda_{n-1}}$ les sous-espaces propres associés à ces valeurs.

- La suite $\frac{\overrightarrow{x}_k}{\|\overrightarrow{x}_k\|}$ tend vers le sous-espace engendré par les sous-espaces propres

$$E = E_{\lambda_n} \oplus E_{\lambda_{n-1}} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_{n-k}}$$

- Mais contrairement au cas précédent, E n'est pas un espace propre.

Valeurs de même module

La situation est-elle la même que pour les valeurs propres réelles d'ordre > 1 ?
Si A possède des valeurs propres différentes mais de module identique
Soit $\lambda_n, \ldots \lambda_{n-k} \in \mathbb{C}^{k+1}$ ces valeurs propres. Et soit $E_{\lambda_n}, \ldots, E_{\lambda_{n-1}}$ les sous-espaces propres associés à ces valeurs.

- La suite $\frac{\overrightarrow{x}_k}{\|\overrightarrow{x}_k\|}$ tend vers le sous-espace engendré par les sous-espaces propres

$$E = E_{\lambda_n} \oplus E_{\lambda_{n-1}} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_{n-k}}$$

- Mais contrairement au cas précédent, E n'est pas un espace propre.
- Il n'y a pas de convergence

Valeurs de même module

La situation est-elle la même que pour les valeurs propres réelles d'ordre > 1 ?
Si A possède des valeurs propres différentes mais de module identique
Soit $\lambda_n, \dots \lambda_{n-k} \in \mathbb{C}^{k+1}$ ces valeurs propres. Et soit $E_{\lambda_n}, \dots, E_{\lambda_{n-1}}$ les sous-espaces propres associés à ces valeurs.

- La suite $\frac{\overrightarrow{x}_k}{\|\overrightarrow{x}_k\|}$ tend vers le sous-espace engendré par les sous-espaces propres

$$E = E_{\lambda_n} \oplus E_{\lambda_{n-1}} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_{n-k}}$$

- Mais contrairement au cas précédent, E n'est pas un espace propre.
- Il n'y a pas de convergence

Dans le cas de deux valeurs propres seulement, il est possible de modifier l'algorithme pour assurer la convergence en faisant 2 itérations successives.

Résumé

- L'algorithme de la puissance itérée fonctionne si la matrice A
  - a des valeurs propres toutes différentes
  - est diagonalisable
  - est symétrique
    - ses valeurs propres sont alors réelles
    - le seul cas gênant est celui des valeurs propres de signes différents
- Il ne fonctionne pas s'il existe plusieurs valeurs propres complexes de même module Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- L'algorithme converge d'autant mieux si les valeurs propres sont de modules très différents.
- Si ce n'est pas le cas, on peut les obtenir dans le désordre.

Puissance itérée

- **Puissance itérée**
  - Avantages :

- **Puissance itérée**
  - Avantages :
    - Il n'utilise que des produits de matrices par des vecteurs

- **Puissance itérée**
  - Avantages :
    - Il n'utilise que des produits de matrices par des vecteurs
    - La convergence peut être accélérée

- **Puissance itérée**
  - Avantages :
    - Il n’utilise que des produits de matrices par des vecteurs
    - La convergence peut être accélérée
  - Inconvénients :

Conclusion

- **Puissance itérée**
  - Avantages :
    - Il n'utilise que des produits de matrices par des vecteurs
    - La convergence peut être accélérée
  - Inconvénients :
    - La convergence peut être lente

Conclusion

- **Puissance itérée**
  - Avantages :
    - Il n'utilise que des produits de matrices par des vecteurs
    - La convergence peut être accélérée
  - Inconvénients :
    - La convergence peut être lente
    - On obtient une approximation ce qui donne de mauvais résultats avec la méthode de déflation