Méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires

Polytech'Paris-UPMC

Pourquoi utiliser les méthodes itératives

On cherche à résoudre une équation de la forme :

$$Ax = b$$

Les méthodes directes fournissent la solution $\bar{x}$ en un nombre fini d'opérations.

Mais :

Pourquoi utiliser les méthodes itératives

On cherche à résoudre une équation de la forme :

$$Ax = b$$

Les méthodes directes fournissent la solution $\bar{x}$ en un nombre fini d'opérations.

Mais :

- Si la taille du système est élevée, le nombre d'opérations est important, *or les erreurs de calcul dépendent directement du nombre de calculs.*

Pourquoi utiliser les méthodes itératives

On cherche à résoudre une équation de la forme :

$$Ax = b$$

Les méthodes directes fournissent la solution $\bar{x}$ en un nombre fini d'opérations.

Mais :

- Si la taille du système est élevée, le nombre d'opérations est important,
  or les erreurs de calcul dépendent directement du nombre de calculs.

- Elles utilisent des propriétés mathématiques nécessitant un calcul exact,
  il est difficile de tenir compte des erreurs de calcul dans ce processus

Pourquoi utiliser les méthodes itératives

On cherche à résoudre une équation de la forme :

$$Ax = b$$

Les méthodes directes fournissent la solution $\bar{x}$ en un nombre fini d'opérations.

Mais :

- Si la taille du système est élevée, le nombre d'opérations est important,
  or les erreurs de calcul dépendent directement du nombre de calculs.

- Elles utilisent des propriétés mathématiques nécessitant un calcul exact,
  il est difficile de tenir compte des erreurs de calcul dans ce processus

Donc le résultat n'est **jamais rigoureusement égal** à $\bar{x}$.

Il peut même en être **très différent**.

Les fonctions linéaires ont de bonnes propriétés :

- ce sont des fonctions très régulières (C^∞)
- elles sont linéaires

L'utilisation de la formule de TAYLOR *dans l'algorithme de* NEWTON *sert justement à « linéariser » une fonction non linéaire*

Les fonctions linéaires ont de bonnes propriétés :

- ce sont des fonctions très régulières (C^∞)
- elles sont linéaires

  L'utilisation de la formule de TAYLOR *dans l'algorithme de* NEWTON *sert justement à « linéariser » une fonction non linéaire*

Mais *on ne peut pas utiliser* l'algorithme de NEWTON.

Les fonctions linéaires ont de bonnes propriétés :

- ce sont des fonctions très régulières (C^∞)
- elles sont linéaires

  L'utilisation de la formule de TAYLOR *dans l'algorithme de* NEWTON *sert justement à « linéariser » une fonction non linéaire*

Mais *on ne peut pas utiliser* l'algorithme de NEWTON.

- On construit une suite de vecteurs $(x^k)\ \ k = 0, 1, ...$ qui tend vers $\bar{x}$.

Méthodes itératives

Les fonctions linéaires ont de bonnes propriétés :

- ce sont des fonctions très régulières (C^∞)
- elles sont linéaires

L'utilisation de la formule de Taylor *dans l'algorithme de* Newton *sert justement à « linéariser » une fonction non linéaire*

Mais *on ne peut pas utiliser* l'algorithme de Newton.

- On construit une suite de vecteurs $(x^k) \ \ k = 0, 1, ...$ qui tend vers $\bar{x}$.
- Le point de départ est une approximation x^0 de $\bar{x}$ obtenue par exemple par une méthode directe.

Méthodes itératives

Les fonctions linéaires ont de bonnes propriétés :

- ce sont des fonctions très régulières (C^∞)
- elles sont linéaires

  L'utilisation de la formule de TAYLOR *dans l'algorithme de* NEWTON *sert justement à « linéariser » une fonction non linéaire*

Mais *on ne peut pas utiliser* l'algorithme de NEWTON.

- On construit une suite de vecteurs $(x^k)\ \ k = 0, 1, \ldots$ qui tend vers $\bar{x}$.
- Le point de départ est une approximation x^0 de $\bar{x}$ obtenue par exemple par une méthode directe.
- Pour construire cette suite, on utilise la linéarité pour décomposer la matrice A en une partie facilement inversible et un reste.

On décompose la matrice A : $A = M - N$,
de telle façon que M soit facilement inversible.

Alors,

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad Mx = Nx + b$$

On calcule la suite de vecteurs (x^i) à partir d'un vecteur x^0 choisi arbitrairement et de la relation :

$$Mx^{k+1} = Nx^k + b \quad \Leftrightarrow \quad x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}b$$

C'est à dire :

$$\begin{cases} x^0 & \text{donné} \\ x^{k+1} & = \quad M^{-1}Nx^k + M^{-1}b \end{cases}$$

Posons le problème

Posons $C = M^{-1}N$, et $d = M^{-1}b$. Nous devons donc étudier la suite récurrente :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^0 & \text{donné} & \\ x^{k+1} & = & Cx^k + d \end{array} \right.$$

Avec :

- $\bar{x}$ est point fixe de la fonction linéaire

$$x \quad \mapsto \quad Cx + d$$

- cette fonction est C^∞
- il faut démontrer que c'est une fonction contractante.

Intuitivement

- Sous quelles conditions la suite va-t-elle converger ?
- Cela dépend-il de C ou d ?

Un peu d’algèbre linéaire

Normes matricielles

On appel norme matricielle une norme définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est *compatible* avec la multiplication de matrice.
C'est à dire :

$$\begin{array}{rcccl} \|.\| & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & A & \mapsto & \|A\| \end{array}$$

telle que

$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

Normes matricielles

On appel norme matricielle une norme définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est *compatible* avec la multiplication de matrice.
C'est à dire :

$$\begin{array}{cccc} \|.\| & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & A & \mapsto & \|A\| \end{array}$$

telle que

$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

- Séparation : $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = (0)$,

Normes matricielles

On appel norme matricielle une norme définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est *compatible* avec la multiplication de matrice.
C'est à dire :

$$\begin{array}{rcccl} \|.\| & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & A & \longmapsto & \|A\| \end{array}$$

telle que

$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

- Séparation : $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = (0)$,
- Homogénéité : $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$,

Normes matricielles

On appel norme matricielle une norme définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est *compatible* avec la multiplication de matrice.
C'est à dire :

$$\begin{array}{rccl} \|.\| & : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{R}^+ \\ & A & \mapsto & \|A\| \end{array}$$

telle que

$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

- Séparation : $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = (0)$,
- Homogénéité : $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$,
- Inégalité triangulaire : $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,

Normes matricielles

On appel norme matricielle une norme définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est *compatible* avec la multiplication de matrice.
C'est à dire :

$$\begin{array}{rcccl} \|.\| & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & A & \mapsto & \|A\| \end{array}$$

telle que

$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

- Séparation : $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = (0)$,
- Homogénéité : $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$,
- Inégalité triangulaire : $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Norme de Frobenius :

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}} = \sqrt{tr\left({}^t\!AA\right)}$$

Norme de Frobenius :

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}} = \sqrt{tr\left({}^{t}AA\right))}$$

Normes induites (ou subordonnées) :

Soit $\|.\|_v$ une norme vectorielle définie sur $\mathbb{C}^n$
la fonction qui $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

est une norme matricielle dite *norme matricielle induite* ou subordonnée

Exemple de norme induite

Soit la norme vectorielle $\|.\|_\infty$:
$\forall x \in \mathbb{C}^n$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Cette norme induit la norme matricielle $\|.\|_\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\|A\|_\infty =$$

Exemple de norme induite

Soit la norme vectorielle $\|.\|_\infty$:
$\forall x \in \mathbb{C}^n$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

Cette norme induit la norme matricielle $\|.\|_\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Définition *On dit qu'une norme matricielle $\|.\|$ est* compatible *avec une norme vectorielle $\|.\|_v$ si*
$\forall x$

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \, \|x\|_v$$

Propriétés :

- Pour toute norme matricielle $\|.\|$, il existe une norme vectorielle avec laquelle elle est compatible. Il suffit de définir :

$$\|x\|_v = \left\| \begin{pmatrix} x_1 & & \\ \vdots & & \\ x_k & 0 & \\ \vdots & & \\ x_n & & \end{pmatrix} \right\|$$

- Toute norme matricielle induite est compatible avec sa norme vectorielle.

Rayon spectral

Définition *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appel* rayon spectral *de la matrice A le nombre réel :*

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

où λ_i sont les valeurs propres de A

Rayon spectral

Définition *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appel* rayon spectral *de la matrice A le nombre réel :*

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

où λ_i sont les valeurs propres de A

Remarque : $\rho(.)$ n'est pas une norme.

Rayon spectral

Définition *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appel* rayon spectral *de la matrice A le nombre réel :*

$$\rho\,(A) \quad = \quad \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

où λ_i sont les valeurs propres de A

Remarque : $\rho(.)$ n'est pas une norme.

Propriétés :

- Pour toute norme matricielle $\|.\|$ et pour toute matrice :

$$\rho(A) \quad \leq \quad \|A\|$$

Rayon spectral

Définition *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appel* rayon spectral *de la matrice A le nombre réel :*

$$\rho\,(A) \quad = \quad \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

où λ_i sont les valeurs propres de A

Remarque : $\rho(.)$ n'est pas une norme.

Propriétés :

- Pour toute norme matricielle $\|.\|$ et pour toute matrice :

$$\rho(A) \quad \leq \quad \|A\|$$

- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists$ une norme matricielle induite $\|.\|_*$ telle que :

$$\rho(A) \quad \leq \quad \|A\|_* \quad \leq \quad \rho(A) + \varepsilon$$

Convergence

Revenons sur la convergence de la suite :

$$\begin{cases} x^0 & \text{donné} \\ x^{k+1} & = \quad Cx^k + d \end{cases}$$

Convergence

Revenons sur la convergence de la suite :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^0 & \text{donné} & \\ x^{k+1} & = & Cx^k + d \end{array}\right.$$

Théorème $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *s'il existe* une norme *matricielle induite* $\|.\|$ *telle que*

$$\|C\| \quad < \quad 1$$

alors :

1. *L'équation* $x = Cx + d$ *admet une solution unique* $\bar{x}$.
2. *La suite* $x^k \to \bar{x}$ *quelle que soit* x^0.

Existence de la solution :

$$\rho(C) \quad \leq \quad \|C\| \quad < \quad 1$$

Existence de la solution :

$$\rho(C) \quad \leq \quad \|C\| \quad < \quad 1$$

Donc les valeurs propres λ de C sont telles que $\|\lambda\| < 1$.

Existence de la solution :

$$\rho(C) \quad \leq \quad \|C\| \quad < \quad 1$$

Donc les valeurs propres λ de C sont telles que $\|\lambda\| < 1$.

Cela signifie que la matrice $I - C$ est inversible

Existence de la solution :

$$\rho(C) \quad \leq \quad \|C\| \quad < \quad 1$$

Donc les valeurs propres λ de C sont telles que $\|\lambda\| < 1$.

Cela signifie que la matrice $I - C$ est inversible

Donc il existe une solution unique à l'équation

$$x \quad = \quad Cx + d$$

On appel $\bar{x}$ cette solution

Preuve - 2

Convergence :

Soit $e^k = x^k - \bar{x}$

Convergence :

Soit $e^k = x^k - \bar{x}$

On peut déduire une relation entre e^k et e^{k-1}.

$$Ce^{k-1} \quad =$$

Convergence :

Soit $e^k = x^k - \bar{x}$

On peut déduire une relation entre e^k et e^{k-1}.

$$Ce^{k-1} \quad = \quad C(x^{k-1} - \bar{x})$$

Convergence :

Soit $e^k = x^k - \bar{x}$

On peut déduire une relation entre e^k et e^{k-1}.

$$\begin{aligned} Ce^{k-1} &= C(x^{k-1} - \bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) - C(\bar{x}) \end{aligned}$$

Convergence :

Soit $e^k = x^k - \bar{x}$

On peut déduire une relation entre e^k et e^{k-1}.

$$\begin{aligned} Ce^{k-1} &= C(x^{k-1} - \bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) - C(\bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) + d - \bar{x} \end{aligned}$$

Convergence :

Soit $e^k = x^k - \bar{x}$

On peut déduire une relation entre e^k et e^{k-1}.

$$\begin{aligned} Ce^{k-1} &= C(x^{k-1} - \bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) - C(\bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) + d - \bar{x} \end{aligned}$$

Donc $e^k = Ce^{k-1}$ pour $k = 1, 2, \ldots$

Convergence :

Soit $e^k = x^k - \bar{x}$

On peut déduire une relation entre e^k et e^{k-1}.

$$\begin{aligned} Ce^{k-1} &= C(x^{k-1} - \bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) - C(\bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) + d - \bar{x} \end{aligned}$$

Donc $e^k = Ce^{k-1}$ pour $k = 1, 2, \ldots$

Nous avons alors :

$$e^k =$$

Convergence :

Soit $e^k = x^k - \bar{x}$

On peut déduire une relation entre e^k et e^{k-1}.

$$\begin{aligned} Ce^{k-1} &= C(x^{k-1} - \bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) - C(\bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) + d - \bar{x} \end{aligned}$$

Donc $e^k = Ce^{k-1}$ pour $k = 1, 2, \ldots$

Nous avons alors :

$$e^k = C^k e^0$$

Convergence :

Soit $e^k = x^k - \bar{x}$

On peut déduire une relation entre e^k et e^{k-1}.

$$\begin{aligned} Ce^{k-1} &= C(x^{k-1} - \bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) - C(\bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) + d - \bar{x} \\ \text{Donc} \quad e^k &= Ce^{k-1} \quad \text{pour } k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$e^k = C^k e^0$$

Soit la norme matricielle induite $\|.\|$ et sa norme vectorielle $\|.\|_v$ telle que $\|C\| < 1$:

$$\|e^k\|_v \leq$$

Preuve - 2

Convergence :

Soit $e^k = x^k - \bar{x}$

On peut déduire une relation entre e^k et e^{k-1}.

$$\begin{aligned} Ce^{k-1} &= C(x^{k-1} - \bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) - C(\bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) + d - \bar{x} \\ \text{Donc} \quad e^k &= Ce^{k-1} \text{ pour } k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$e^k = C^k e^0$$

Soit la norme matricielle induite $\|.\|$ et sa norme vectorielle $\|.\|_v$ telle que $\|C\| < 1$:

$$\left\|e^k\right\|_v \leq \|C\|^k \left\|e^0\right\|_v .$$

Convergence :

Soit $e^k = x^k - \bar{x}$

On peut déduire une relation entre e^k et e^{k-1}.

$$\begin{aligned} Ce^{k-1} &= C(x^{k-1} - \bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) - C(\bar{x}) \\ &= C(x^{k-1}) + d - \bar{x} \\ \text{Donc} \quad e^k &= Ce^{k-1} \text{ pour } k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$e^k = C^k e^0$$

Soit la norme matricielle induite $\|.\|$ et sa norme vectorielle $\|.\|_v$ telle que $\|C\| < 1$:

$$\left\|e^k\right\|_v \leq \|C\|^k \left\|e^0\right\|_v .$$

Donc $e^k \to 0$ et $x^k \to \bar{x}$

Autres conditions

Connaissant C, comment savoir si la suite va converger ?

Cas général :

Autres conditions

Connaissant C, comment savoir si la suite va converger ?

Cas général :

Théorème *Il y a équivalence entre les propositions suivantes :*

- *C est une matrice convergente (*i.e. C^k *tend vers* 0*)*
- $\rho(C) < 1$
- *Il existe une norme matricielle induite telle que* $\|C\| < 1$

Cas d'une matrice symétrique

Théorème *Soit A une matrice symétrique définie positive, Si*

$$A = M - N$$

et si $M +^t N$ est définie positive (elle est forcément symétrique) alors la suite

$$x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + d$$

est convergente

idée de la preuve :

Si on considère la norme vectorielle définie par A :

$$\|x\|_A = \sqrt{{}^t x A x}$$

Et sa norme matricielle induite $\|.\|$, alors

$$\|A\| < 1$$

Soit A une matrice, pour résoudre le système d'équations $Ax = b$, il faut décomposer $A = M - N$ de tel façon que :

Conclusion

Soit A une matrice, pour résoudre le système d'équations $Ax = b$, il faut décomposer $A = M - N$ de tel façon que :

- M soit inversible.

Conclusion

Soit A une matrice, pour résoudre le système d'équations $Ax = b$, il faut décomposer $A = M - N$ de tel façon que :

- M soit inversible.
- l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée
  - $C = M^{-1}N$ ait un rayon spectral < 1 (le plus petit possible).

Soit A une matrice, pour résoudre le système d'équations $Ax = b$, il faut décomposer $A = M - N$ de tel façon que :

- M soit inversible.
- l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée
  - $C = M^{-1}N$ ait un rayon spectral < 1 (le plus petit possible).
  - *Si A est symétrique définie positive*, $M +^t N$ soit aussi définie et positive.

Soit A une matrice, pour résoudre le système d'équations $Ax = b$, il faut décomposer $A = M - N$ de tel façon que :

- M soit inversible.
- l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée
  - $C = M^{-1}N$ ait un rayon spectral < 1 (le plus petit possible).
  - *Si A est symétrique définie positive*, $M +^t N$ soit aussi définie et positive.

Comment choisir M et N ?

Méthode de JACOBI

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soit $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ la solution. Si on connaît deux coordonnées de la solution, il est possible de calculer la troisième

- La ligne 1 donne : $\bar{x}_1 =$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times x \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soit $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ la solution. Si on connaît deux coordonnées de la solution, il est possible de calculer la troisième

- La ligne 1 donne : $\bar{x}_1 = \dfrac{0 - 1 \times \bar{x}_2 - 0 \times \bar{x}_3}{1}$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soit $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ la solution. Si on connaît deux coordonnées de la solution, il est possible de calculer la troisième

- La ligne 1 donne : $\bar{x}_1 = \dfrac{0 - 1 \times \bar{x}_2 - 0 \times \bar{x}_3}{1}$.
- La ligne 2 donne : $\bar{x}_2 = \dfrac{1 + 1 \times \bar{x}_1 - 1 \times \bar{x}_3}{-1}$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soit $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ la solution. Si on connaît deux coordonnées de la solution, il est possible de calculer la troisième

- La ligne 1 donne : $\bar{x}_1 = \dfrac{0 - 1 \times \bar{x}_2 - 0 \times \bar{x}_3}{1}$.
- La ligne 2 donne : $\bar{x}_2 = \dfrac{1 + 1 \times \bar{x}_1 - 1 \times \bar{x}_3}{-1}$.
- La ligne 3 donne : $\bar{x}_3 = \dfrac{2 - 0 \times \bar{x}_1 - 1 \times \bar{x}_2}{1}$.

Exemple (suite)

Si on ne connaît pas de coordonnées de la solution, mais que l'on en a des valeurs approchées :

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$$

Exemple (suite)

Si on ne connaît pas de coordonnées de la solution, mais que l'on en a des valeurs approchées :

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$$

Il est possible d'itérer, c'est à dire de choisir une nouvelle approximation (x_1, x_2, x_3) plus proche du résultat par les formules :

Exemple (suite)

Si on ne connaît pas de coordonnées de la solution, mais que l'on en a des valeurs approchées :

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$$

Il est possible d'itérer, c'est à dire de choisir une nouvelle approximation (x_1, x_2, x_3) plus proche du résultat par les formules :

- $x_1 = \dfrac{0 - 1 \times \tilde{x}_2 - 0 \times \tilde{x}_3}{1}$

Exemple (suite)

Si on ne connaît pas de coordonnées de la solution, mais que l'on en a des valeurs approchées :

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$$

Il est possible d'itérer, c'est à dire de choisir une nouvelle approximation (x_1, x_2, x_3) plus proche du résultat par les formules :

- $x_1 = \dfrac{0 - 1 \times \tilde{x}_2 - 0 \times \tilde{x}_3}{1}$
- $x_2 = \dfrac{1 + 1 \times \tilde{x}_1 - 1 \times \tilde{x}_3}{-1}$

Exemple (suite)

Si on ne connaît pas de coordonnées de la solution, mais que l'on en a des valeurs approchées :

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$$

Il est possible d'itérer, c'est à dire de choisir une nouvelle approximation (x_1, x_2, x_3) plus proche du résultat par les formules :

- $x_1 = \dfrac{0 - 1 \times \tilde{x}_2 - 0 \times \tilde{x}_3}{1}$
- $x_2 = \dfrac{1 + 1 \times \tilde{x}_1 - 1 \times \tilde{x}_3}{-1}$
- $x_3 = \dfrac{2 - 0 \times \tilde{x}_1 - 1 \times \tilde{x}_2}{1}$

Exemple (suite)

Si on ne connaît pas de coordonnées de la solution, mais que l'on en a des valeurs approchées :

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$$

Il est possible d'itérer, c'est à dire de choisir une nouvelle approximation (x_1, x_2, x_3) plus proche du résultat par les formules :

- $x_1 = \dfrac{0 - 1 \times \tilde{x}_2 - 0 \times \tilde{x}_3}{1}$
- $x_2 = \dfrac{1 + 1 \times \tilde{x}_1 - 1 \times \tilde{x}_3}{-1}$
- $x_3 = \dfrac{2 - 0 \times \tilde{x}_1 - 1 \times \tilde{x}_2}{1}$

La méthode de JACOBI consiste à itérer tant que l'on n'est pas assez proche du résultat.

Algorithme de JACOBI

Données : A, b, x^0, n, ε et MAXITER

début

- **pour** $i = 1$ à n **faire**
  - $x_i^{new} \leftarrow x_i^0$
- nb $\leftarrow 0$
- **tant que** *($\|Ax^{new} - b\| > \varepsilon$) et (nb $<$ MAXITER)* **faire**
  - nb $\leftarrow$ nb$+1$
  - **pour** $i = 1$ à n **faire**
    - $x_i^{old} \leftarrow x_i^{new}$
  - **pour** $i = 1$ à n **faire**
    - $$x_i^{new} \leftarrow \frac{b_i - \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i} a_{ij} x_j^{old}}{a_{ii}}$$

fin

Lien avec le chapitre précédant

Soit la matrice A, on note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Lien avec le chapitre précédant

Soit la matrice A, on note :

- D la matrice des éléments diagonaux de A

C'est à dire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Lien avec le chapitre précédant

Soit la matrice A, on note :

- D la matrice des éléments diagonaux de A
- E la matrice des éléments sous-diagonaux

C'est à dire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ \underset{i>j}{a_{ij}} & & 0 \end{pmatrix}$$

Lien avec le chapitre précédant

Soit la matrice A, on note :

- D la matrice des éléments diagonaux de A
- E la matrice des éléments sous-diagonaux
- F la matrice des éléments sur-diagonaux

C'est à dire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ \underset{i>j}{a_{ij}} & & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & & \underset{i<j}{a_{ij}} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Lien avec le chapitre précédant (suite)

L'algorithme de JACOBI décompose la matrice en la somme $A = M - N$ et calcule la suite

$$x^{k+1} \quad = \quad M^{-1}Nx^k + M^{-1}b$$

Avec :

$$\left\{\begin{array}{ll} M & = \\ N & = \end{array}\right.$$

L'algorithme de JACOBI décompose la matrice en la somme $A = M - N$ et calcule la suite

$$x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}b$$

Avec :

$$\begin{cases} M &= D \\ N &= \end{cases}$$

Lien avec le chapitre précédant (suite)

L'algorithme de JACOBI décompose la matrice en la somme $A = M - N$ et calcule la suite

$$x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}b$$

Avec :

$$\begin{cases} M = D \\ N = -E - F \end{cases}$$

Lien avec le chapitre précédant (suite)

L'algorithme de JACOBI décompose la matrice en la somme $A = M - N$ et calcule la suite

$$x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}b$$

Avec :

$$\begin{cases} M = D \\ N = -E - F \end{cases}$$

On appel *matrice de* JACOBI la matrice

$$\begin{aligned} J &= D^{-1}(-E - F) \\ &= M^{-1}N \end{aligned}$$

Conditions de convergence

D’après ce qui précède une condition nécessaire et suffisante (CNS) est que :

Conditions de convergence

D'après ce qui précède une condition nécessaire et suffisante (CNS) est que :

- D soit inversible
  $\Rightarrow$*les éléments diagonaux de* A *doivent être non nuls*

Conditions de convergence

D'après ce qui précède une condition nécessaire et suffisante (CNS) est que :

- D soit inversible
  $\Rightarrow$*les éléments diagonaux de A doivent être non nuls*
- et $\rho(J) < 1$ (la valeur propre de plus grand module est < à 1)

Conditions de convergence

D'après ce qui précède une condition nécessaire et suffisante (CNS) est que :

- D soit inversible
  $\Rightarrow$*les éléments diagonaux de A doivent être non nuls*
- et $\rho(J) < 1$ (la valeur propre de plus grand module est < à 1)

Remarques :

- Pour un système linéaire donné, on peut inverser
  - l'ordre des inconnues *i.e.* celui des colonnes de la matrice
  - l'ordre des équations *i.e.* celui des lignes de la matrice

Conditions de convergence

D'après ce qui précède une condition nécessaire et suffisante (CNS) est que :

- D soit inversible
  $\Rightarrow$*les éléments diagonaux de A doivent être non nuls*
- et $\rho(J) < 1$ (la valeur propre de plus grand module est < à 1)

Remarques :

- Pour un système linéaire donné, on peut inverser
  - l'ordre des inconnues *i.e.* celui des colonnes de la matrice
  - l'ordre des équations *i.e.* celui des lignes de la matrice
- Cette CNS est difficile à vérifier, mais il y a deux conditions suffisantes.
  - Pour les matrices à diagonale strictement dominante.
  - Pour les matrice symétriques.

Diagonale strictement dominante

Définition *Une matrice A est dite à diagonale strictement dominante si :*

$$\forall i, \;\; 1 \leq i \leq n, \; |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Diagonale strictement dominante

Définition *Une matrice A est dite à diagonale strictement dominante si :*

$$\forall i, \quad 1 \leq i \leq n, \ |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Théorème *Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de* JACOBI *est convergente quel que soit le vecteur initial x^0.*

Preuve :

Diagonale strictement dominante

Définition *Une matrice A est dite à diagonale strictement dominante si :*

$$\forall i,\ \ 1 \leq i \leq n,\ |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Théorème *Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de* Jacobi *est convergente quel que soit le vecteur initial x^0.*

Preuve :

Si $|a_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. $\ \Rightarrow a_{ii} \neq 0$

Diagonale strictement dominante

Définition *Une matrice A est dite à diagonale strictement dominante si :*

$$\forall i, \;\; 1 \leq i \leq n, \; |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Théorème *Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de* JACOBI *est convergente quel que soit le vecteur initial x^0.*

Preuve :

Si $|a_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. $\;\Rightarrow a_{ii} \neq 0$

Pour démontrer la convergence, on peut prouver que $\|C\|_\infty < 1$
avec $C = D^{-1}(-E-F)$. Donc $C_{ii} = 0$, $\;C_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ pour $i \neq j$.

Diagonale strictement dominante

Définition *Une matrice A est dite à diagonale strictement dominante si :*

$$\forall i, \;\; 1 \leq i \leq n, \; |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Théorème *Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de* JACOBI *est convergente quel que soit le vecteur initial x^0.*

Preuve :
Si $|a_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. $\;\Rightarrow a_{ii} \neq 0$

Pour démontrer la convergence, on peut prouver que $\|C\|_\infty < 1$ avec $C = D^{-1}(-E-F)$. Donc $C_{ii} = 0$, $\;C_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ pour $i \neq j$.

$\|C\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |C_{ij}| = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |C_{ij}| \right) = \max_i \left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right) < 1$, puisque A est à diagonale strictement dominante.

Cas des matrices symétriques

Théorème *Si A et $2D - A$ sont symétriques définies positives, alors la méthode de* JACOBI *converge*

preuve :
Si on pose

$$\begin{aligned} M &= D \\ N &= -E - F \\ &= D - A \end{aligned}$$

alors $M +^t N = 2D - A$

Algorithme de GAUSS-SEIDEL

Données : A, b, x^0, n, ε et MAXITER

début

- **pour** $i = 1$ à n **faire**
  - $x_i^{new} \leftarrow x_i^0$
- nb $\leftarrow 0$
- **tant que** $(\|Ax^{new} - b\| > \varepsilon)$ *et (nb $<$ MAXITER)* **faire**
  - nb $\leftarrow$ nb$+1$
  - **pour** $i = 1$ à n **faire**
    - $x_i^{old} \leftarrow x_i^{new}$
  - **pour** $i = 1$ à n **faire**
    - $$x_i^{new} \leftarrow \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{old} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{old}}{a_{ii}}$$

fin

Données : A, b, x^0, n, ε et MAXITER
début
  pour $i = 1$ à n **faire**
    $x_i^{new} \leftarrow x_i^0$
  nb $\leftarrow 0$
  tant que ($\|Ax^{new} - b\| > \varepsilon$) *et (nb $<$ MAXITER)* **faire**
    nb $\leftarrow$ nb$+1$
    pour $i = 1$ à n **faire**
      $x_i^{old} \leftarrow x_i^{new}$
    pour $i = 1$ à n **faire**
      $$x_i^{new} \leftarrow \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{new} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{old}}{a_{ii}}$$
fin

L'algorithme de GAUSS-SEIDEL modifie l'algorithme de JACOBI pour utiliser à chaque itération les valeurs x_i^{k+1} déjà calculées

Algorithme de

Données : A, b, x^0, n, ε et MAXITER

début

- **pour** $i = 1$ à n **faire**
  - $x_i^{new} \leftarrow x_i^0$
- nb $\leftarrow 0$
- **tant que** $(\|Ax^{new} - b\| > \varepsilon)$ *et (nb $<$ MAXITER)* **faire**
  - nb $\leftarrow$ nb$+1$
  - **pour** $i = 1$ à n **faire**
    - $x_i^{old} \leftarrow x_i^{new}$
  - **pour** $i = 1$ à n **faire**
    - $$x_i^{new} \leftarrow \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{new} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{old}}{a_{ii}}$$

fin

L'algorithme de GAUSS-SEIDEL modifie l'algorithme de JACOBI pour utiliser à chaque itération les valeurs x_i^{k+1} déjà calculées

Résumé de GAUSS-SEIDEL

L'algorithme de GAUSS-SEIDEL décompose la matrice en la somme $A = M - N$ et calcule la suite

$$x^{k+1} \quad = \quad M^{-1}Nx^k + M^{-1}b$$

Avec :

$$\begin{cases} M & = \\ N & = \end{cases}$$

Résumé de GAUSS-SEIDEL

L'algorithme de GAUSS-SEIDEL décompose la matrice en la somme $A = M - N$ et calcule la suite

$$x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}b$$

Avec :

$$\begin{cases} M & = & D + E \\ N & = & \end{cases}$$

Résumé de GAUSS-SEIDEL

L'algorithme de GAUSS-SEIDEL décompose la matrice en la somme $A = M - N$ et calcule la suite

$$x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}b$$

Avec :

$$\begin{cases} M = D + E \\ N = -F \end{cases}$$

Résumé de Gauss-Seidel

L'algorithme de Gauss-Seidel décompose la matrice en la somme $A = M - N$ et calcule la suite

$$x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}b$$

Avec :

$$\begin{cases} M &= D + E \\ N &= -F \end{cases}$$

On appel *matrice de Gauss-Seidel* la matrice

$$\begin{aligned} GS &= (D+E)^{-1}(-F) \\ &= M^{-1}N \end{aligned}$$

D'après ce qui précede, une condition nécessaire et suffisante (CNS) est que :

Condition de convergence

D'après ce qui précede, une condition nécessaire et suffisante (CNS) est que :

- (D+E) est inversible
  $\Rightarrow$*les éléments diagonaux de A doivent être non nuls.*

Condition de convergence

D'après ce qui précede, une condition nécessaire et suffisante (CNS) est que :

- (D+E) est inversible
  $\Rightarrow$*les éléments diagonaux de A doivent être non nuls.*
- et $\rho(GS) < 1$ avec $GS = -(D+E)^{-1}F$.

Condition de convergence

D'après ce qui précede, une condition nécessaire et suffisante (CNS) est que :

- (D+E) est inversible
  $\Rightarrow$*les éléments diagonaux de A doivent être non nuls.*
- et $\rho(GS) < 1$ avec $GS = -(D+E)^{-1}F$.

Il y a aussi deux conditions suffisantes :

Condition de convergence

D'après ce qui précede, une condition nécessaire et suffisante (CNS) est que :

- (D+E) est inversible
  $\Rightarrow$*les éléments diagonaux de A doivent être non nuls.*
- et $\rho(GS) < 1$ avec $GS = -(D+E)^{-1}F$.

Il y a aussi deux conditions suffisantes :

Théorème *Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de* GAUSS-SEIDEL *est convergente quel que soit le vecteur initial x^0.*

Condition de convergence

D'après ce qui précede, une condition nécessaire et suffisante (CNS) est que :

- (D+E) est inversible
  $\Rightarrow$*les éléments diagonaux de A doivent être non nuls.*
- et $\rho(GS) < 1$ avec $GS = -(D+E)^{-1}F$.

Il y a aussi deux conditions suffisantes :

Théorème *Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de* GAUSS-SEIDEL *est convergente quel que soit le vecteur initial x^0.*

Théorème *Si A est une matrice symétrique définie positive alors la méthode de* GAUSS-SEIDEL *est convergente quel que soit le vecteur initial x^0.*

Conclusion

- Méthodes stables
- Les conditions de convergences sont difficiles à mettre en œuvres
  - L'utilisation des matrices à diagonales dominantes est très restrictive.
  - L'utilisation des conditions sur le rayon spectrale ou ou sur les matrices symétriques définies positives nécessitent une analyse mathématique préalable.
- Méthode de relaxation.
- Il y a d'autres méthode itératives *algorithme du gradiant conjugué*, *méthode de* KRYLOV.