Résolution d’équations algébriques

Polytech’Paris-UPMC

Étude des suites

Problèmes posés

Le calcul par une méthode itérative d'un résultat revient à étudier une suite.

On distingue deux étapes dans l'étude des suites :

- Étude de la nature de la suite
- Recherche et calcul de sa limite éventuelle

Problèmes posés

Le calcul par une méthode itérative d'un résultat revient à étudier une suite.

On distingue deux étapes dans l'étude des suites :

- Étude de la nature de la suite
- Recherche et calcul de sa limite éventuelle

Prenons par exemple la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Problèmes posés

Le calcul par une méthode itérative d'un résultat revient à étudier une suite.

On distingue deux étapes dans l'étude des suites :

- Étude de la nature de la suite
- Recherche et calcul de sa limite éventuelle

Prenons par exemple la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$$

Mathématiquement, cette suite diverge

Problèmes posés

Le calcul par une méthode itérative d'un résultat revient à étudier une suite.

On distingue deux étapes dans l'étude des suites :

- Étude de la nature de la suite
- Recherche et calcul de sa limite éventuelle

Prenons par exemple la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$$

Mathématiquement, cette suite diverge mais en simple précision :

$$S_{1000000} = 14.357357978820800781 25$$

Problèmes posés

Le calcul par une méthode itérative d'un résultat revient à étudier une suite.

On distingue deux étapes dans l'étude des suites :

- Étude de la nature de la suite
- Recherche et calcul de sa limite éventuelle

Prenons par exemple la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$$

Mathématiquement, cette suite diverge mais en simple précision :

$$S_{1700000} = 15.0249300003051757812 5$$

Problèmes posés

Le calcul par une méthode itérative d'un résultat revient à étudier une suite.

On distingue deux étapes dans l'étude des suites :

- Étude de la nature de la suite
- Recherche et calcul de sa limite éventuelle

Prenons par exemple la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$$

Mathématiquement, cette suite diverge mais en simple précision :

$$S_{2097000} = 15.4035387039184570312 5$$

Problèmes posés

Le calcul par une méthode itérative d'un résultat revient à étudier une suite.

On distingue deux étapes dans l'étude des suites :

- Étude de la nature de la suite
- Recherche et calcul de sa limite éventuelle

Prenons par exemple la suite

$$S_n \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \sim \quad \ln(n)$$

Mathématiquement, cette suite diverge mais en simple précision :

$$S_{2097070} \quad = \quad 15.4036054611206054687 5$$

Problèmes posés

Le calcul par une méthode itérative d'un résultat revient à étudier une suite.

On distingue deux étapes dans l'étude des suites :

- Étude de la nature de la suite
- Recherche et calcul de sa limite éventuelle

Prenons par exemple la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$$

Mathématiquement, cette suite diverge mais en simple précision :

$$S_{2097150} = 15.40368175506591796875$$

Problèmes posés

Le calcul par une méthode itérative d'un résultat revient à étudier une suite.

On distingue deux étapes dans l'étude des suites :

- Étude de la nature de la suite
- Recherche et calcul de sa limite éventuelle

Prenons par exemple la suite

$$S_n \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \sim \quad \ln(n)$$

Mathématiquement, cette suite diverge mais en simple précision :

$$S_{2097152} \quad = \quad 15.403682708740234375 00$$

Problèmes posés

Le calcul par une méthode itérative d'un résultat revient à étudier une suite.

On distingue deux étapes dans l'étude des suites :

- Étude de la nature de la suite
- Recherche et calcul de sa limite éventuelle

Prenons par exemple la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$$

Mathématiquement, cette suite diverge mais en simple précision :

$$\forall n \geq 2097152 \quad S_n = 15.403682708740234375\,00$$

Problèmes posés

Le calcul par une méthode itérative d'un résultat revient à étudier une suite.

On distingue deux étapes dans l'étude des suites :

- Étude de la nature de la suite
- Recherche et calcul de sa limite éventuelle

Prenons par exemple la suite

$$S_n \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \sim \quad \ln(n)$$

Mathématiquement, cette suite diverge mais en simple précision :

$$\forall n \geq 2097152 \quad S_n \quad = \quad 15.40368270874023437500$$

$\Rightarrow$*L'ordinateur ne permettra que de calculer* « vite » *les termes d'une suite dont on connaît la nature*

Critère d'évaluation d'une méthode

L'efficacité d'une méthode dépendra de la vitesse de convergence de la suite correspondante.

Critère d'évaluation d'une méthode

L'efficacité d'une méthode dépendra de la vitesse de convergence de la suite correspondante.

Si on considère u_n une suite *convergeant* vers une limite a.

Critère d'évaluation d'une méthode

L'efficacité d'une méthode dépendra de la vitesse de convergence de la suite correspondante.

Si on considère u_n une suite *convergeant* vers une limite a.
Il est possible de définir la suite v_n :

$$v_n = -log_{10}(|u_n - a|)$$

Critère d'évaluation d'une méthode

L'efficacité d'une méthode dépendra de la vitesse de convergence de la suite correspondante.

Si on considère u_n une suite *convergeant* vers une limite a.
Il est possible de définir la suite v_n :

$$v_n = -log_{10}(|u_n - a|) \quad \text{c.à.d.} \quad |u_n - a| = 10^{-v_n}$$

Intuitivement v_n représente le nombre de décimales communes entre u_n et a.

Critère d'évaluation d'une méthode

L'efficacité d'une méthode dépendra de la vitesse de convergence de la suite correspondante.

Si on considère u_n une suite *convergeant* vers une limite a.
Il est possible de définir la suite v_n :

$$v_n = -log_{10}(|u_n - a|) \quad \text{c.à.d.} \quad |u_n - a| = 10^{-v_n}$$

Intuitivement v_n représente le nombre de décimales communes entre u_n et a.

On distinguera trois types de vitesses de convergence :

Critère d'évaluation d'une méthode

L'efficacité d'une méthode dépendra de la vitesse de convergence de la suite correspondante.

Si on considère u_n une suite *convergeant* vers une limite a.
Il est possible de définir la suite v_n :

$$v_n = -log_{10}(|u_n - a|) \quad \text{c.à.d.} \quad |u_n - a| = 10^{-v_n}$$

Intuitivement v_n représente le nombre de décimales communes entre u_n et a.

On distinguera trois types de vitesses de convergence :

- logarithmique

Critère d'évaluation d'une méthode

L'efficacité d'une méthode dépendra de la vitesse de convergence de la suite correspondante.

Si on considère u_n une suite *convergeant* vers une limite a.
Il est possible de définir la suite v_n :

$$v_n \quad = \quad -log_{10}(|u_n - a|) \quad \text{c.à.d.} \quad |u_n - a| \quad = \quad 10^{-v_n}$$

Intuitivement v_n représente le nombre de décimales communes entre u_n et a.

On distinguera trois types de vitesses de convergence :

- logarithmique
- linéaire

Critère d'évaluation d'une méthode

L'efficacité d'une méthode dépendra de la vitesse de convergence de la suite correspondante.

Si on considère u_n une suite *convergeant* vers une limite a.
Il est possible de définir la suite v_n :

$$v_n = -log_{10}(|u_n - a|) \quad \text{c.à.d.} \quad |u_n - a| = 10^{-v_n}$$

Intuitivement v_n représente le nombre de décimales communes entre u_n et a.

On distinguera trois types de vitesses de convergence :

- logarithmique
- linéaire
- exponentielle

Vitesse de convergence logarithmique

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite* u_n *est logarithmique si la suite* $\frac{v_n}{n}$ *converge vers 0.*

Si u_n vérifie

$$|u_n - a| \sim \frac{K}{n^p} \quad \text{avec} \quad K > 0$$

alors v_n est équivalent à $p \log(n)$.

Vitesse de convergence logarithmique

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est logarithmique si la suite $\frac{v_n}{n}$ converge vers 0.*

Si u_n vérifie

$$|u_n - a| \sim \frac{K}{n^p} \quad \text{avec} \quad K > 0$$

alors v_n est équivalent à $p\log(n)$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de plus en plus important.

Vitesse de convergence logarithmique

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est logarithmique si la suite $\frac{v_n}{n}$ converge vers 0.*

Si u_n vérifie

$$|u_n - a| \sim \frac{K}{n^p} \quad \text{avec} \quad K > 0$$

alors v_n est équivalent à $p\log(n)$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de plus en plus important.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 1.644934067\ldots$$

Vitesse de convergence logarithmique

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est logarithmique si la suite $\frac{v_n}{n}$ converge vers 0.*

Si u_n vérifie

$$|u_n - a| \sim \frac{K}{n^p} \quad \text{avec} \quad K > 0$$

alors v_n est équivalent à $p\log(n)$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de plus en plus important.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 1.644934067\ldots$$

En simple précision

$$S_1 = 1.000000$$

Vitesse de convergence logarithmique

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite* u_n *est logarithmique si la suite* $\frac{v_n}{n}$ *converge vers 0.*

Si u_n vérifie

$$|u_n - a| \sim \frac{K}{n^p} \quad \text{avec} \quad K > 0$$

alors v_n est équivalent à $p\log(n)$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de plus en plus important.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - O\left(\frac{1}{n}\right) \to 1.644934067\ldots$$

En simple précision

$$S_2 = 1.250000$$

Vitesse de convergence logarithmique

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est logarithmique si la suite $\frac{v_n}{n}$ converge vers 0.*

Si u_n vérifie

$$|u_n - a| \sim \frac{K}{n^p} \quad \text{avec} \quad K > 0$$

alors v_n est équivalent à $p\log(n)$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de plus en plus important.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 1.644934067\ldots$$

En simple précision

$$S_3 = 1.361111$$

Vitesse de convergence logarithmique

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est logarithmique si la suite $\frac{v_n}{n}$ converge vers 0.*

Si u_n vérifie

$$|u_n - a| \sim \frac{K}{n^p} \quad \text{avec} \quad K > 0$$

alors v_n est équivalent à $p\log(n)$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de plus en plus important.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - O\left(\frac{1}{n}\right) \to 1.644934067\dots$$

En simple précision

$$S_{30} = 1.612150$$

Vitesse de convergence logarithmique

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est logarithmique si la suite $\frac{v_n}{n}$ converge vers 0.*

Si u_n vérifie

$$|u_n - a| \sim \frac{K}{n^p} \quad \text{avec} \quad K > 0$$

alors v_n est équivalent à $p\log(n)$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de plus en plus important.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 1.644934067\ldots$$

En simple précision

$$S_{300} = 1.641606$$

Vitesse de convergence logarithmique

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est logarithmique si la suite $\frac{v_n}{n}$ converge vers 0.*

Si u_n vérifie

$$|u_n - a| \sim \frac{K}{n^p} \quad \text{avec} \quad K > 0$$

alors v_n est équivalent à $p\log(n)$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de plus en plus important.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 1.644934067\ldots$$

En simple précision

$$S_{1100} = 1.644025$$

Vitesse de convergence logarithmique

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite* u_n *est logarithmique si la suite* $\frac{v_n}{n}$ *converge vers 0.*

Si u_n vérifie

$$|u_n - a| \sim \frac{K}{n^p} \quad \text{avec} \quad K > 0$$

alors v_n est équivalent à $p \log(n)$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de plus en plus important.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 1.644934067\ldots$$

En simple précision

$$S_{3900} = 1.644701$$

Vitesse de convergence logarithmique

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est logarithmique si la suite $\frac{v_n}{n}$ converge vers 0.*

Si u_n vérifie

$$|u_n - a| \sim \frac{K}{n^p} \quad \text{avec} \quad K > 0$$

alors v_n est équivalent à $p\log(n)$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de plus en plus important.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - O\left(\frac{1}{n}\right) \to 1.644934067\ldots$$

En simple précision

$$\forall n \geq 4096 \qquad S_n = 1.644725$$

Vitesse de convergence logarithmique

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est logarithmique si la suite $\frac{v_n}{n}$ converge vers 0.*

Si u_n vérifie

$$|u_n - a| \sim \frac{K}{n^p} \quad \text{avec} \quad K > 0$$

alors v_n est équivalent à $p\log(n)$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de plus en plus important.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 1.644934067\ldots$$

En simple précision

$$\forall n \geq 4096 \qquad S_n = \mathbf{1.644}725$$

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite* u_n *est linéaire si la suite* $\frac{v_n}{n} \in [a, b]$ *avec* a, $b \in \mathbb{R}^{+*}$.

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est linéaire si la suite $\frac{v_n}{n} \in [a, b]$ avec a, $b \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations constant.

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est linéaire si la suite $\frac{v_n}{n} \in [a, b]$ avec a, $b \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations constant.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{0,25^i}{i} = \ln(1,25) + O(0.25^n) \to .223143551314\ldots$$

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite* u_n *est linéaire si la suite* $\frac{v_n}{n} \in [a, b]$ *avec* a, $b \in \mathbb{R}^{+*}$.

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations constant.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{0,25^i}{i} = \ln(1,25) + O(0.25^n) \rightarrow .223143551314\ldots$$

En simple précision

$$S_1 = 0.250000000000$$

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est linéaire si la suite $\frac{v_n}{n} \in [a, b]$ avec a, $b \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations constant.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{0,25^i}{i} = \ln(1,25) + O(0.25^n) \rightarrow .223143551314\ldots$$

En simple précision

$$S_2 = 0.218750000000$$

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite* u_n *est linéaire si la suite* $\frac{v_n}{n} \in [a, b]$ *avec* a, $b \in \mathbb{R}^{+*}$.

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations constant.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{0,25^i}{i} = \ln(1,25) + O(0.25^n) \to .223143551314\ldots$$

En simple précision

$$S_3 = 0.223958328366$$

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est linéaire si la suite $\frac{v_n}{n} \in [a, b]$ avec a, $b \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations constant.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{0,25^i}{i} = \ln(1,25) + O(0.25^n) \rightarrow .223143551314\ldots$$

En simple précision

$$S_4 = 0.222981765866$$

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est linéaire si la suite* $\frac{v_n}{n} \in [a, b]$ *avec* a, $b \in \mathbb{R}^{+*}$.

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations constant.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{0,25^i}{i} = \ln(1,25) + O(0.25^n) \rightarrow .223143551314\ldots$$

En simple précision

$$S_5 = 0.223177075386$$

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est linéaire si la suite $\frac{v_n}{n} \in [a, b]$ avec a, $b \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations constant.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{0,25^i}{i} = \ln(1,25) + O(0.25^n) \rightarrow .223143551314\ldots$$

En simple précision

$$S_6 = 0.223136380314$$

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite* u_n *est linéaire si la suite* $\frac{v_n}{n} \in [a, b]$ *avec* a, $b \in \mathbb{R}^{+*}$.

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations constant.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{0,25^i}{i} = \ln(1,25) + O(0.25^n) \rightarrow .223143551314\ldots$$

En simple précision

$$S_7 = 0.223145097494$$

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est linéaire si la suite $\frac{v_n}{n} \in [a, b]$ avec a, $b \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations constant.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{0,25^i}{i} = \ln(1,25) + O(0.25^n) \rightarrow .223143551314\ldots$$

En simple précision

$$S_8 = 0.223143190145$$

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est linéaire si la suite $\frac{v_n}{n} \in [a, b]$ avec a, $b \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations constant.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{0,25^i}{i} = \ln(1,25) + O(0.25^n) \rightarrow .223143551314\ldots$$

En simple précision

$$S_9 = 0.223143607378$$

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est linéaire si la suite $\frac{v_n}{n} \in [a, b]$ avec a, $b \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations constant.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{0,25^i}{i} = \ln(1,25) + O(0.25^n) \rightarrow .223143551314\ldots$$

En simple précision

$$S_{10} = 0.223143517971$$

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est linéaire si la suite $\frac{v_n}{n} \in [a,b]$ avec a, $b \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations constant.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{0,25^i}{i} = \ln(1,25) + O(0.25^n) \rightarrow .223143551314\ldots$$

En simple précision

$\forall n \geq 12 \qquad S_{12} = \mathbf{0.22314353}2872$

Vitesse de convergence exponentielle

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est exponentielle si la suite $\frac{v_n}{n}$ diverge.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{A^{p^n}} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

alors $v_n \sim \log(A) \times p^n$.
Si $p = 2$ on parlera de convergence quadratique.

Vitesse de convergence exponentielle

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est exponentielle si la suite $\frac{v_n}{n}$ diverge.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{A^{p^n}} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

alors $v_n \sim \log(A) \times p^n$.
Si $p = 2$ on parlera de convergence quadratique.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de moins en moins important.

Vitesse de convergence exponentielle

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est exponentielle si la suite $\dfrac{v_n}{n}$ diverge.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{A^{p^n}} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

alors $v_n \sim \log(A) \times p^n$.
Si $p = 2$ on parlera de convergence quadratique.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de moins en moins important.

Par exemple :
$$\left\{ \begin{array}{lcl} S_1 & = & 0.5 \\ S_n & = & S_{n-1} + S_{n-1} \times (1 - 3S_{n-1}) \end{array} \right.$$

$$S_n \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}$$

$$= \quad 0.50000000000000000000$$

Vitesse de convergence exponentielle

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est exponentielle si la suite $\frac{v_n}{n}$ diverge.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{A^{p^n}} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

alors $v_n \sim \log(A) \times p^n$.
Si $p = 2$ on parlera de convergence quadratique.
Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de moins en moins important.

Par exemple : $\begin{cases} S_1 &= 0.5 \\ S_n &= S_{n-1} + S_{n-1} \times (1 - 3S_{n-1}) \end{cases}$

$$S_n \longrightarrow \frac{1}{3}$$

En double précision

$$S_1 = 0.50000000000000000000$$

Vitesse de convergence exponentielle

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est exponentielle si la suite $\frac{v_n}{n}$ diverge.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{A^{p^n}} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

alors $v_n \sim \log(A) \times p^n$.
Si $p = 2$ on parlera de convergence quadratique.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de moins en moins important.

Par exemple :

$$\begin{cases} S_1 & = & 0.5 \\ S_n & = & S_{n-1} + S_{n-1} \times (1 - 3S_{n-1}) \end{cases}$$

$$S_n \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}$$

En double précision

$$S_2 \quad = \quad 0.25000000000000000000$$

Vitesse de convergence exponentielle

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est exponentielle si la suite $\frac{v_n}{n}$ diverge.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{A^{p^n}} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

alors $v_n \sim \log(A) \times p^n$.
Si $p = 2$ on parlera de convergence quadratique.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de moins en moins important.

Par exemple : $\begin{cases} S_1 = 0.5 \\ S_n = S_{n-1} + S_{n-1} \times (1 - 3S_{n-1}) \end{cases}$

$$S_n \rightarrow \frac{1}{3}$$

En double précision

$$S_3 = 0.31250000000000000000$$

Vitesse de convergence exponentielle

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est exponentielle si la suite $\dfrac{v_n}{n}$ diverge.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{A^{p^n}} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

alors $v_n \sim \log(A) \times p^n$.
Si $p = 2$ on parlera de convergence quadratique.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de moins en moins important.

Par exemple :
$$\begin{cases} S_1 &= 0.5 \\ S_n &= S_{n-1} + S_{n-1} \times (1 - 3S_{n-1}) \end{cases}$$

$$S_n \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}$$

En double précision

$$S_4 \quad = \quad 0.33203125000000000000$$

Vitesse de convergence exponentielle

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est exponentielle si la suite $\frac{v_n}{n}$ diverge.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{A^{p^n}} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

alors $v_n \sim \log(A) \times p^n$.
Si $p = 2$ on parlera de convergence quadratique.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de moins en moins important.

Par exemple : $\begin{cases} S_1 & = & 0.5 \\ S_n & = & S_{n-1} + S_{n-1} \times (1 - 3S_{n-1}) \end{cases}$

$$S_n \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}$$

En double précision

$$S_5 \quad = \quad 0.33332824707031250000$$

Vitesse de convergence exponentielle

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite* u_n *est exponentielle si la suite* $\frac{v_n}{n}$ *diverge.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{A^{p^n}} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

alors $v_n \sim \log(A) \times p^n$.
Si $p = 2$ on parlera de convergence quadratique.
Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de moins en moins important.

Par exemple : $$\begin{cases} S_1 &= 0.5 \\ S_n &= S_{n-1} + S_{n-1} \times (1 - 3S_{n-1}) \end{cases}$$

$$S_n \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}$$

En double précision

$$S_6 \quad = \quad 0.33333333325572311878$$

Vitesse de convergence exponentielle

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est exponentielle si la suite $\frac{v_n}{n}$ diverge.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{A^{p^n}} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

alors $v_n \sim \log(A) \times p^n$.
Si $p = 2$ on parlera de convergence quadratique.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de moins en moins important.

Par exemple :
$$\begin{cases} S_1 &= 0.5 \\ S_n &= S_{n-1} + S_{n-1} \times (1 - 3S_{n-1}) \end{cases}$$

$$S_n \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}$$

En double précision

$$\forall n \geq 7 \quad S_7 \quad = \quad 0.33333333333333331483$$

Suites récurrentes

Définition *On appellera suites récurrentes les suites définies par un terme initial* v_0 *et la relation :*

$$v_{n+1} = f(v_n)$$

où f *est une fonction réelle continue.*

Suites récurrentes

Définition *On appellera suites récurrentes les suites définies par un terme initial* v_0 *et la relation :*

$$v_{n+1} = f(v_n)$$

où f *est une fonction réelle continue.*

Si cette suite converge, elle converge vers un **point fixe** de f. C'est à dire un point a tel que :

$$f(a) = a$$

Suites récurrentes

Définition *On appellera suites récurrentes les suites définies par un terme initial v_0 et la relation :*

$$v_{n+1} = f(v_n)$$

où f est une fonction réelle continue.

Si cette suite converge, elle converge vers un **point fixe** de f. C'est à dire un point a tel que :

$$f(a) = a$$

Définition **(Limites possibles)** *Un point fixe a est dit limite possible pour f si $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall v_0 \in V$ la suite v_n induite converge vers a.*

Fonctions contractantes

Définition (Fonction contractante) *Soit I un intervalle et soit f une application continue de I dans I, f est* ***contractante*** *si*

$$\exists k < 1 \text{tel que}$$
$$\forall x, y \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$$

Fonctions contractantes

Définition (Fonction contractante) *Soit I un intervalle et soit f une application continue de I dans I, f est* ***contractante*** *si*

$$\exists k < 1 \textit{ tel que}$$
$$\forall x, y \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$$

Ces fonctions sont intéressantes dans le cas où elle définissent une suite récurrente.

Fonctions contractantes

Définition (Fonction contractante) *Soit I un intervalle et soit f une application continue de I dans I, f est* ***contractante*** *si*

$$\exists k < 1 \text{tel que}$$
$$\forall x, y \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$$

Ces fonctions sont intéressantes dans le cas où elle définissent une suite récurrente.

Théorème (du point fixe) *Si $f : I \to I$ est contractante alors f admet un unique point fixe $a \in I$ et toute suite définie par :*

$$\begin{cases} v_0 & \in & I \\ v_{n+1} & = & f(v_n) \end{cases}$$

converge vers a avec une convergence au moins linéaire

Fonctions dérivables

Pour prouver qu'une fonction est contractante, on peut utiliser sa dérivée.

Fonctions dérivables

Pour prouver qu'une fonction est contractante, on peut utiliser sa dérivée.

Théorème *Soit $f : I \to I$ une fonction C^1 avec un point fixe a.*

Pour prouver qu'une fonction est contractante, on peut utiliser sa dérivée.

Théorème *Soit $f : I \to I$ une fonction C^1 avec un point fixe a.*

- *Si $|f'(a)| < 1$ alors $\exists \mathcal{V}$ un voisinage de a dans lequel f est contractante et a est limite possible pour f.*

Fonctions dérivables

Pour prouver qu'une fonction est contractante, on peut utiliser sa dérivée.

Théorème *Soit $f : I \to I$ une fonction C^1 avec un point fixe a.*

- *Si $|f'(a)| < 1$ alors $\exists \mathcal{V}$ un voisinage de a dans lequel f est contractante et a est limite possible pour f.*
- *Si $|f'(a)| > 1$ alors f n'est contractante dans aucun voisinage de a. Alors a n'est pas limite possible pour f (sauf cas particulier).*

Fonctions dérivables

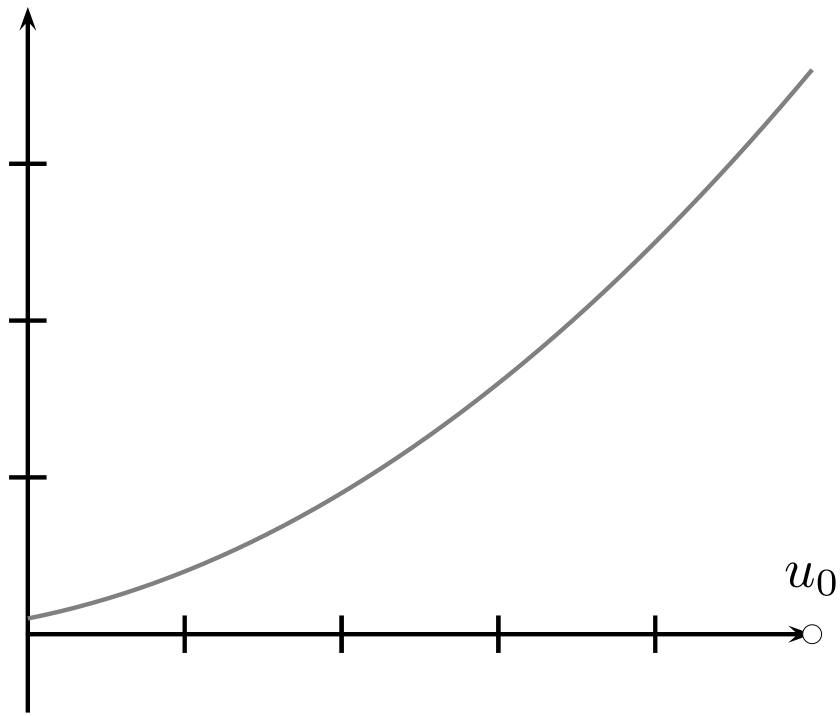
Pour prouver qu'une fonction est contractante, on peut utiliser sa dérivée.

Théorème *Soit $f : I \to I$ une fonction C^1 avec un point fixe a.*

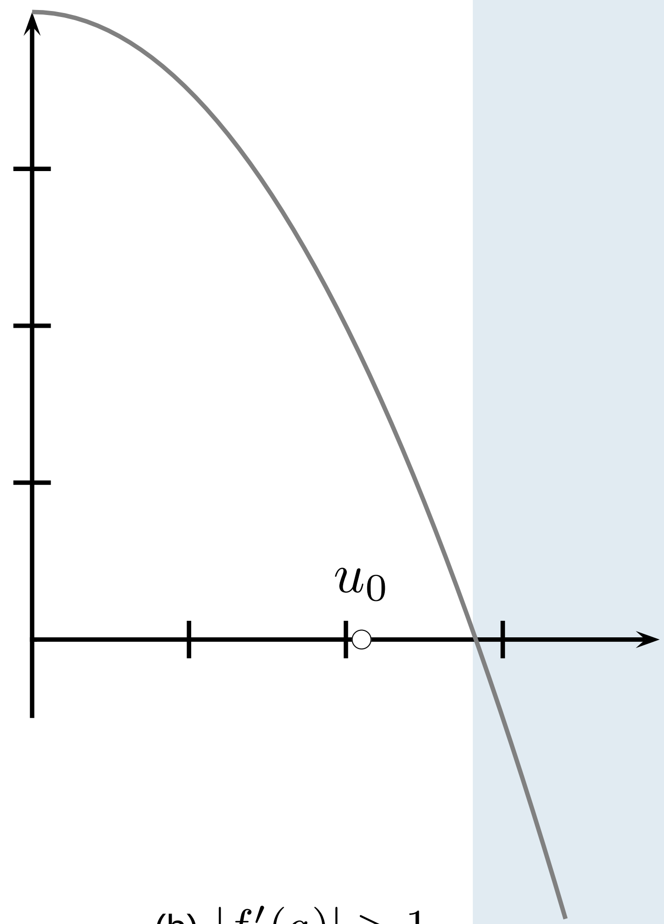
- *Si $|f'(a)| < 1$ alors $\exists \mathcal{V}$ un voisinage de a dans lequel f est contractante et a est limite possible pour f.*
- *Si $|f'(a)| > 1$ alors f n'est contractante dans aucun voisinage de a. Alors a n'est pas limite possible pour f (sauf cas particulier).*

On peut même connaître la vitesse de convergence :

- si $f'(a) \neq 0$, la convergence est linéaire.
- si $f'(a) = 0$, la convergence est au moins quadratique.

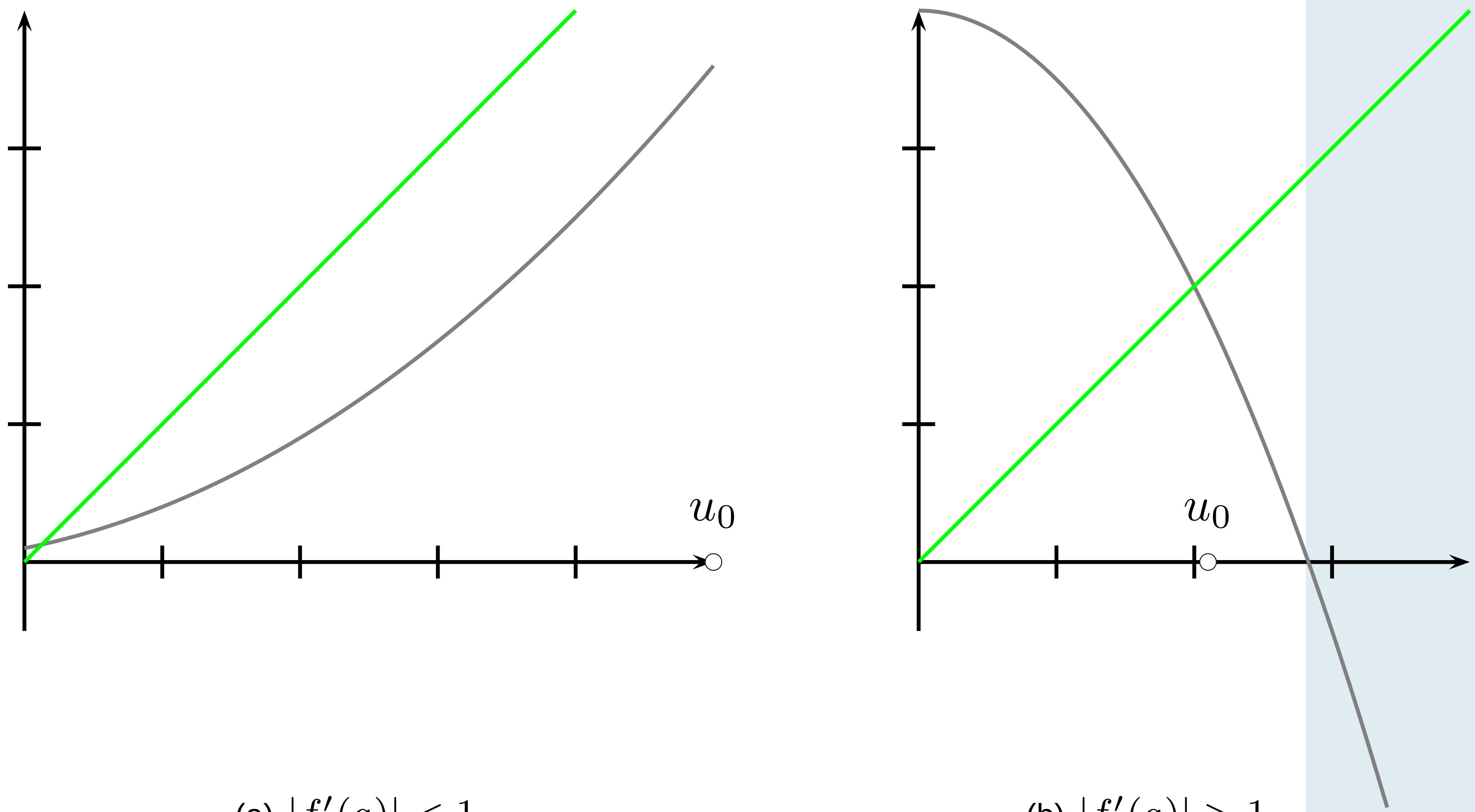


(a) $|f'(a)| < 1$



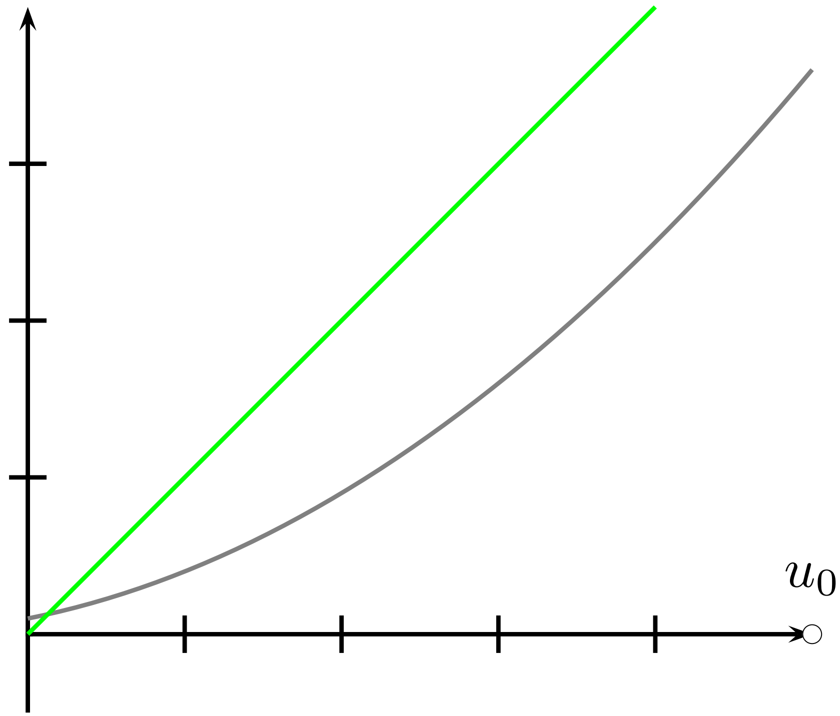
(b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

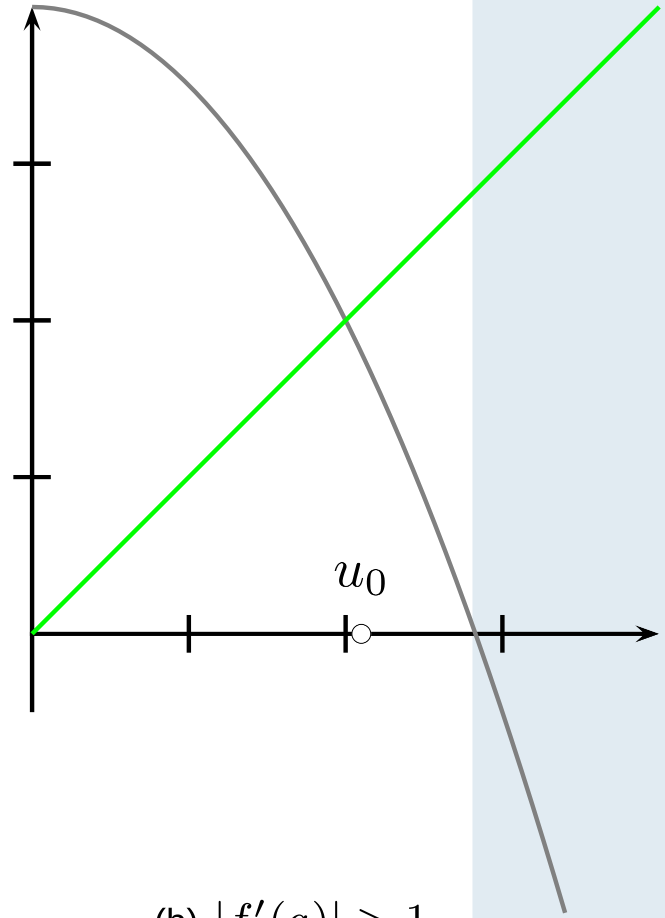


(a) $|f'(a)| < 1$ (b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

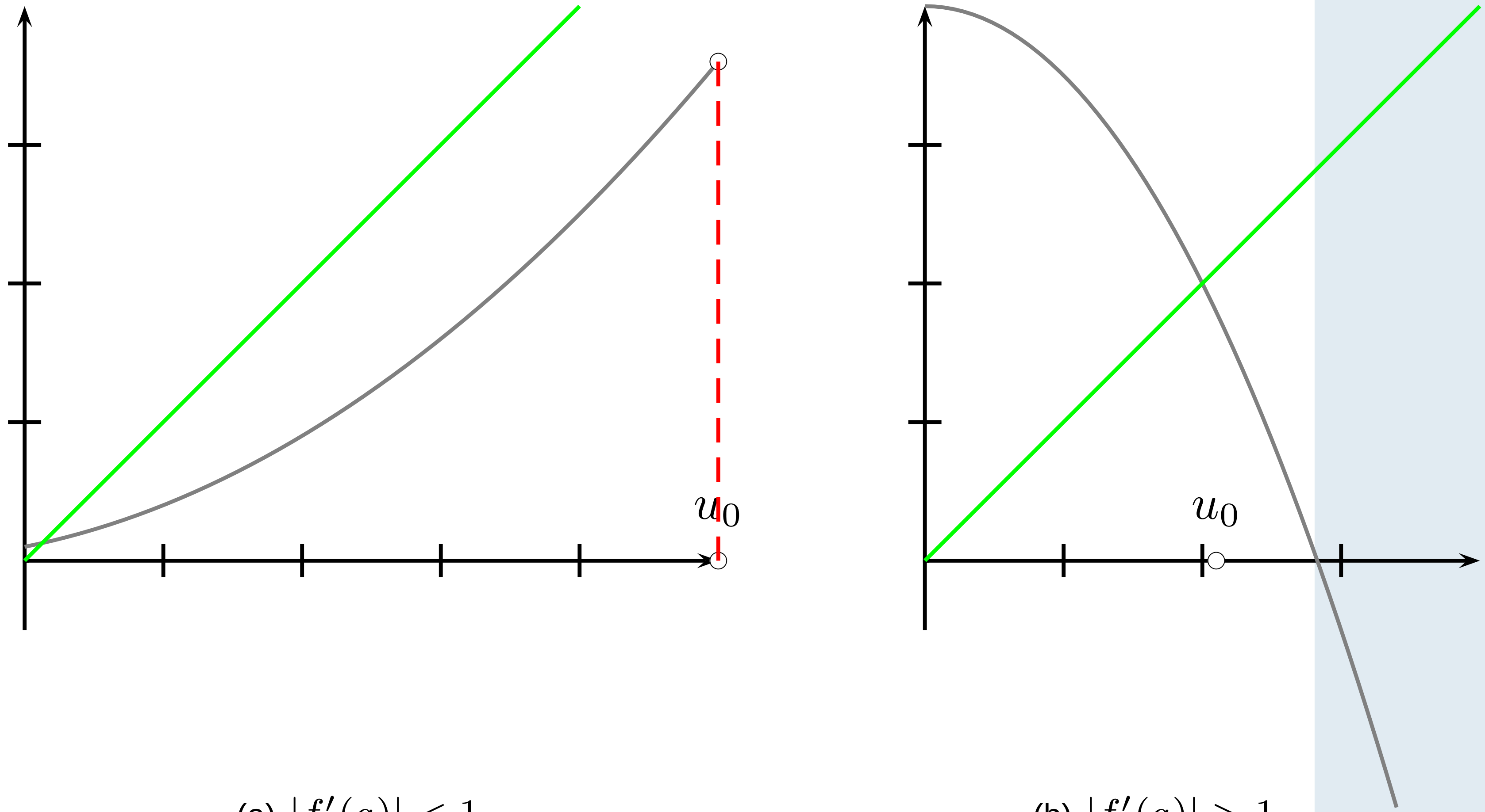


(a) $|f'(a)| < 1$



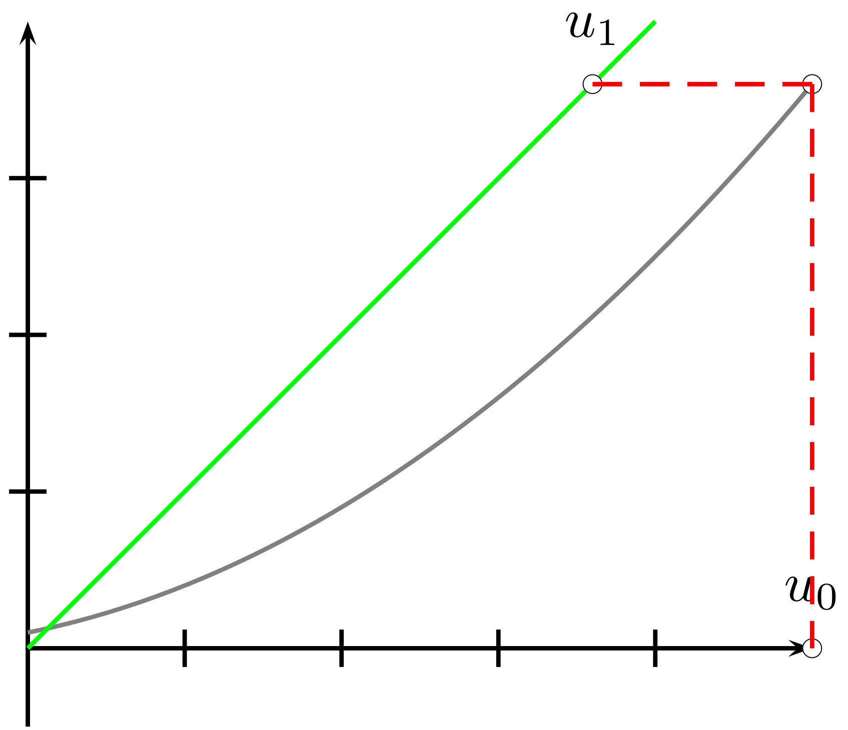
(b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

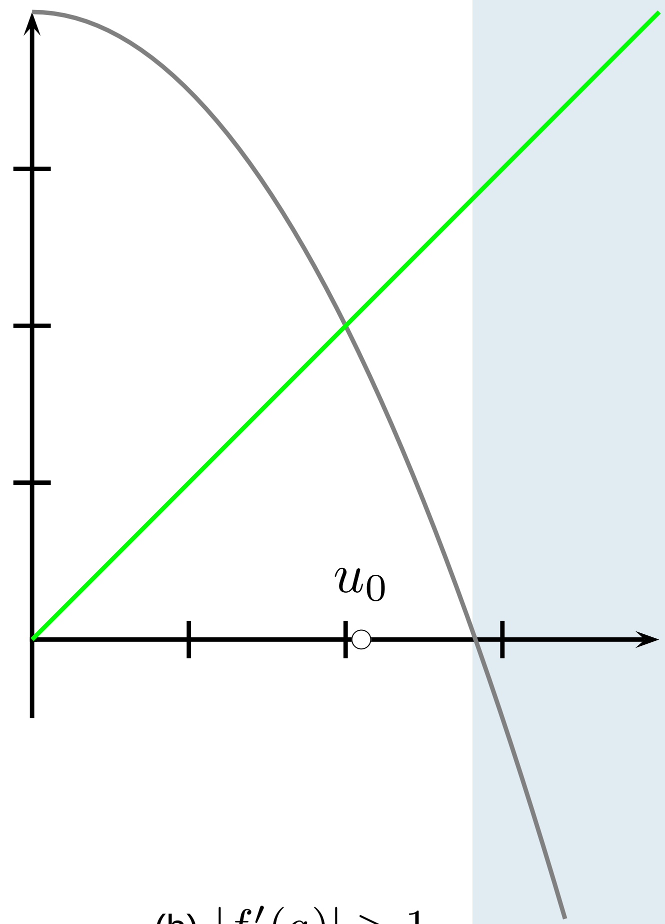


(a) $|f'(a)| < 1$ (b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

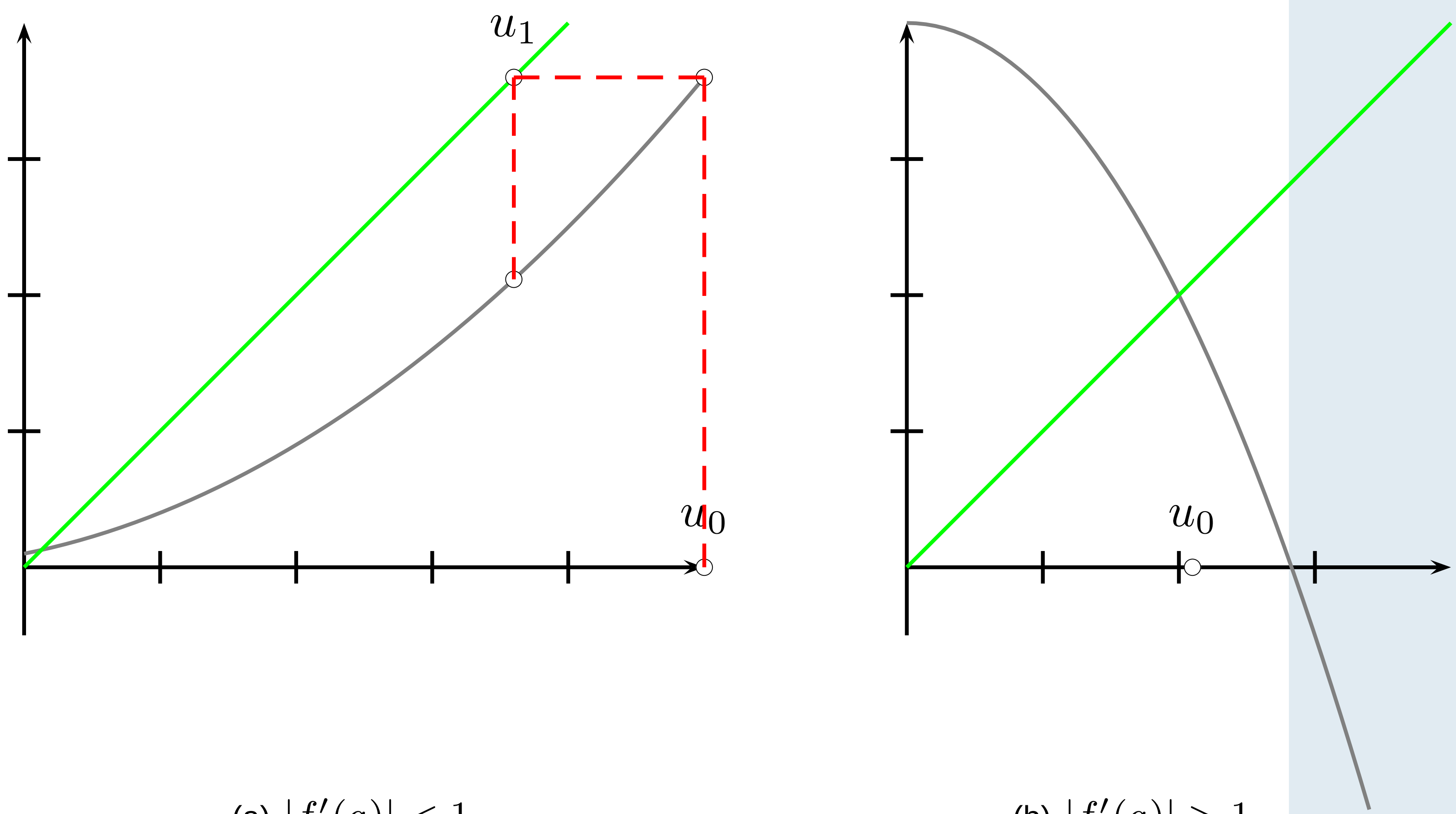


(a) $|f'(a)| < 1$



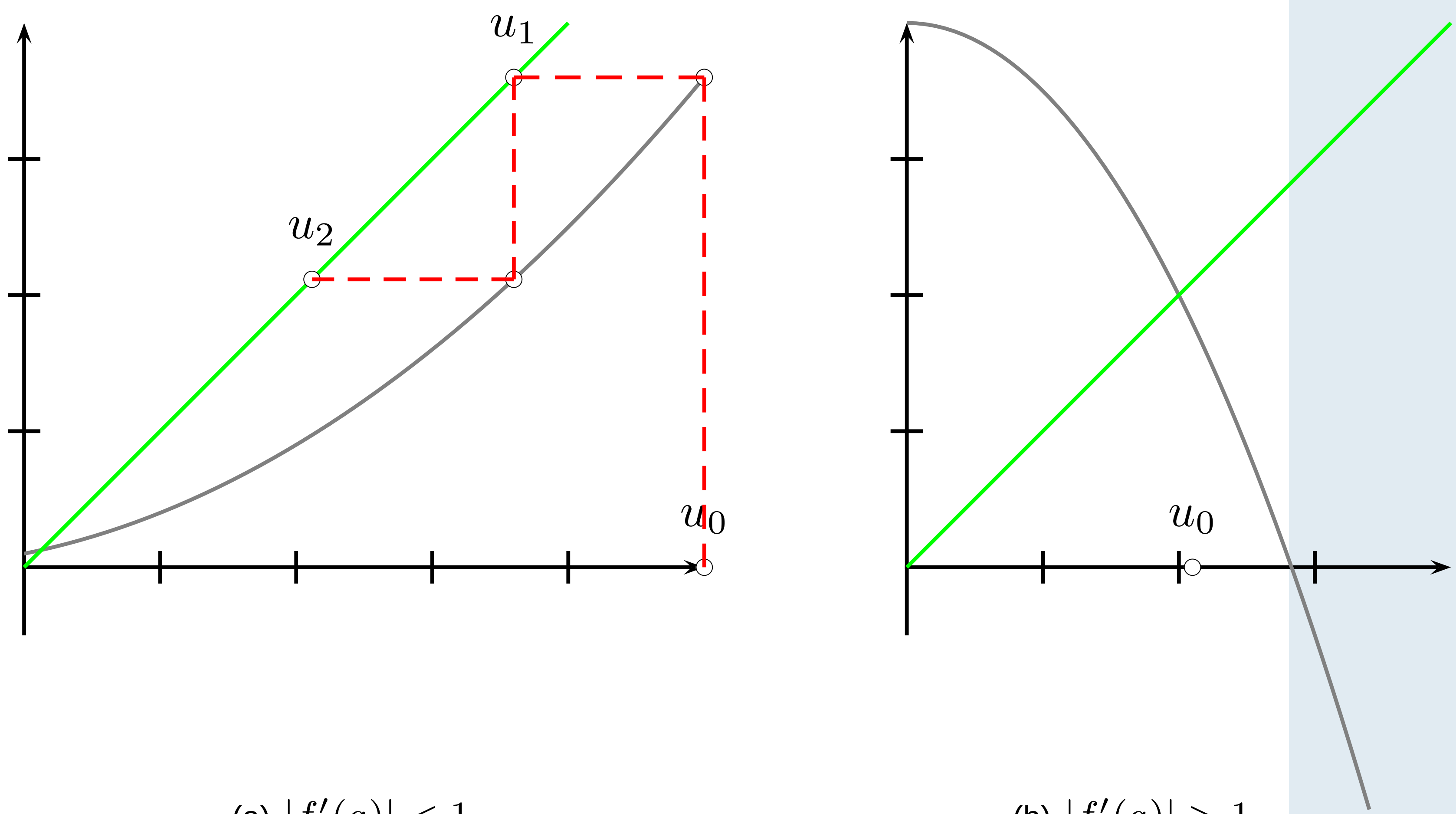
(b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –



(a) $|f'(a)| < 1$ (b) $|f'(a)| > 1$

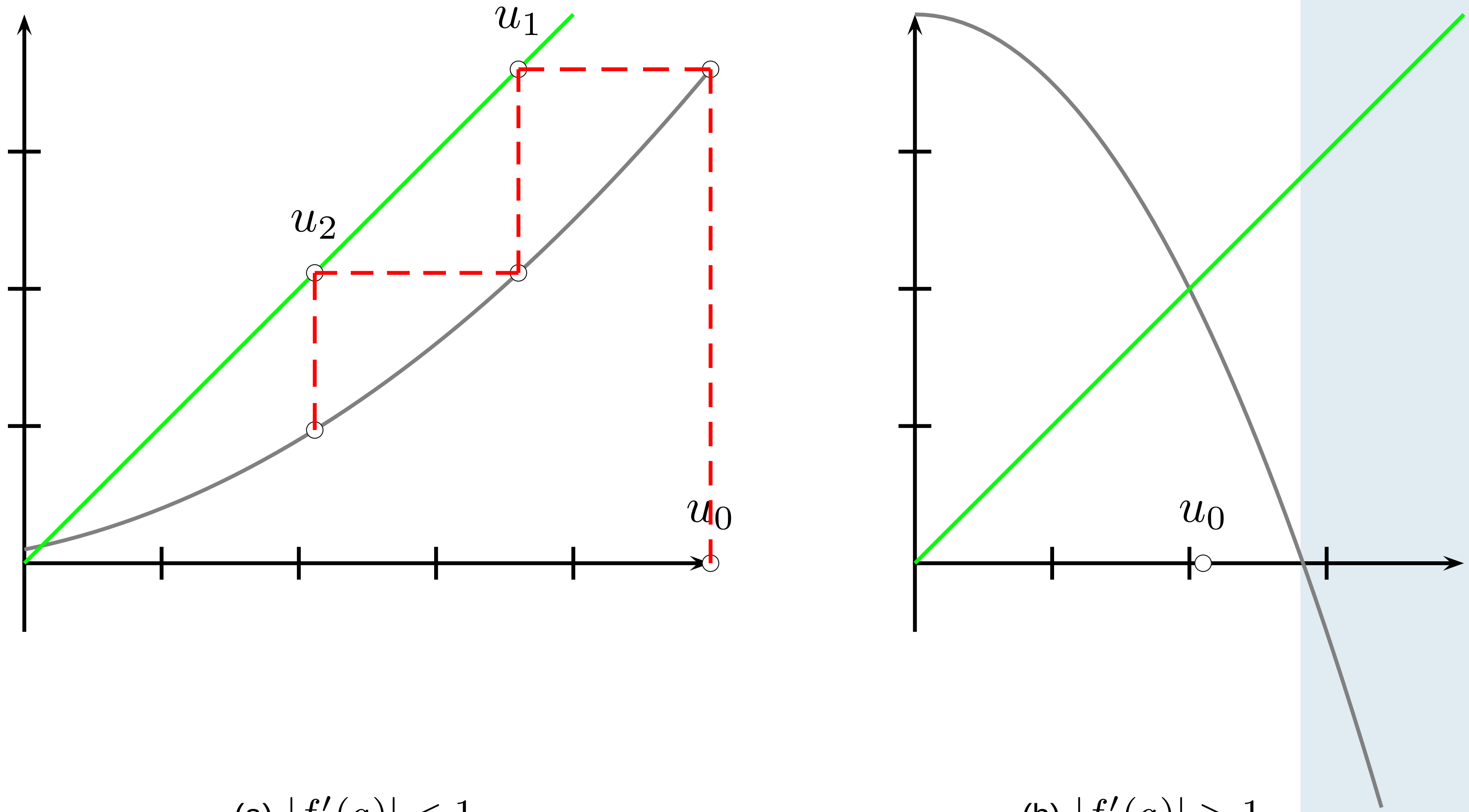
FIG. 1 –



(a) $|f'(a)| < 1$

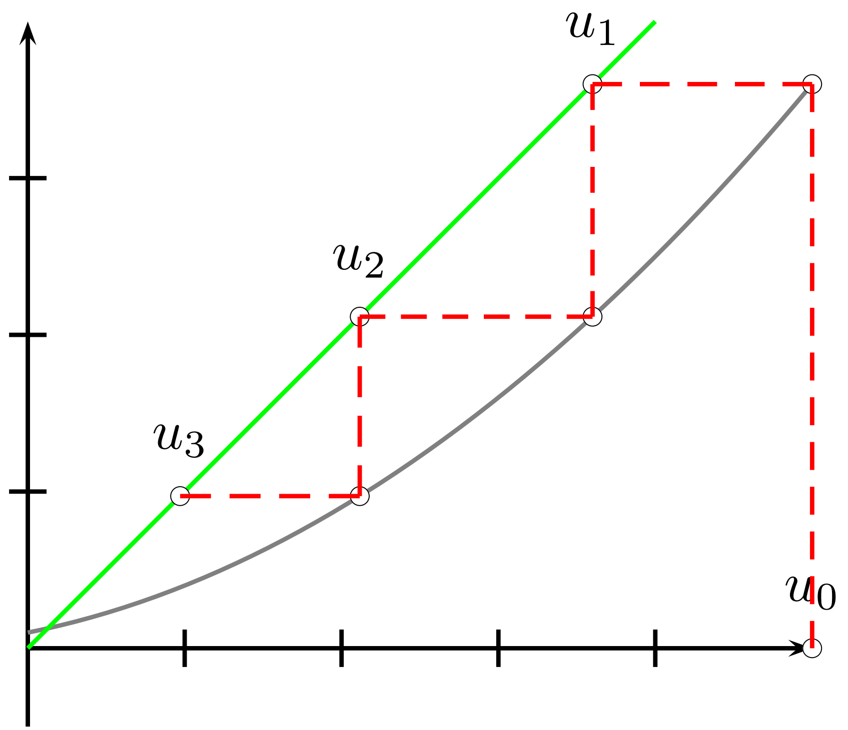
(b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

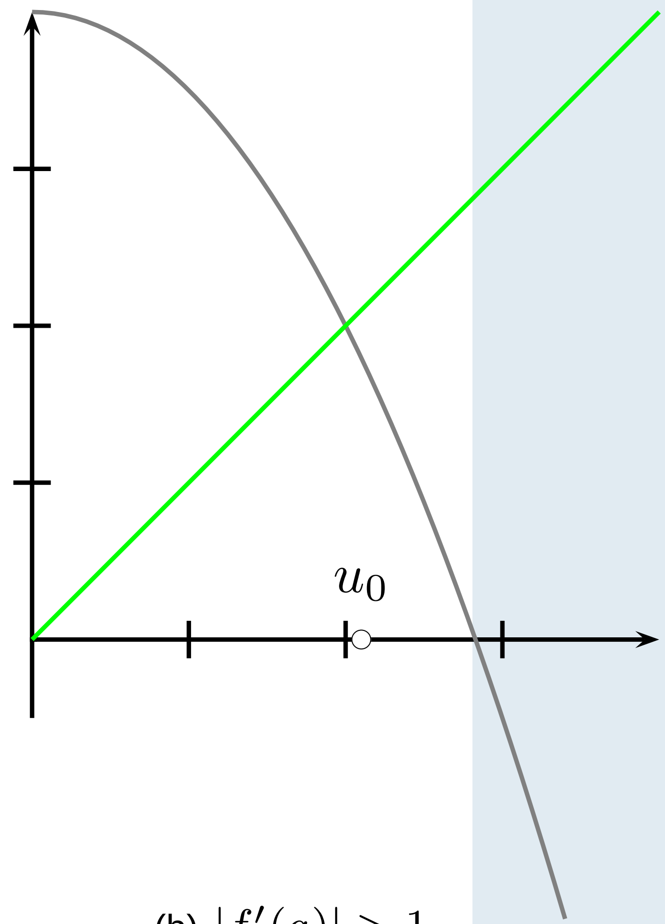


(a) $|f'(a)| < 1$ (b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

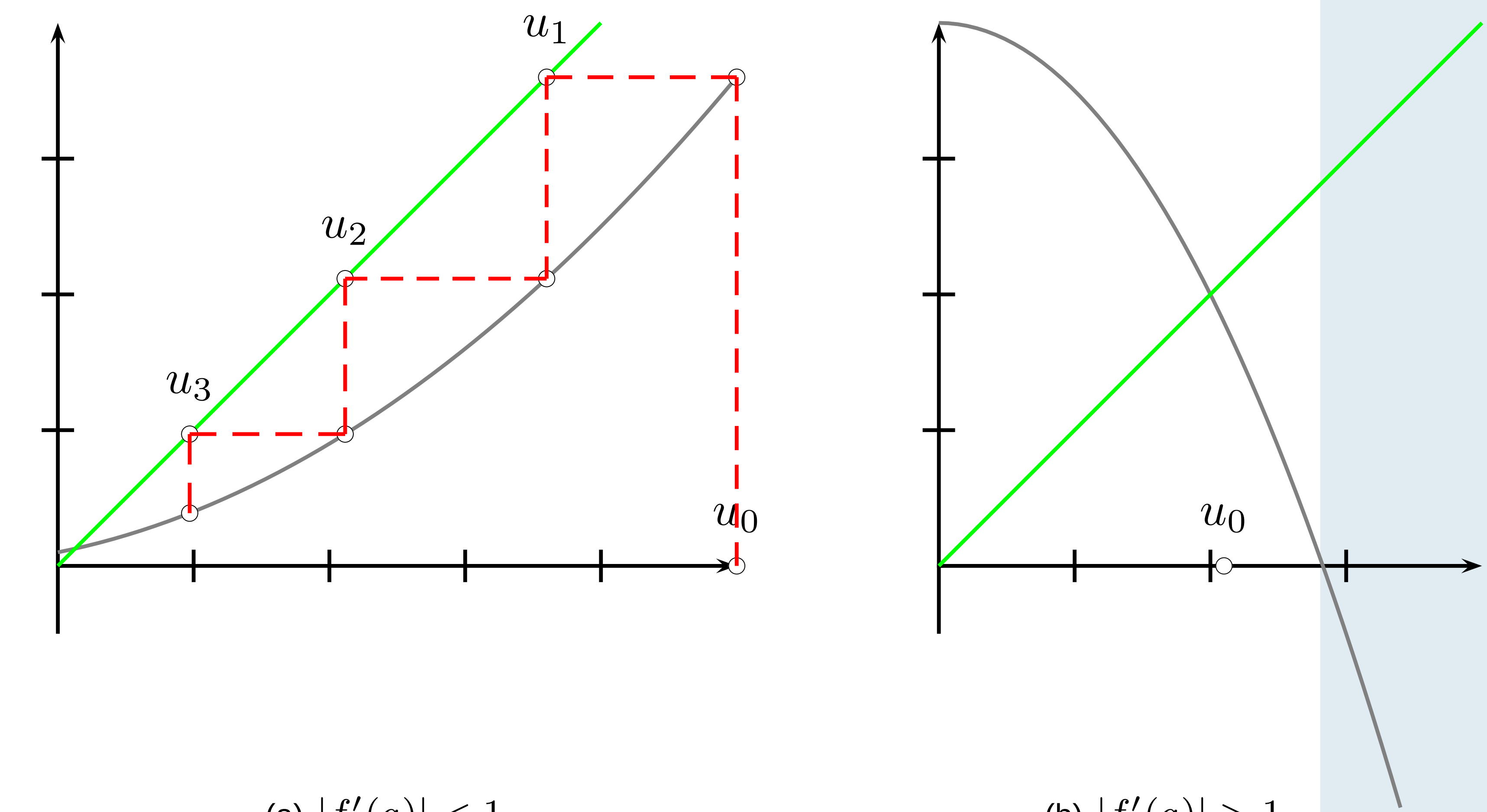


(a) $|f'(a)| < 1$



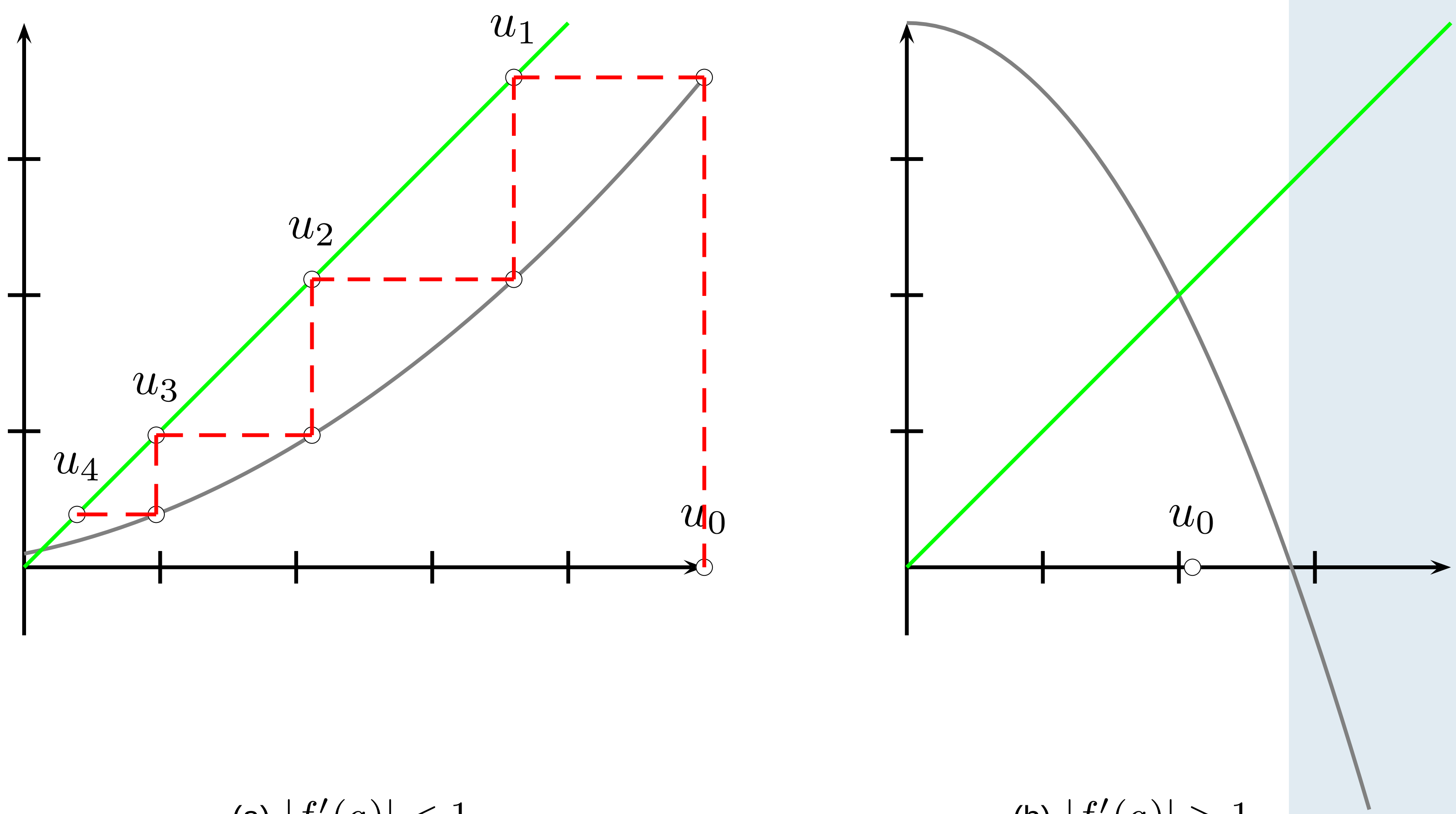
(b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –



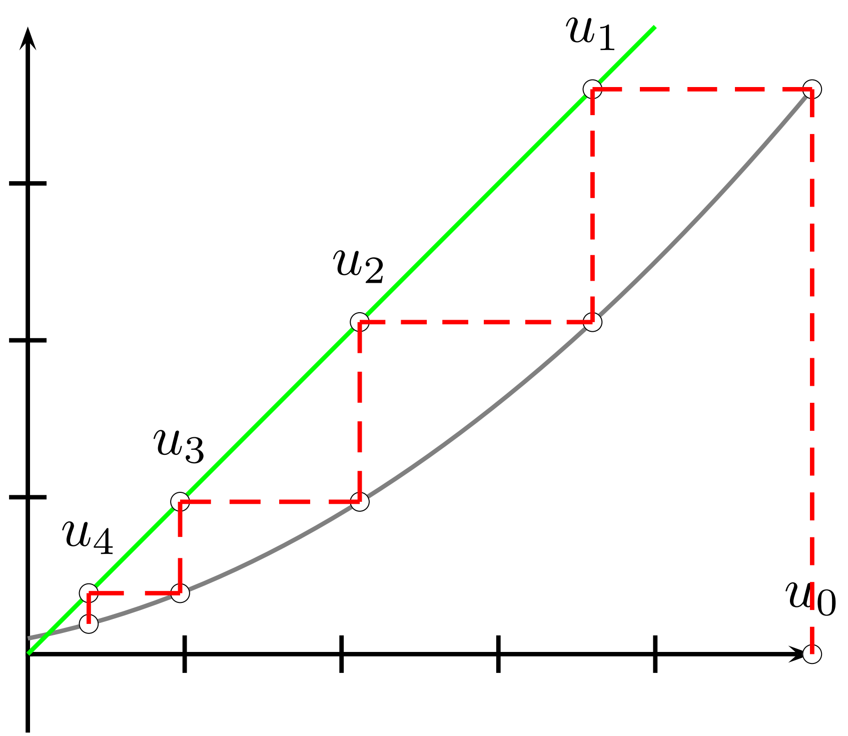
(a) $|f'(a)| < 1$ (b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

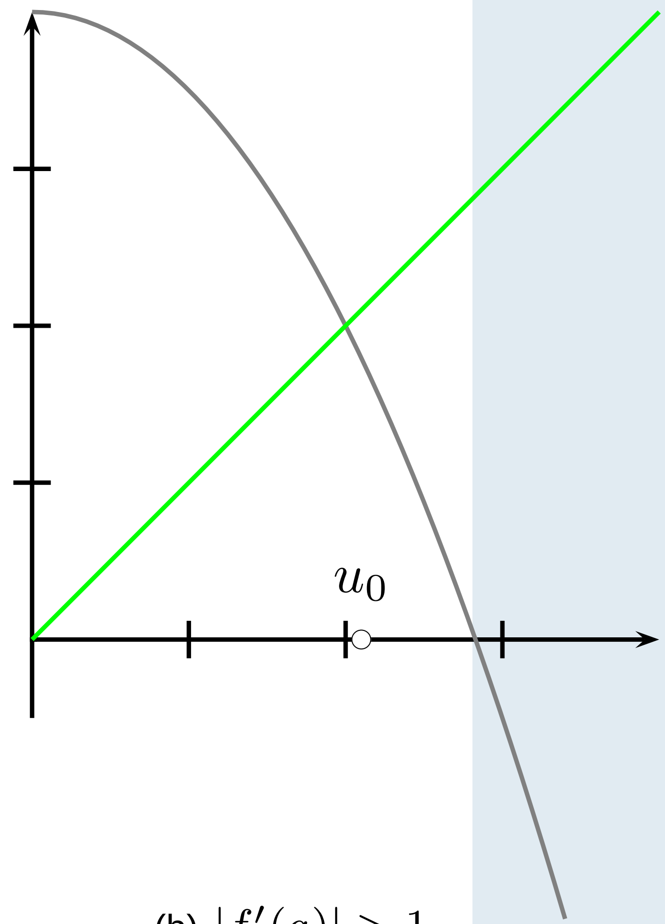


(a) $|f'(a)| < 1$ (b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

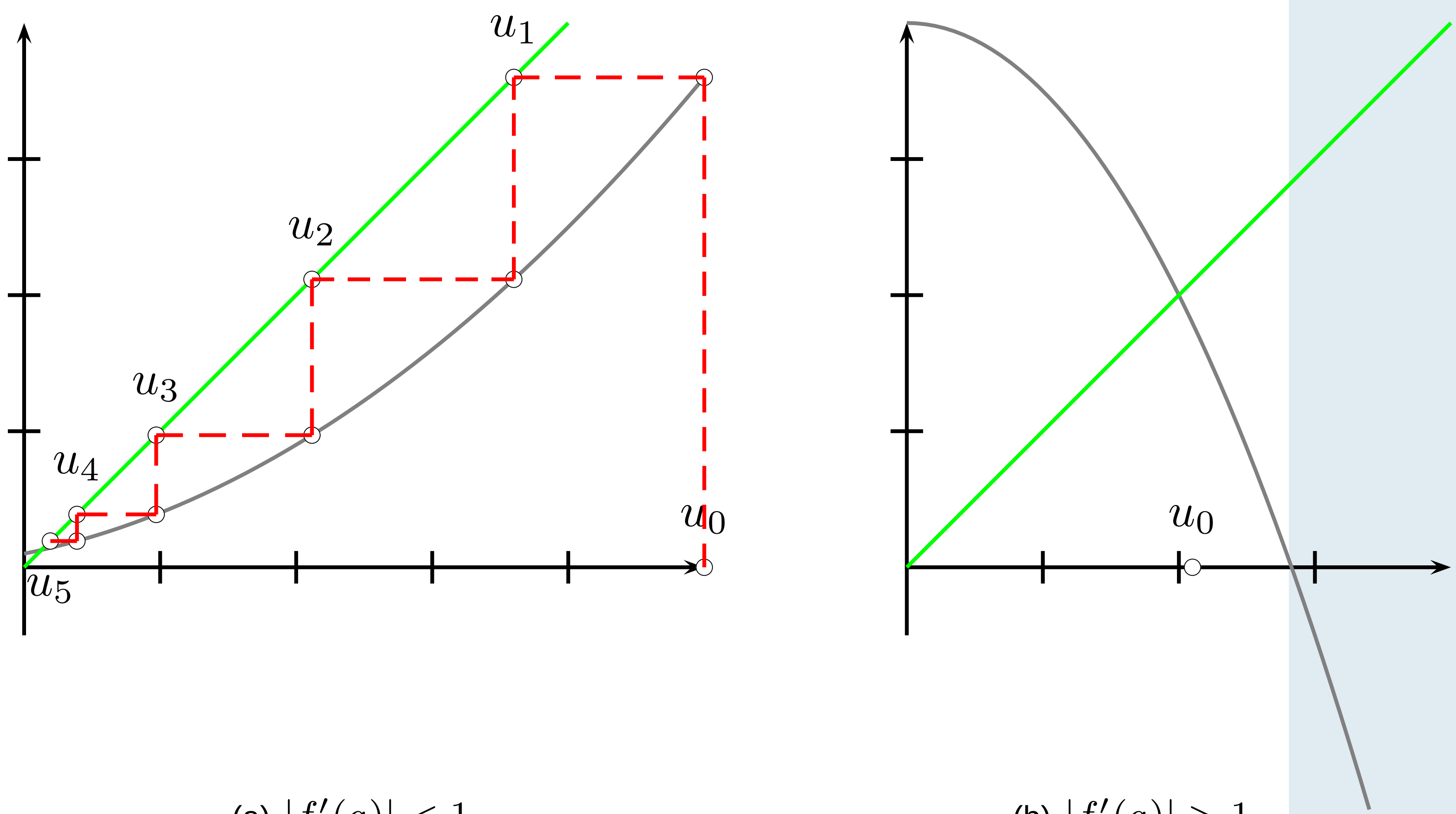


(a) $|f'(a)| < 1$



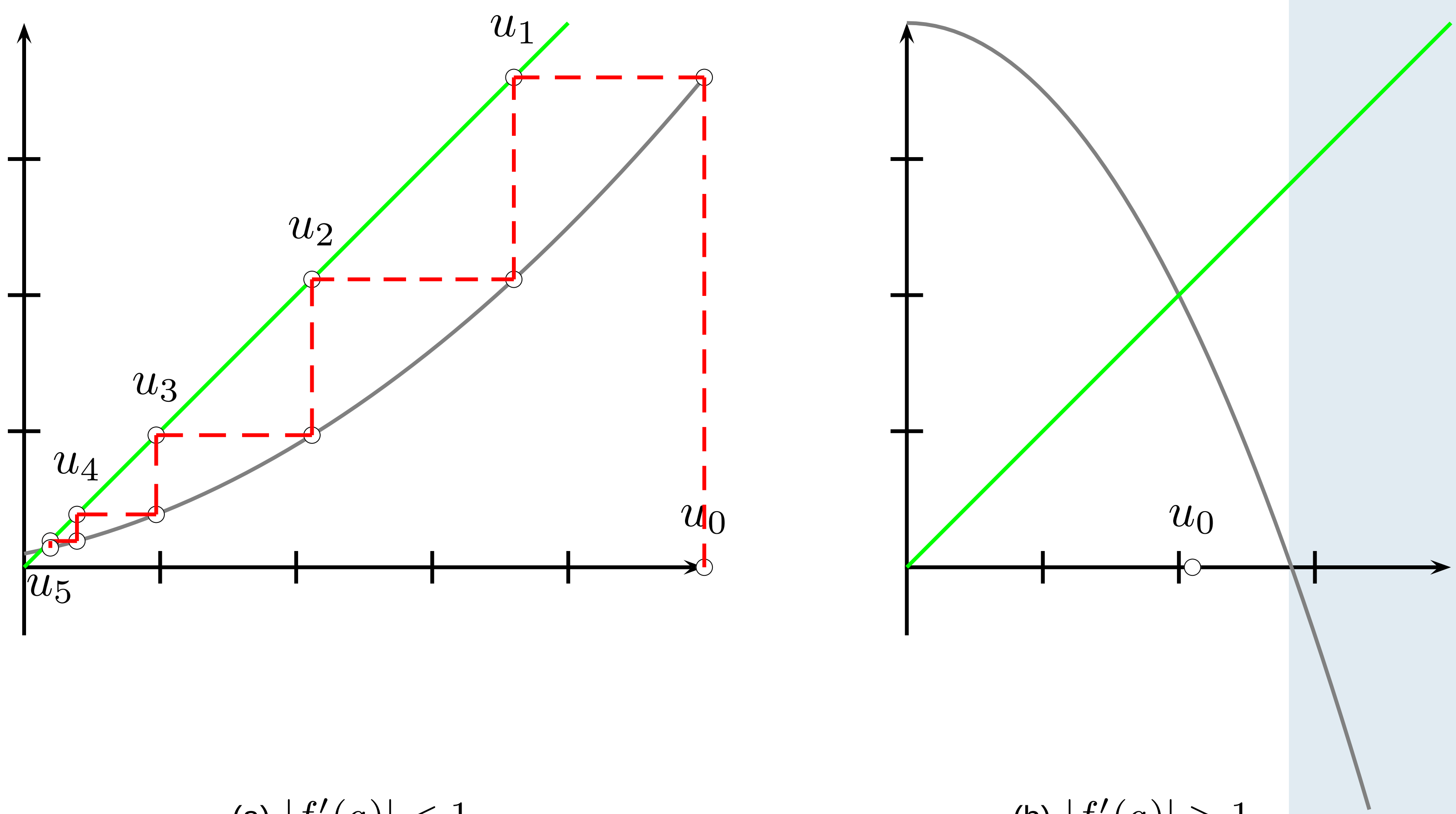
(b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –



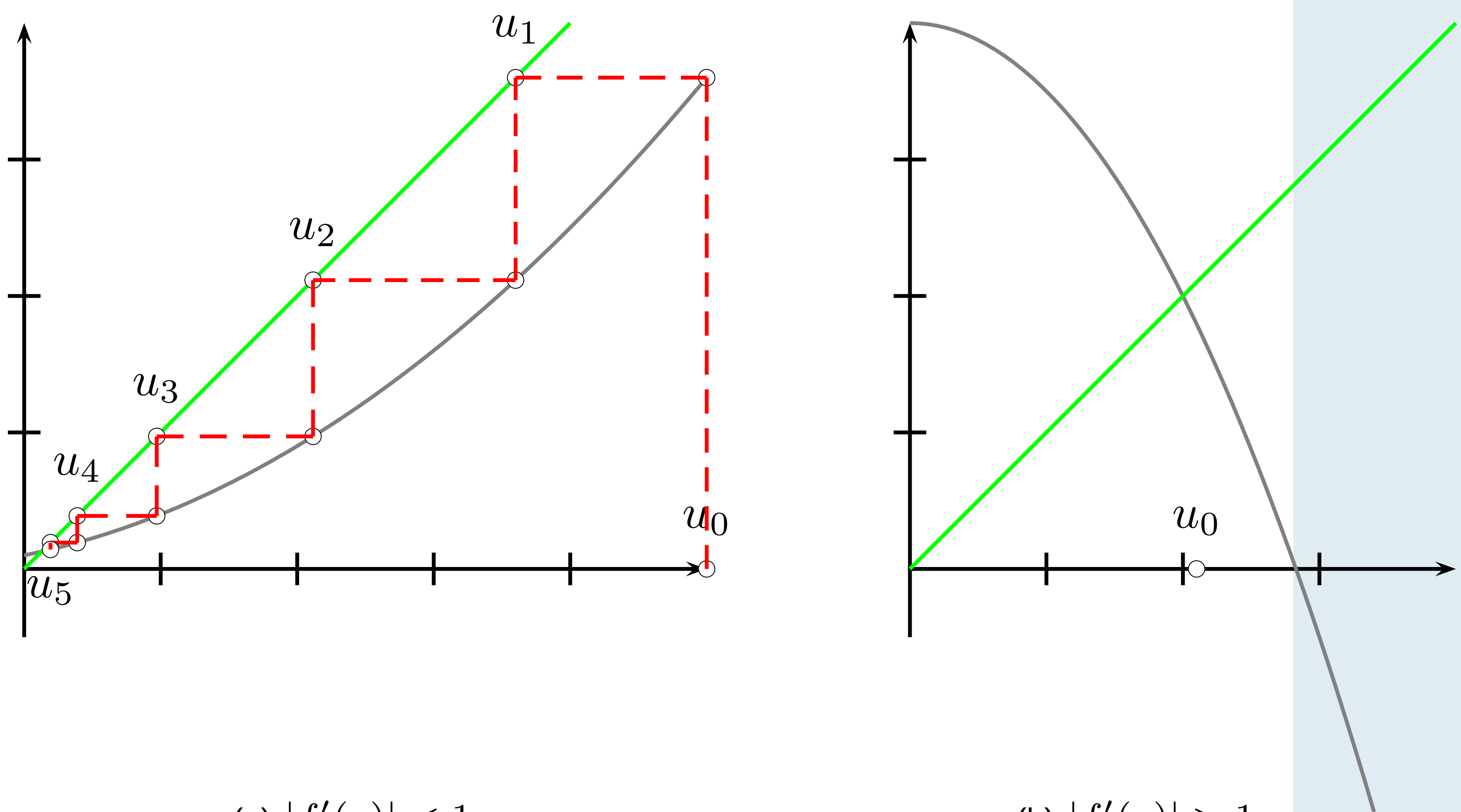
(a) $|f'(a)| < 1$ (b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –



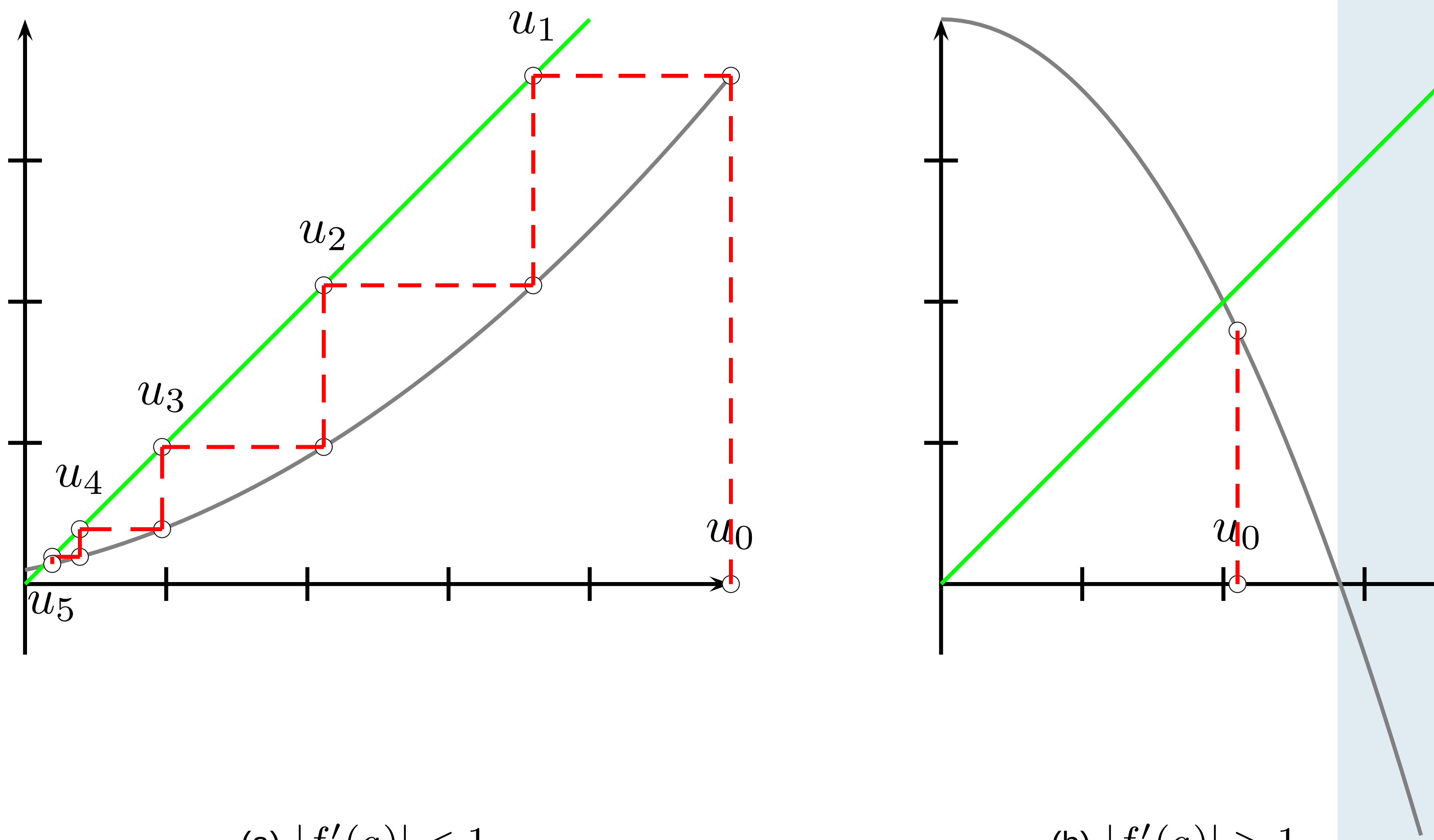
(a) $|f'(a)| < 1$ (b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –



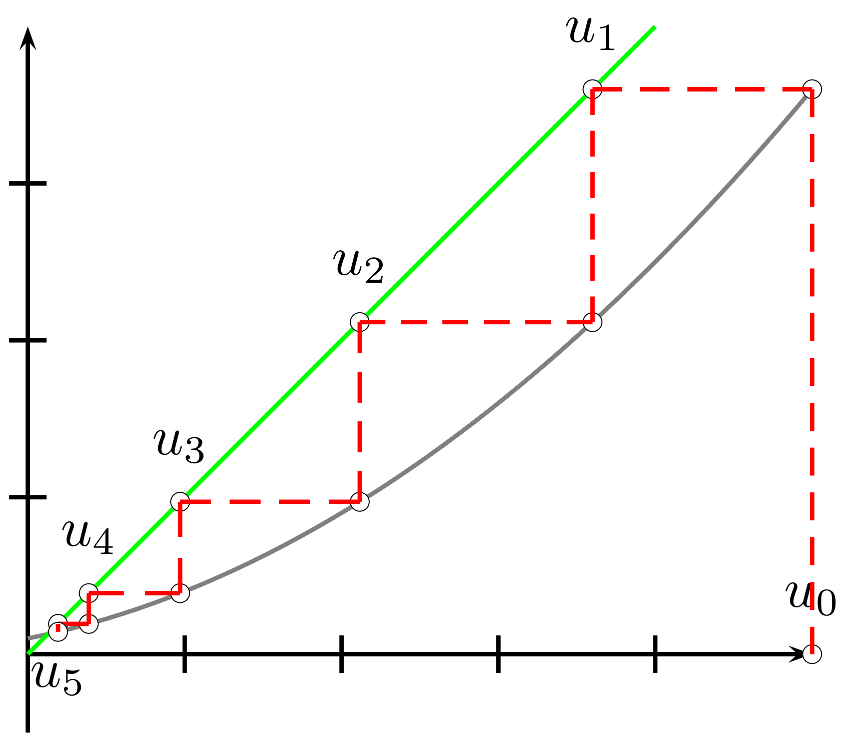
(a) $|f'(a)| < 1$ (b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

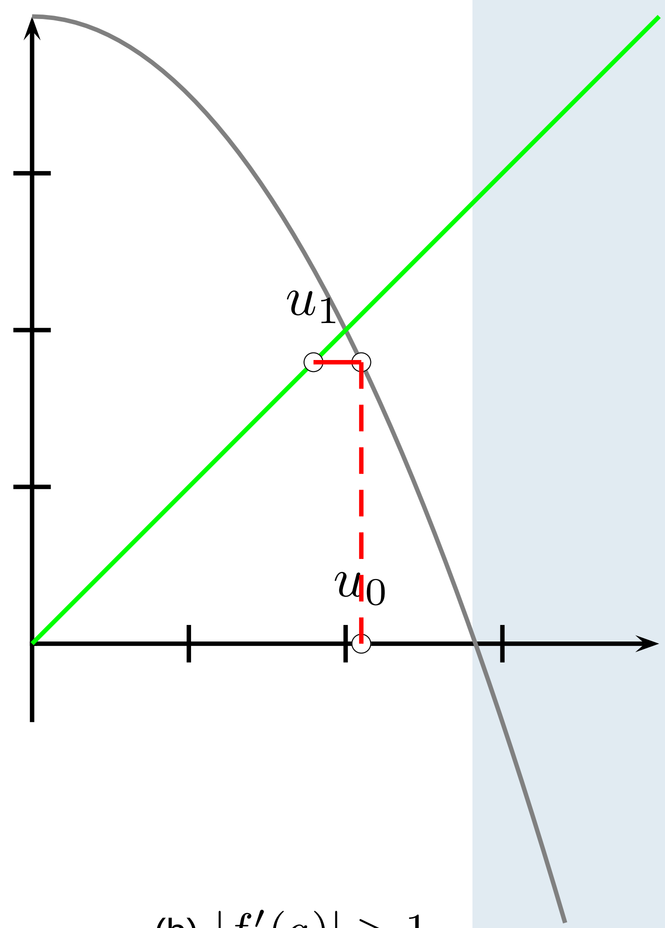


(a) $|f'(a)| < 1$ (b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

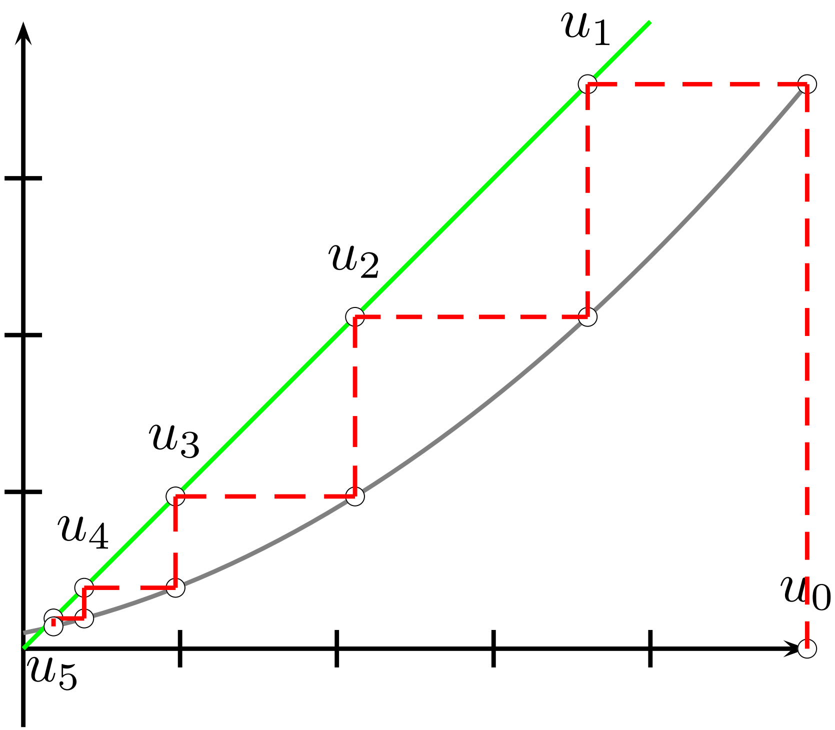


(a) $|f'(a)| < 1$

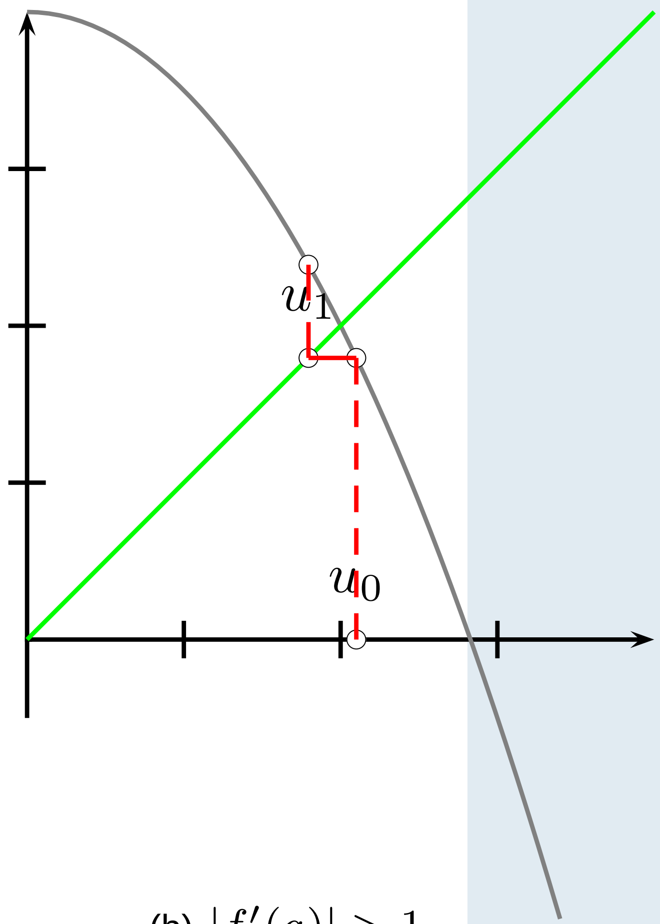


(b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

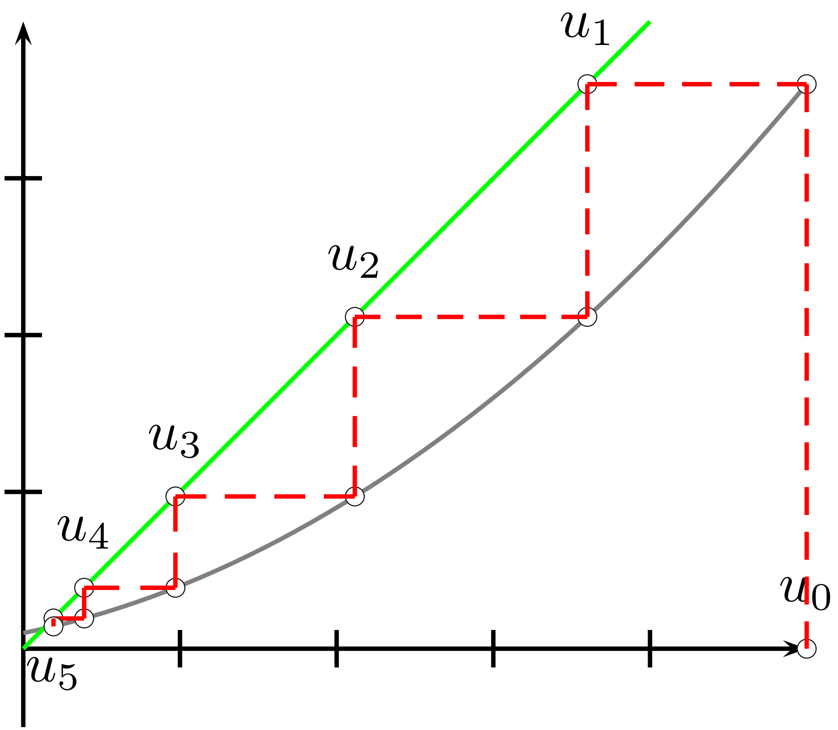


(a) $|f'(a)| < 1$

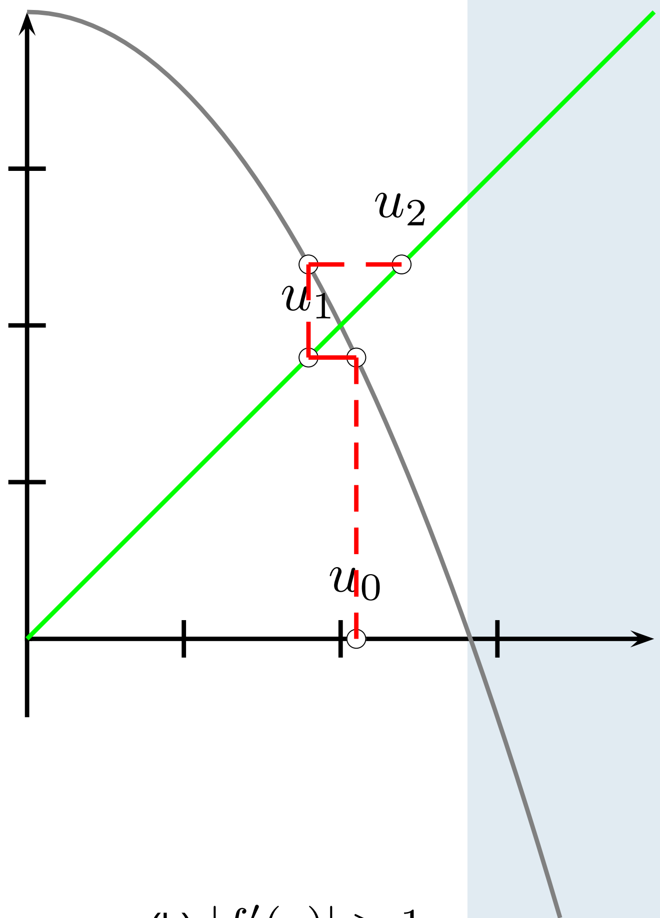


(b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

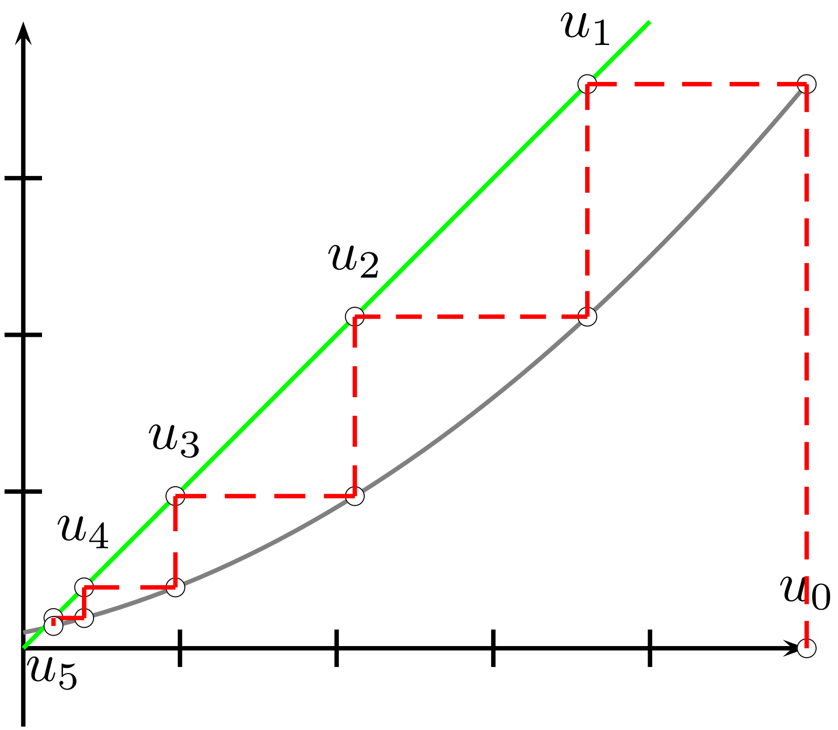


(a) $|f'(a)| < 1$

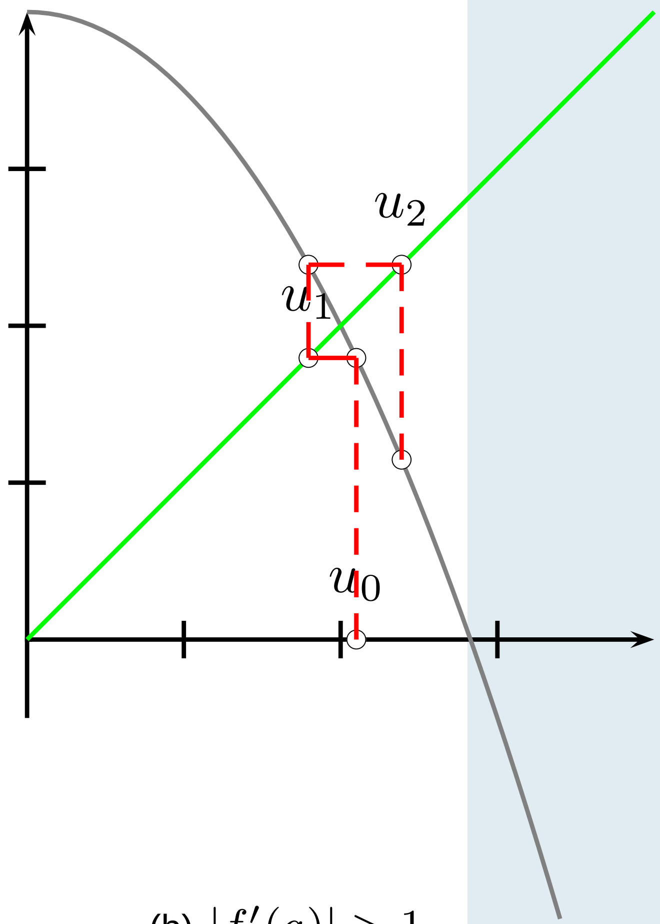


(b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

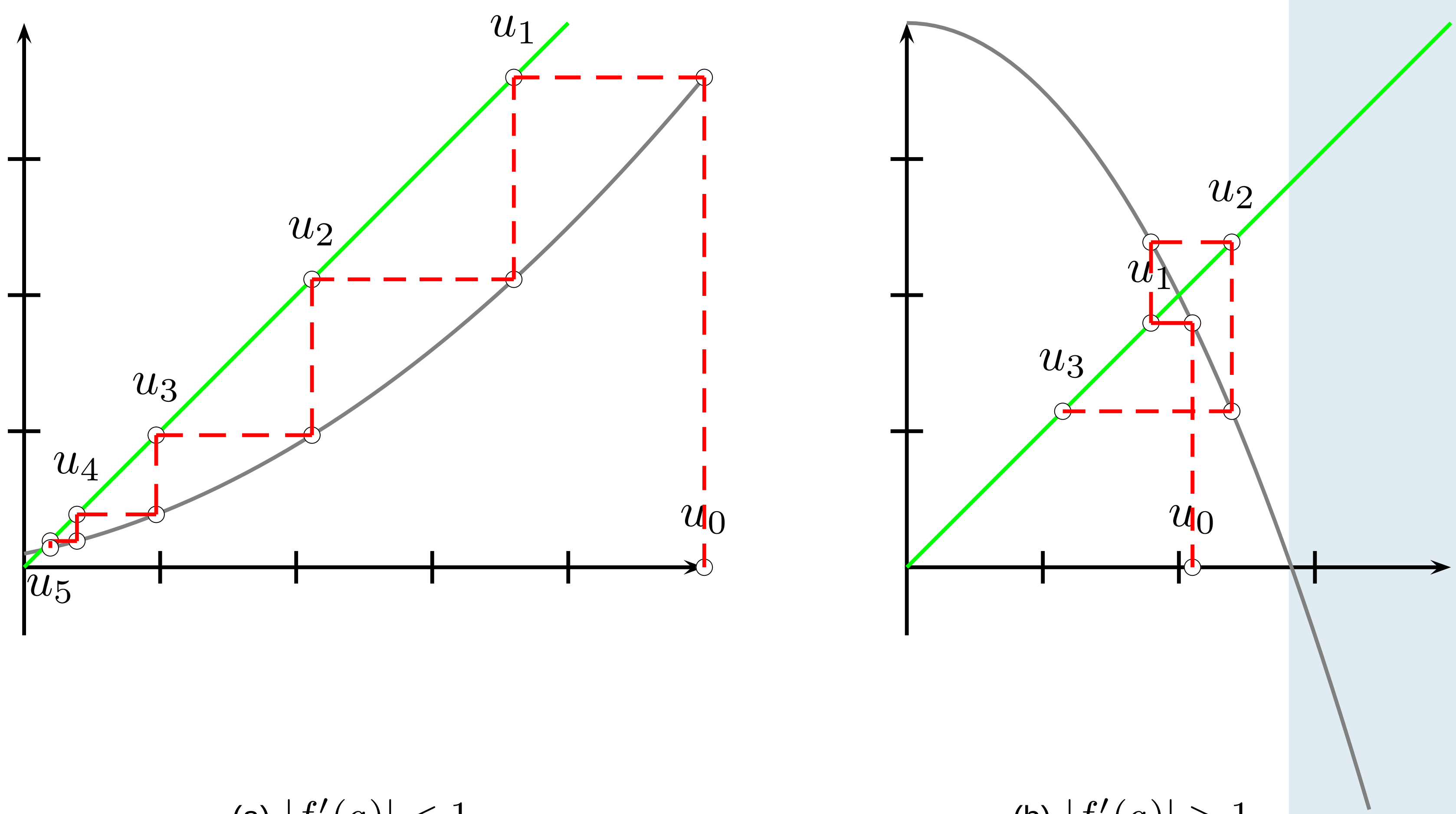


(a) $|f'(a)| < 1$



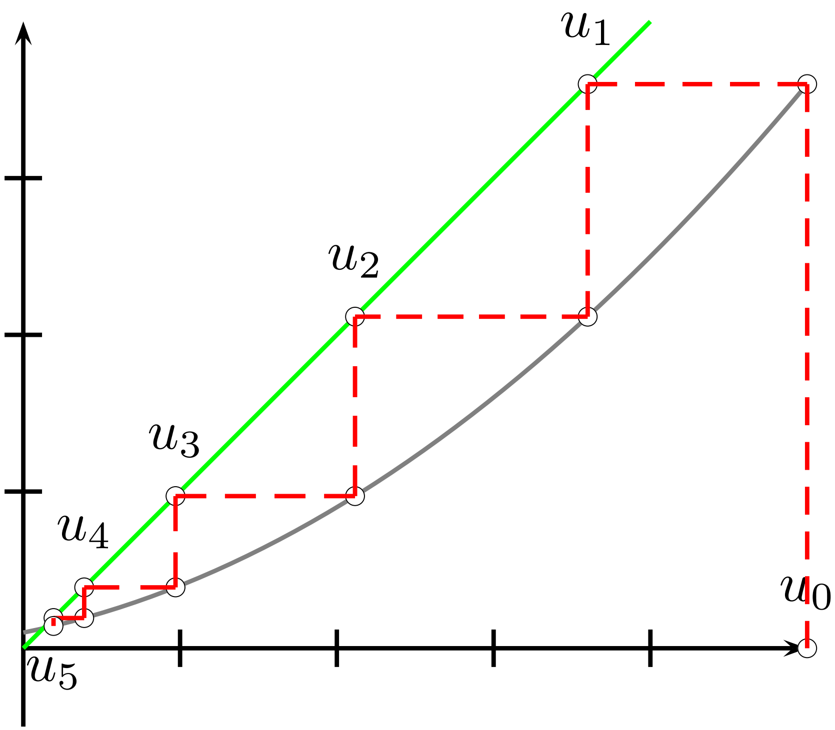
(b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

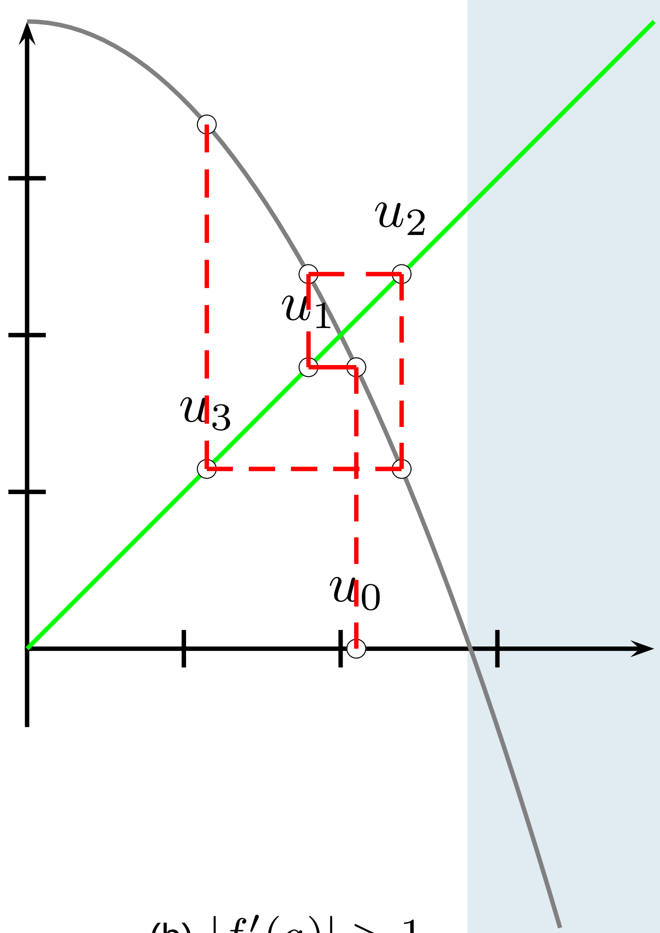


(a) $|f'(a)| < 1$ (b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

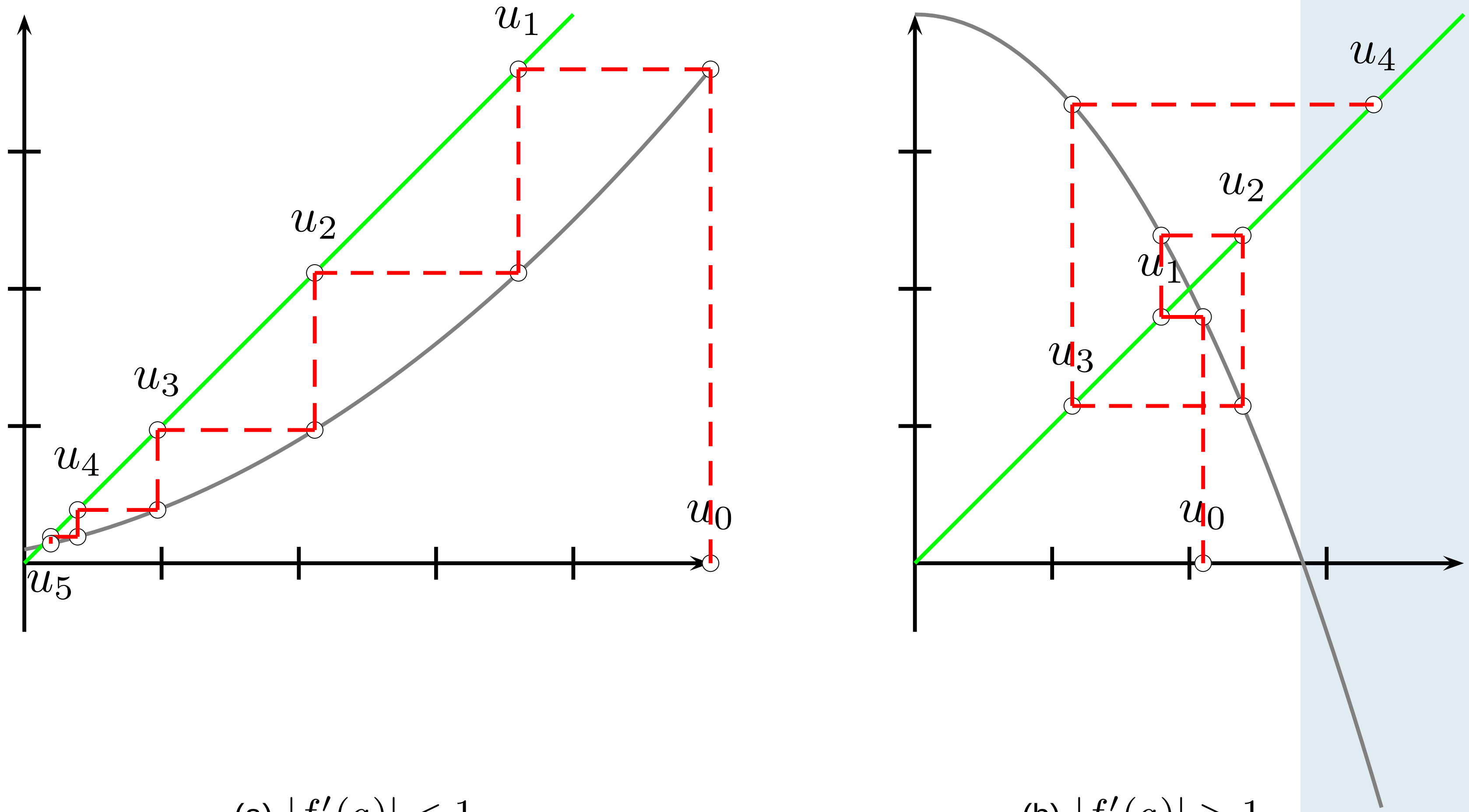


(a) $|f'(a)| < 1$



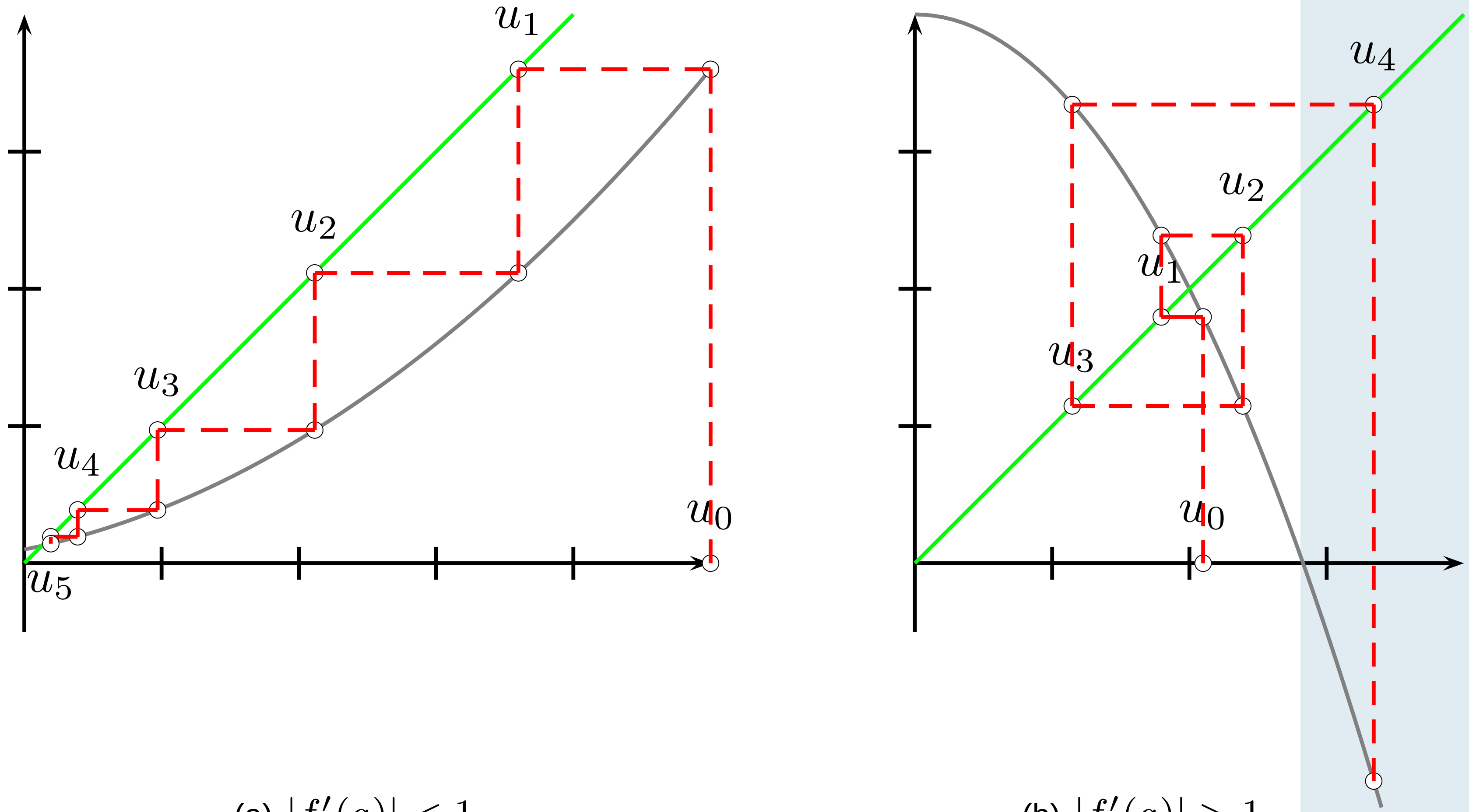
(b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –



(a) $|f'(a)| < 1$ (b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –



(a) $|f'(a)| < 1$ (b) $|f'(a)| > 1$

FIG. 1 –

Résolution d'équation

on cherche a résoudre une équation de type

$$f(x) = 0$$

où f n'est pas forcément linéaire.

on cherche a résoudre une équation de type

$$f(x) \quad = \quad 0$$

où f n'est pas forcément linéaire.

Il n'y a pas forcément de solution analytique (ex : racines des polynômes de degré > 5).

on cherche a résoudre une équation de type

$$f(x) = 0$$

où f n'est pas forcément linéaire.

Il n'y a pas forcément de solution analytique (ex : racines des polynômes de degré > 5).

$\Longrightarrow$*Il faut une méthode itérative*

Résolution de $f(x) = 0$

- Soit une fonction $f : R^n \to R^n$
  - continue sur . . .
  - dérivable sur . . .
  - C^n sur . . .

Résolution de $f(x) = 0$

- Soit une fonction $f : R^n \to R^n$
  - continue sur . . .
  - dérivable sur . . .
  - C^n sur . . .
- Principe :
  trouver une suite récurrente d'ordre 1 :

$$u_{k+1} = g(u_k)$$

qui converge vers la solution et telle que :

Résolution de $f(x) = 0$

- Soit une fonction $f : R^n \to R^n$
  - continue sur . . .
  - dérivable sur . . .
  - C^n sur . . .
- Principe :
  trouver une suite récurrente d'ordre 1 :

$$u_{k+1} = g(u_k)$$

  qui converge vers la solution et telle que :
  - g est contractante

Résolution de $f(x) = 0$

- Soit une fonction $f : R^n \rightarrow R^n$
  - continue sur ...
  - dérivable sur ...
  - C^n sur ...
- Principe :
  trouver une suite récurrente d'ordre 1 :

$$u_{k+1} = g(u_k)$$

  qui converge vers la solution et telle que :
  - g est contractante
  - la solution est point fixe de g,

$$f(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(r) = r$$

Toute solution de l'équation $f(x) = 0$ sera point fixe de la fonction g avec

$$g(x) = f(x) + x$$

Résolution de $f(x) = 0$

Toute solution de l'équation $f(x) = 0$ sera point fixe de la fonction g avec

$$g(x) = f(x) + x$$

Si g est alors une fonction contractante sur un intervalle I, la suite

$$\begin{cases} v_0 \in I \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$

convergera vers une solution.

Résolution de $f(x) = 0$

Toute solution de l'équation $f(x) = 0$ sera point fixe de la fonction g avec

$$g(x) = f(x) + x$$

Si g est alors une fonction contractante sur un intervalle I, la suite

$$\begin{cases} v_0 \in I \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$

convergera vers une solution.

Mais la fonction g définie de cette façon n'est pas forcément contractante.

Résolution de $f(x) = 0$ (suite)

On peut trouver un grand nombre de fonctions permettant de résoudre le problème.

Résolution de $f(x) = 0$ (suite)

On peut trouver un grand nombre de fonctions permettant de résoudre le problème.
Par exemple :
Résoudre $x^2 - x = 0$, peut être résolu avec :

- $g(x) = x^2$: v_n tend vers 0 avec $v_0 = 0,8$ et diverge avec $v_0 = 1,2$
- $g(x) = \sqrt{x}$: v_n tend vers 1 avec $v_0 = 0,5$, de même avec $v_0 = 2$

Résolution de $f(x) = 0$ (suite)

On peut trouver un grand nombre de fonctions permettant de résoudre le problème.
Par exemple :
Résoudre $x^2 - x = 0$, peut être résolu avec :

- $g(x) = x^2$: v_n tend vers 0 avec $v_0 = 0,8$ et diverge avec $v_0 = 1,2$
- $g(x) = \sqrt{x}$: v_n tend vers 1 avec $v_0 = 0,5$, de même avec $v_0 = 2$

On choisie g et v_0

- Dans le but

Résolution de $f(x) = 0$ (suite)

On peut trouver un grand nombre de fonctions permettant de résoudre le problème.
Par exemple :
Résoudre $x^2 - x = 0$, peut être résolu avec :

- $g(x) = x^2$: v_n tend vers 0 avec $v_0 = 0,8$ et diverge avec $v_0 = 1,2$
- $g(x) = \sqrt{x}$: v_n tend vers 1 avec $v_0 = 0,5$, de même avec $v_0 = 2$

On choisie g et v_0

- Dans le but
  - d'améliorer la convergence (linéaire ou quadratique)

Résolution de $f(x) = 0$ (suite)

On peut trouver un grand nombre de fonctions permettant de résoudre le problème.
Par exemple :
Résoudre $x^2 - x = 0$, peut être résolu avec :

- $g(x) = x^2$: v_n tend vers 0 avec $v_0 = 0,8$ et diverge avec $v_0 = 1,2$
- $g(x) = \sqrt{x}$: v_n tend vers 1 avec $v_0 = 0,5$, de même avec $v_0 = 2$

On choisie g et v_0

- Dans le but
  - d'améliorer la convergence (linéaire ou quadratique)
  - de converger vers une autre solution quand il y en a plusieurs

Résolution de $f(x) = 0$ (suite)

On peut trouver un grand nombre de fonctions permettant de résoudre le problème.
Par exemple :
Résoudre $x^2 - x = 0$, peut être résolu avec :

- $g(x) = x^2$: v_n tend vers 0 avec $v_0 = 0,8$ et diverge avec $v_0 = 1,2$
- $g(x) = \sqrt{x}$: v_n tend vers 1 avec $v_0 = 0,5$, de même avec $v_0 = 2$

On choisie g et v_0

- Dans le but
  - d'améliorer la convergence (linéaire ou quadratique)
  - de converger vers une autre solution quand il y en a plusieurs
- en fonction

Résolution de $f(x) = 0$ (suite)

On peut trouver un grand nombre de fonctions permettant de résoudre le problème.
Par exemple :
Résoudre $x^2 - x = 0$, peut être résolu avec :

- $g(x) = x^2$: v_n tend vers 0 avec $v_0 = 0,8$ et diverge avec $v_0 = 1,2$
- $g(x) = \sqrt{x}$: v_n tend vers 1 avec $v_0 = 0,5$, de même avec $v_0 = 2$

On choisie g et v_0

- Dans le but
  - d'améliorer la convergence (linéaire ou quadratique)
  - de converger vers une autre solution quand il y en a plusieurs
- en fonction
  - des propriétés de f (dévirabilité, monotonie)

Résolution de $f(x) = 0$ (suite)

On peut trouver un grand nombre de fonctions permettant de résoudre le problème.
Par exemple :
Résoudre $x^2 - x = 0$, peut être résolu avec :

- $g(x) = x^2$: v_n tend vers 0 avec $v_0 = 0,8$ et diverge avec $v_0 = 1,2$
- $g(x) = \sqrt{x}$: v_n tend vers 1 avec $v_0 = 0,5$, de même avec $v_0 = 2$

On choisie g et v_0

- Dans le but
  - d'améliorer la convergence (linéaire ou quadratique)
  - de converger vers une autre solution quand il y en a plusieurs
- en fonction
  - des propriétés de f (dévirabilité, monotonie)
  - de la connaissance de f (peut-on calculer la dérivée ? Peut-on isoler les solutions ?)

Dichotomie

Méthode de dichotomie

Conditions :

- $n = 1$ (*i.e.* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
- f est continue
- f change de signe sur sa racine :
  Soient $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $\exists r \in [a, b] t.q. f(r) = 0$ et

$$\left\{\begin{array}{lll} \forall x \in [a, r[& f(x) & > & 0 \\ \forall x \in]r, b] & f(x) & < & 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{lll} \forall x \in [a, r[& f(x) & < & 0 \\ \forall x \in]r, b[& f(x) & > & 0 \end{array}\right.$$

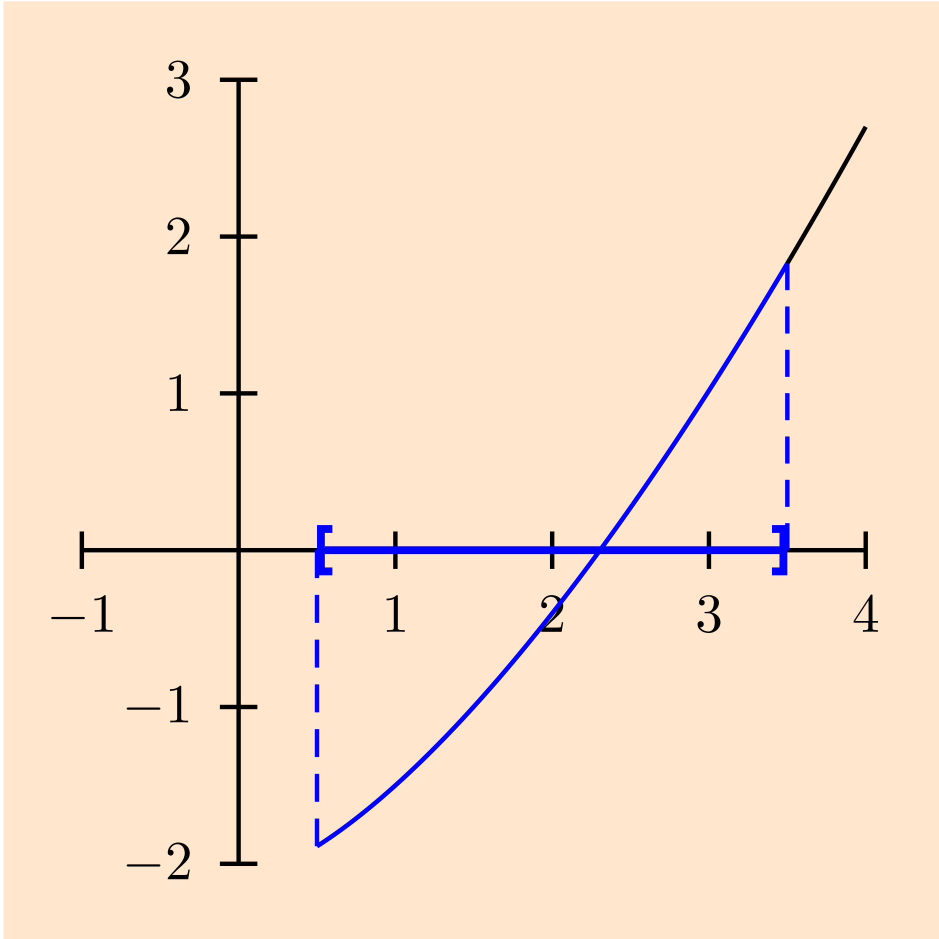
Algorithme

Données : f, $a < b$.
début
  tant que $|f(c)| > \varepsilon$
  faire
    $c \leftarrow a + \frac{b+a}{2}$
    si $f(a)f(c) < 0$
    alors
      $b \leftarrow c$
    sinon
      $a \leftarrow c$
  Résultat : c
fin

merci à MANUEL LUQUE

Algorithme

Données : f, $a < b$.
début
  tant que $|f(c)| > \varepsilon$
  faire
    $c \leftarrow a + \frac{b+a}{2}$
    si $f(a)f(c) < 0$
    alors
      $b \leftarrow c$
    sinon
      $a \leftarrow c$
  Résultat : c
fin



merci à Manuel Luque

Algorithme

Données : f, $a < b$.

début

  tant que $|f(c)| > \varepsilon$

  faire

    $c \leftarrow a + \frac{b+a}{2}$

    si $f(a)f(c) < 0$

    alors

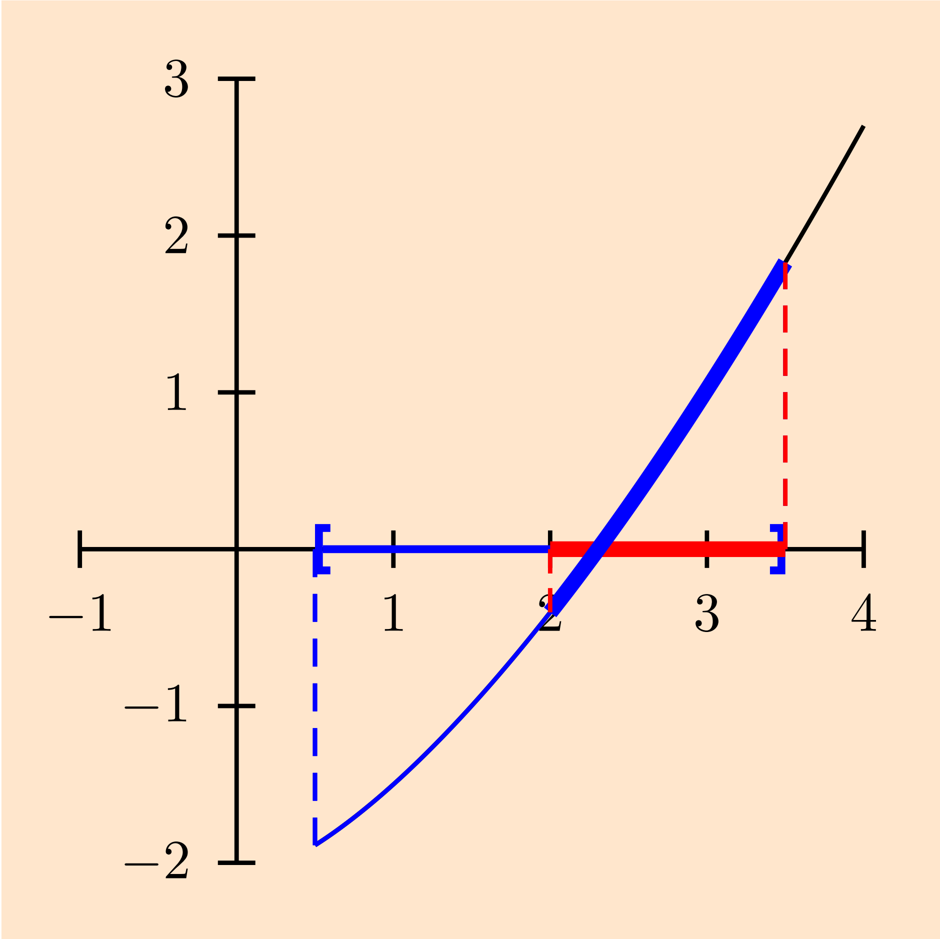
      $b \leftarrow c$

    sinon

      $a \leftarrow c$

  Résultat : c

fin



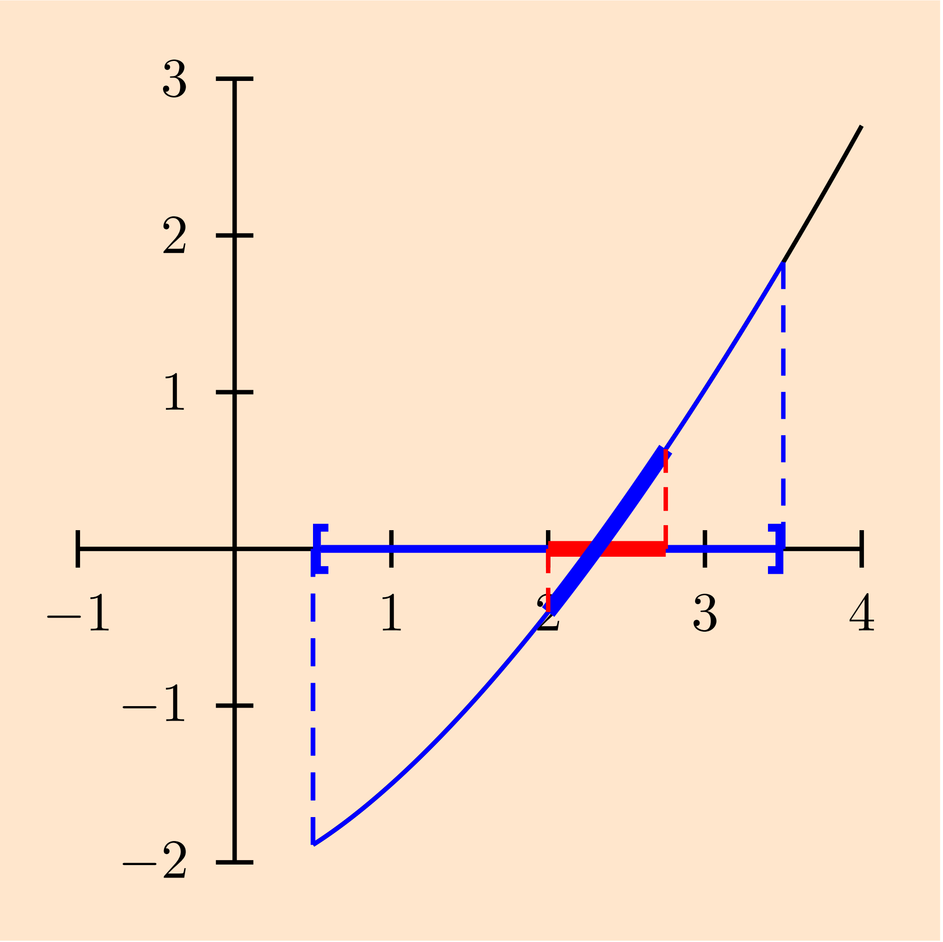
merci à Manuel Luque

Données : f, $a < b$.

début

- **tant que** $|f(c)| > \varepsilon$
- **faire**
  - $c \leftarrow a + \frac{b+a}{2}$
  - **si** $f(a)f(c) < 0$
  - **alors**
    - $b \leftarrow c$
  - **sinon**
    - $a \leftarrow c$
- **Résultat** : c

fin



merci à Manuel Luque

Données : f, $a < b$.

début

tant que $|f(c)| > \varepsilon$

faire

$c \leftarrow a + \frac{b+a}{2}$

si $f(a)f(c) < 0$

alors

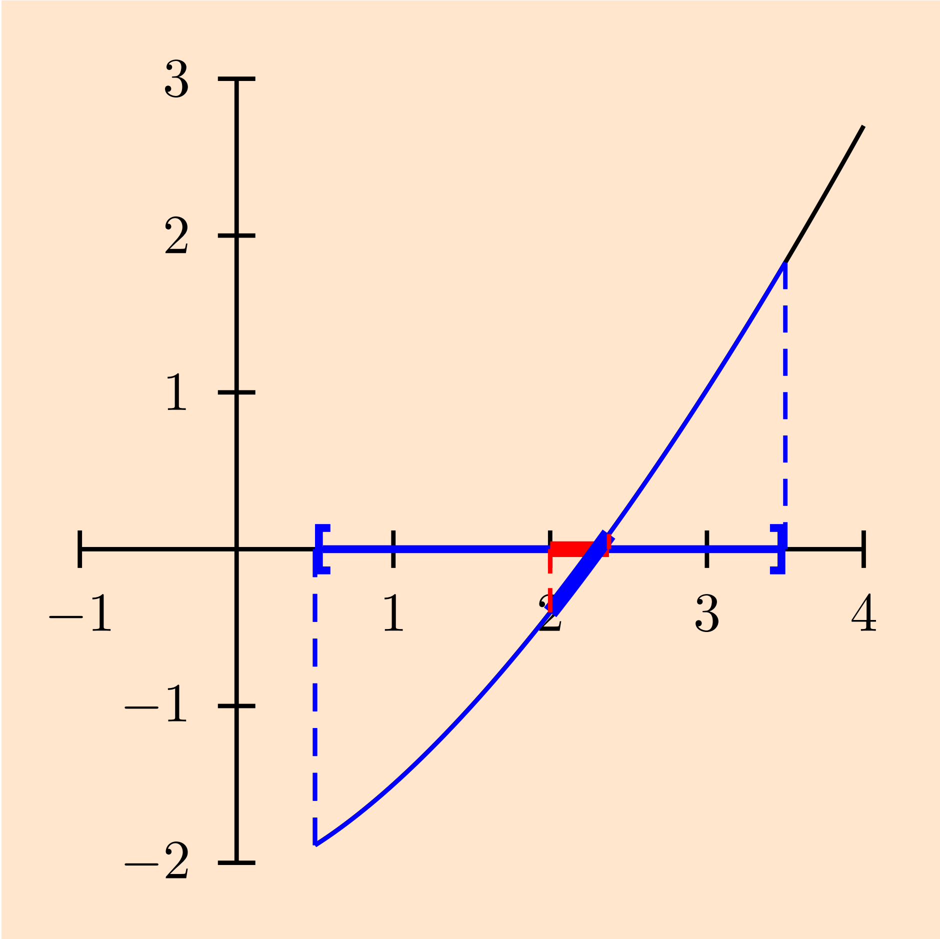
$b \leftarrow c$

sinon

$a \leftarrow c$

Résultat : c

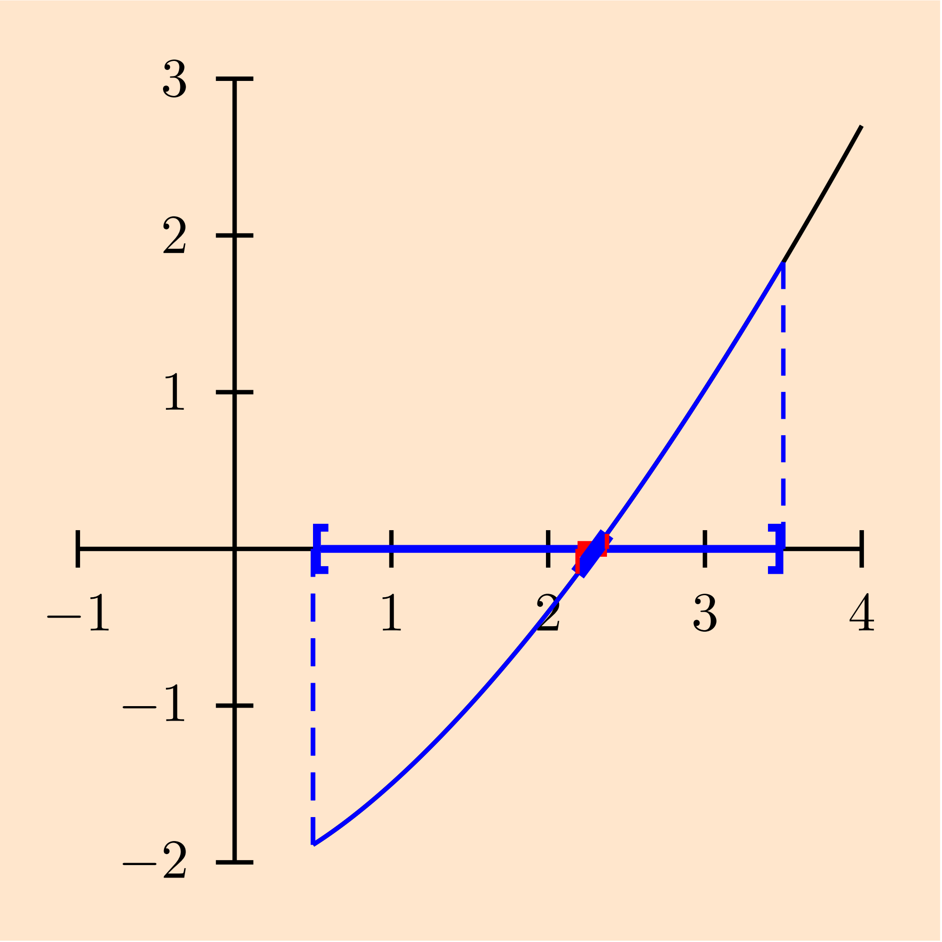
fin



merci à MANUEL LUQUE

Algorithme

Données : f, $a < b$.
début
  tant que $|f(c)| > \varepsilon$
  faire
    $c \leftarrow a + \frac{b+a}{2}$
    si $f(a)f(c) < 0$
    alors
      $b \leftarrow c$
    sinon
      $a \leftarrow c$
  Résultat : c
fin



merci à MANUEL LUQUE

Données : f, $a < b$.

début

  tant que $|f(c)| > \varepsilon$

  faire

    $c \leftarrow a + \frac{b+a}{2}$

    si $f(a)f(c) < 0$

    alors

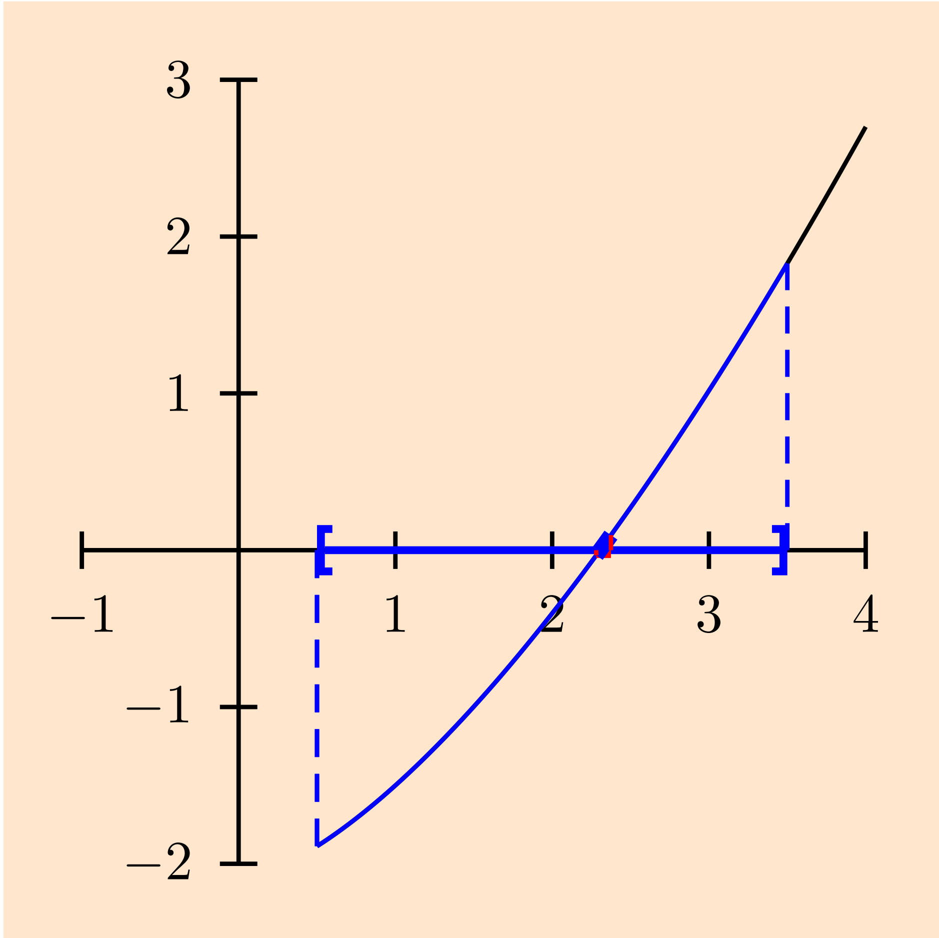
      $b \leftarrow c$

    sinon

      $a \leftarrow c$

  Résultat : c

fin



- Quelle est la fonction g ?
- La racine est-elle point fixe ?
- g est-elle contractante ?

merci à Manuel Luque

Étude de la méthode

- Il faut considérer la suite d'intervalles $I_k = [a_k, b_k]$,

$$
\begin{aligned}
I_0 &= [a, b] \\
I_{k+1} &= g(I_k) &= \begin{cases} \left[\frac{b_k - a_k}{2}, b_k\right] & \text{ou} \\ \left[a_k, \frac{b_k - a_k}{2}\right] \end{cases}
\end{aligned}
$$

Étude de la méthode

- Il faut considérer la suite d'intervalles $I_k = [a_k, b_k]$,

$$\begin{aligned} I_0 &= [a, b] \\ I_{k+1} &= g(I_k) &= \begin{cases} \left[\frac{b_k - a_k}{2}, b_k\right] & \text{ou} \\ \left[a_k, \frac{b_k - a_k}{2}\right] \end{cases} \end{aligned}$$

- Le singleton $\{r\}$ est point fixe de la fonction

Étude de la méthode

- Il faut considérer la suite d'intervalles $I_k = [a_k, b_k]$,

$$\begin{aligned} I_0 &= [a, b] \\ I_{k+1} &= g(I_k) &= \begin{cases} \left[\frac{b_k - a_k}{2}, b_k\right] & \text{ou} \\ \left[a_k, \frac{b_k - a_k}{2}\right] \end{cases} \end{aligned}$$

- Le singleton $\{r\}$ est point fixe de la fonction
- g est contractante (trouvez la distance)

Étude de la méthode

- Il faut considérer la suite d'intervalles $I_k = [a_k, b_k]$,

$$
\begin{aligned}
I_0 &= [a, b] \\
I_{k+1} &= g(I_k) &= \begin{cases} \left[\frac{b_k - a_k}{2}, b_k\right] & \text{ou} \\ \left[a_k, \frac{b_k - a_k}{2}\right] \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Le singleton $\{r\}$ est point fixe de la fonction
- g est contractante (trouvez la distance)
- La convergence est linéaire car

$$|b_k - a_k| = \frac{|b - a|}{2^k}$$

Étude de la méthode

- Il faut considérer la suite d'intervalles $I_k = [a_k, b_k]$,

$$\begin{aligned} I_0 &= [a, b] \\ I_{k+1} &= g(I_k) &= \begin{cases} \left[\frac{b_k - a_k}{2}, b_k\right] \text{ ou} \\ \left[a_k, \frac{b_k - a_k}{2}\right] \end{cases} \end{aligned}$$

- Le singleton $\{r\}$ est point fixe de la fonction
- g est contractante (trouvez la distance)
- La convergence est linéaire car

$$|b_k - a_k| = \frac{|b - a|}{2^k}$$

- ⚠ Il faut bien choisir ε

Étude de la méthode

- Il faut considérer la suite d'intervalles $I_k = [a_k, b_k]$,

$$\begin{aligned} I_0 &= [a, b] \\ I_{k+1} &= g(I_k) &= \begin{cases} \left[\frac{b_k - a_k}{2}, b_k\right] \text{ ou} \\ \left[a_k, \frac{b_k - a_k}{2}\right] \end{cases} \end{aligned}$$

- Le singleton $\{r\}$ est point fixe de la fonction
- g est contractante (trouvez la distance)
- La convergence est linéaire car

$$|b_k - a_k| = \frac{|b - a|}{2^k}$$

- ⚠ Il faut bien choisir ε
- la méthode ne fonctionne pas en dimension $n > 1$.

Calculez

$$\sqrt{3}$$

Méthode de NEWTON

Retour sur la méthode du point fixe

Principe :

- Trouver la fonction g telle que :

$$f(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(r) = r$$

- g doit avoir de bonnes propriétés de convergence
- g doit « améliorer » une approximation de r
  i.e. si x_k est proche de r, alors $x_{k+1} = g(x_k)$ doit être plus proche de r.
  ou encore g doit rajouter un terme correctif à x_k pour le rapprocher du résultat.

Exemple inversion d'un nombre

Si on connaît y et on cherche à calculer $\frac{1}{y}$,
on a déjà $x_k = \frac{1}{y} + \varepsilon$.

Exemple inversion d'un nombre

Si on connaît y et on cherche à calculer $\frac{1}{y}$,

on a déjà $x_k = \frac{1}{y} + \varepsilon$.

- La bonne valeur pour g est $g(x_k) = x_k - \varepsilon$ mais comment connaître la valeur $-\varepsilon$?

Exemple inversion d'un nombre

Si on connaît y et on cherche à calculer $\frac{1}{y}$,
on a déjà $x_k = \frac{1}{y} + \varepsilon$.

- La bonne valeur pour g est $g(x_k) = x_k - \varepsilon$ mais comment connaître la valeur $-\varepsilon$?
- On sait que $x_k \times y = 1 + y\varepsilon$,

Exemple inversion d'un nombre

Si on connaît y et on cherche à calculer $\frac{1}{y}$,
on a déjà $x_k = \frac{1}{y} + \varepsilon$.

- La bonne valeur pour g est $g(x_k) = x_k - \varepsilon$ mais comment connaître la valeur $-\varepsilon$?
- On sait que $x_k \times y = 1 + y\varepsilon$,
- Donc $-\varepsilon = \frac{1-yx_k}{y}$ mais ??

Exemple inversion d'un nombre

Si on connaît y et on cherche à calculer $\frac{1}{y}$,

on a déjà $x_k = \frac{1}{y} + \varepsilon$.

- La bonne valeur pour g est $g(x_k) = x_k - \varepsilon$ mais comment connaître la valeur $-\varepsilon$?
- On sait que $x_k \times y = 1 + y\varepsilon$,
- Donc $-\varepsilon = \frac{1-yx_k}{y}$ mais il faut diviser par y alors que l'on cherche $\frac{1}{y}$

Exemple inversion d'un nombre

Si on connaît y et on cherche à calculer $\frac{1}{y}$,

on a déjà $x_k = \frac{1}{y} + \varepsilon$.

- La bonne valeur pour g est $g(x_k) = x_k - \varepsilon$ mais comment connaître la valeur $-\varepsilon$?
- On sait que $x_k \times y = 1 + y\varepsilon$,
- Donc $-\varepsilon = \frac{1-yx_k}{y}$ mais il faut diviser par y alors que l'on cherche $\frac{1}{y}$
- Comme x_k est proche de $\frac{1}{y}$, on peut multiplier par x_k au lieu de diviser par y :

$$g(x_k) \quad = \quad x_k + x_k(1 - yx_k)$$

- C'est la méthode de NEWTON.

Exemple inversion d'un nombre

Si on connaît y et on cherche à calculer $\frac{1}{y}$,
on a déjà $x_k = \frac{1}{y} + \varepsilon$.

- La bonne valeur pour g est $g(x_k) = x_k - \varepsilon$ mais comment connaître la valeur $-\varepsilon$?
- On sait que $x_k \times y = 1 + y\varepsilon$,
- Donc $-\varepsilon = \frac{1-yx_k}{y}$ mais il faut diviser par y alors que l'on cherche $\frac{1}{y}$
- Comme x_k est proche de $\frac{1}{y}$, on peut multiplier par x_k au lieu de diviser par y :

$$g(x_k) \quad = \quad x_k + x_k(1 - yx_k)$$

- C'est la méthode de NEWTON.

Avec ce choix de g, si $x_k = \frac{1}{y} + \varepsilon$ alors :

$$\left| x_{k+1} - \frac{1}{y} \right| = y\varepsilon^2$$

la convergence est quadratique

Généralisation

On veut calculer r tel que $f(r) = 0$
on a déjà calculé $x_k = r + \varepsilon$.

Généralisation

On veut calculer r tel que $f(r) = 0$
on a déjà calculé $x_k = r + \varepsilon$.

- On se base sur le calcul de $f(x_k)$

Généralisation

On veut calculer r tel que $f(r) = 0$
on a déjà calculé $x_k = r + \varepsilon$.

- On se base sur le calcul de $f(x_k)$
- La formule de Taylor dit que :

$$f(r) \quad = 0 \quad \simeq f(x_k) - \varepsilon f'(x_k)$$

Généralisation

On veut calculer r tel que $f(r) = 0$
on a déjà calculé $x_k = r + \varepsilon$.

- On se base sur le calcul de $f(x_k)$
- La formule de Taylor dit que :

$$f(r) \quad = 0 \quad \simeq f(x_k) - \varepsilon f'(x_k)$$

- Donc la fonction choisie est :

$$g(x_k) \quad = \quad x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Conditions :

On veut calculer r tel que $f(r) = 0$
on a déjà calculé $x_k = r + \varepsilon$.

- On se base sur le calcul de $f(x_k)$
- La formule de Taylor dit que :

$$f(r) \quad = 0 \quad \simeq f(x_k) - \varepsilon f'(x_k)$$

- Donc la fonction choisie est :

$$g(x_k) \quad = \quad x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Conditions :
Pour assurer la convergence,

- f doit être C^2 (dérivable 2 fois et de dérivées continues).

Généralisation

On veut calculer r tel que $f(r) = 0$
on a déjà calculé $x_k = r + \varepsilon$.

- On se base sur le calcul de $f(x_k)$
- La formule de Taylor dit que :

$$f(r) \quad = 0 \quad \simeq f(x_k) - \varepsilon f'(x_k)$$

- Donc la fonction choisie est :

$$g(x_k) \quad = \quad x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Conditions :
Pour assurer la convergence,

- f doit être C^2 (dérivable 2 fois et de dérivées continues).
- $f'(x_k)$ doit être $\neq 0$ pour tous k.

Généralisation

On veut calculer r tel que $f(r) = 0$
on a déjà calculé $x_k = r + \varepsilon$.

- On se base sur le calcul de $f(x_k)$
- La formule de Taylor dit que :

$$f(r) \quad = 0 \quad \simeq f(x_k) - \varepsilon f'(x_k)$$

- Donc la fonction choisie est :

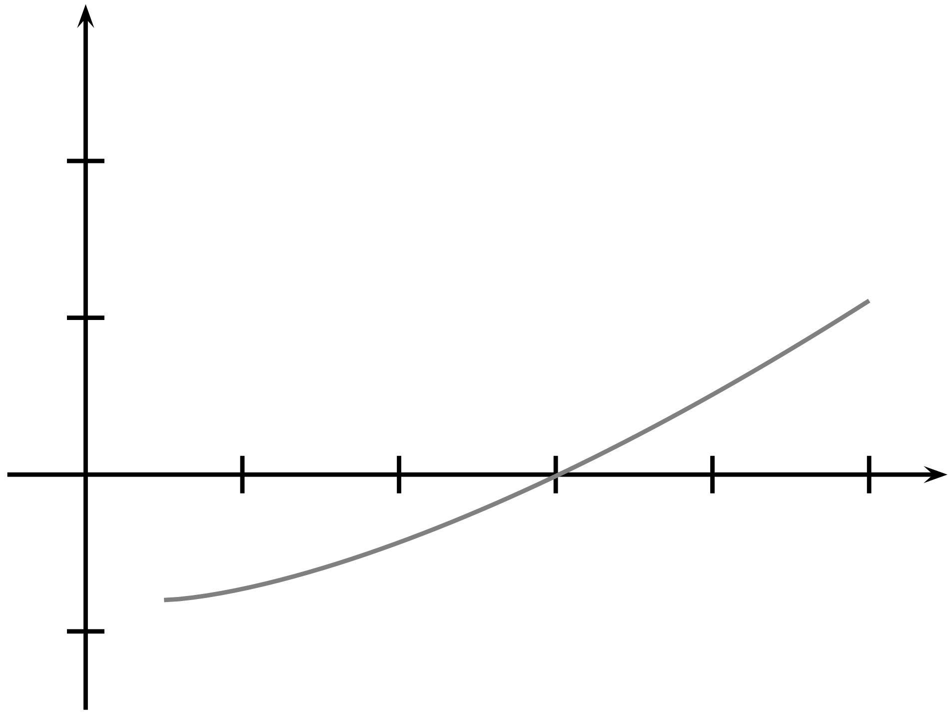
$$g(x_k) \quad = \quad x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Conditions :
Pour assurer la convergence,

- f doit être C^2 (dérivable 2 fois et de dérivées continues).
- $f'(x_k)$ doit être $\neq 0$ pour tous k.
- La suite doit démarrer « au voisinage de r ».

la méthode des tangentes :

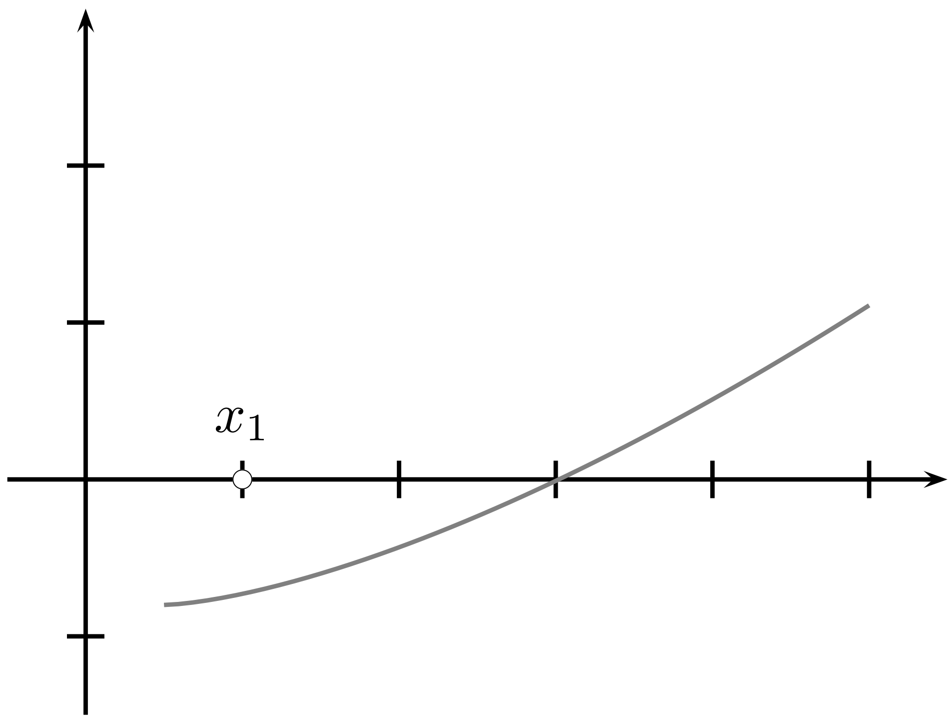
- Si la fonction f est C^2, et $f'(r) \neq 0$ au voisinage de r elle se comporte comme une droite qui coupe l'axe des x.
- la formule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ tente de résoudre l'équation comme si f était une droite :
  x_{n+1} est le point d'intersection entre la tangente à f en x_n et l'axe des x.



Autre manière de voir

la méthode des tangentes :

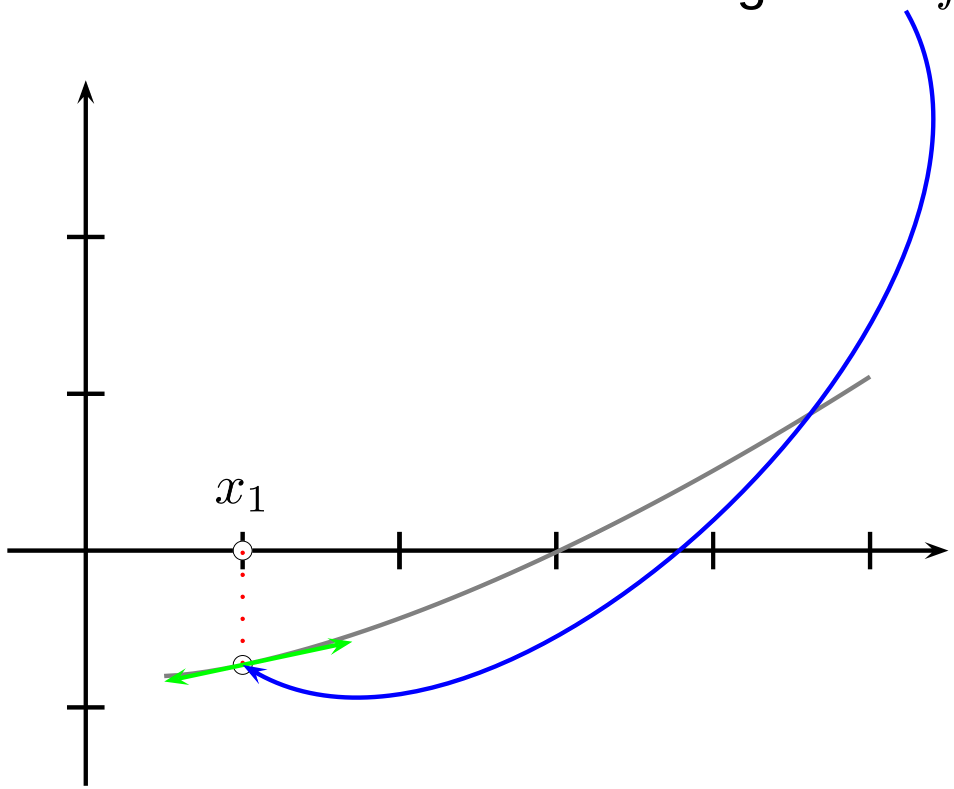
- Si la fonction f est C^2, et $f'(r) \neq 0$ au voisinage de r elle se comporte comme une droite qui coupe l'axe des x.
- la formule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ tente de résoudre l'équation comme si f était une droite :
  x_{n+1} est le point d'intersection entre la tangente à f en x_n et l'axe des x.



Autre manière de voir

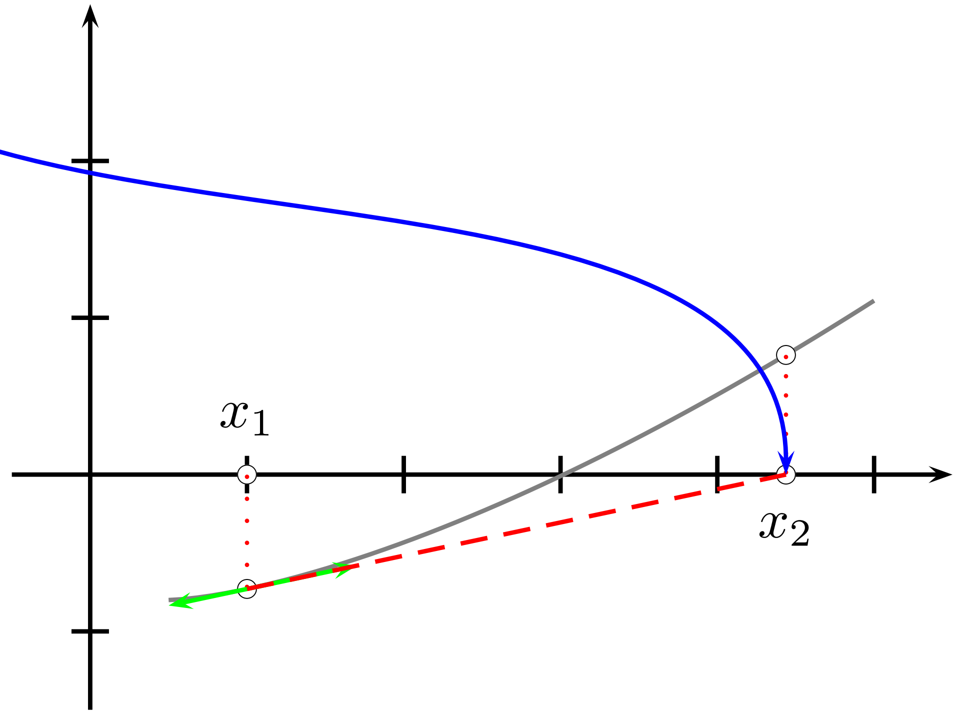
la méthode des tangentes :

- Si la fonction f est C^2, et $f'(r) \neq 0$ au voisinage de r elle se comporte comme une droite qui coupe l'axe des x.
- la formule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ tente de résoudre l'équation comme si f était une droite :
  x_{n+1} est le point d'intersection entre la tangente à f en x_n et l'axe des x.



la méthode des tangentes :

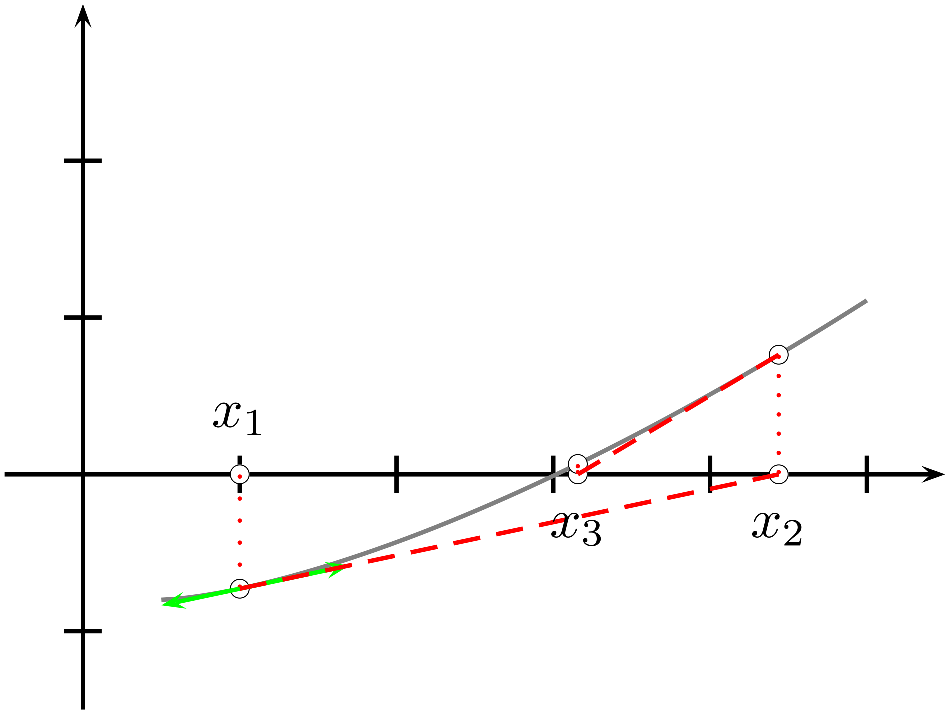
- Si la fonction f est C^2, et $f'(r) \neq 0$ au voisinage de r elle se comporte comme une droite qui coupe l'axe des x.
- la formule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ tente de résoudre l'équation comme si f était une droite :
  x_{n+1} est le point d'intersection entre la tangente à f en x_n et l'axe des x.



Autre manière de voir

la méthode des tangentes :

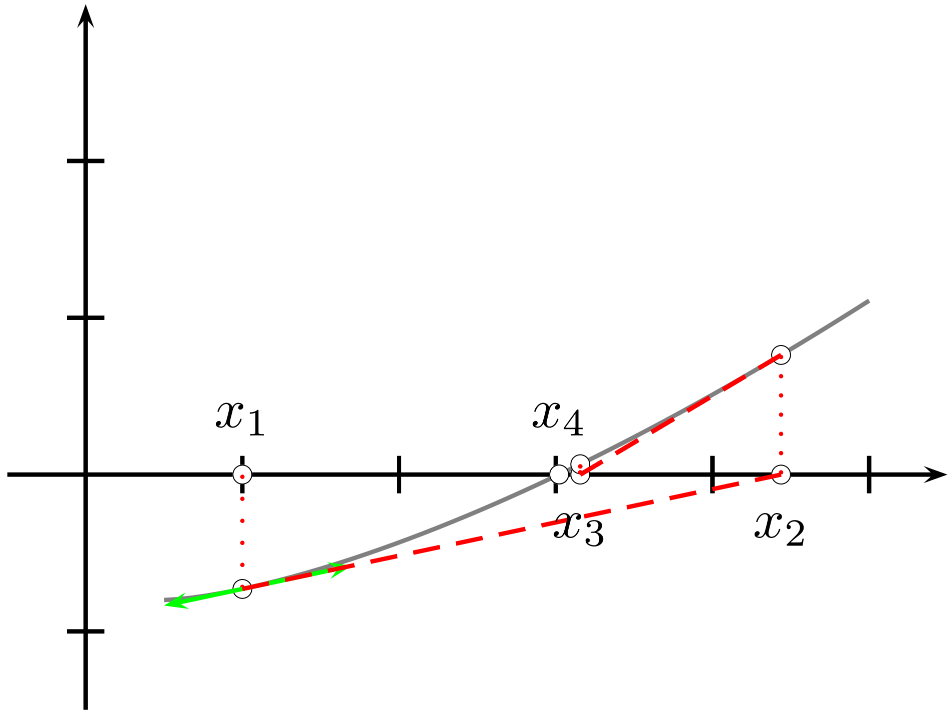
- Si la fonction f est C^2, et $f'(r) \neq 0$ au voisinage de r elle se comporte comme une droite qui coupe l'axe des x.
- la formule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ tente de résoudre l'équation comme si f était une droite :
  x_{n+1} est le point d'intersection entre la tangente à f en x_n et l'axe des x.



Autre manière de voir

la méthode des tangentes :

- Si la fonction f est C^2, et $f'(r) \neq 0$ au voisinage de r elle se comporte comme une droite qui coupe l'axe des x.
- la formule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ tente de résoudre l'équation comme si f était une droite :
  x_{n+1} est le point d'intersection entre la tangente à f en x_n et l'axe des x.



Algorithme

Données : x_0, NMAX et ε

début

$n \leftarrow 0$

répéter

$n \leftarrow n + 1$

$x \leftarrow x_0$

$x_0 \leftarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

jusqu'à *($|x - x_0| \leq \varepsilon$) ou ($n =$NMAX)*

Résultat : **si** *($n =$NMAX)* **alors**

écrire “Trop d'itérations”

rendre NaN

sinon

rendre x_0

fin

Conditions d'utilisation

Si $x_n = r + h$ Alors

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Conditions d'utilisation

Si $x_n = r + h$ Alors

$$x_{n+1} \quad = \quad r + h - \frac{f(r+h)}{f'(r+h)}$$

Si $x_n = r + h$ Alors

$$x_{n+1} = r + h - \frac{f(r+h)}{f'(r+h)}$$

Par la formule de Taylor

Conditions d'utilisation

Si $x_n = r + h$ Alors

$$x_{n+1} = r + h - \frac{f(r+h)}{f'(r+h)}$$

Par la formule de Taylor $\exists t \in [0,1]$:

$$0 = f(r) = f(r+h) - hf'(r+h) + \frac{h^2}{2} f''(r+th)$$

Conditions d'utilisation

Si $x_n = r + h$ Alors

$$x_{n+1} = r + h - \frac{f(r+h)}{f'(r+h)}$$

Par la formule de Taylor $\exists t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} 0 = f(r) &= f(r+h) - hf'(r+h) + \frac{h^2}{2} f''(r+th) \\ \frac{f(r+h)}{f'(r+h)} &= h - \frac{h^2}{2} \frac{f''(r+th)}{f'(r+h)} \end{aligned}$$

Conditions d'utilisation

Si $x_n = r + h$ Alors

$$x_{n+1} = r + h - \frac{f(r+h)}{f'(r+h)}$$

Par la formule de Taylor $\exists t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
0 = f(r) &= f(r+h) - hf'(r+h) + \frac{h^2}{2} f''(r+th) \\
\frac{f(r+h)}{f'(r+h)} &= h - \frac{h^2}{2}\frac{f''(r+th)}{f'(r+h)} \\
x_{n+1} &= r + \frac{h^2}{2}\frac{f''(r+th)}{f'(r+h)}
\end{aligned}$$

Conditions d'utilisation

Si $x_n = r + h$ Alors

$$x_{n+1} = r + h - \frac{f(r+h)}{f'(r+h)}$$

Par la formule de Taylor $\exists t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
0 = f(r) &= f(r+h) - hf'(r+h) + \frac{h^2}{2} f''(r+th) \\
\frac{f(r+h)}{f'(r+h)} &= h - \frac{h^2}{2}\frac{f''(r+th)}{f'(r+h)} \\
x_{n+1} &= r + \frac{h^2}{2}\frac{f''(r+th)}{f'(r+h)} \\
|x_{n+1} - r| &= \left|\frac{h^2}{2}\frac{f''(r+th)}{f'(r+h)}\right|
\end{aligned}$$

Conditions d'utilisation (suite)

Pour conclure,

Conditions d'utilisation (suite)

Pour conclure, il suffit de voir que si f est C^2 et $f'(r) \neq 0$
$\exists \mathcal{V}$ voisinage de r et $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left| \frac{f''(r+th)}{f'(r+h)} \right| \quad < \quad K$$

Conditions d'utilisation (suite)

Pour conclure, il suffit de voir que si f est C^2 et $f'(r) \neq 0$
$\exists \mathcal{V}$ voisinage de r et $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left| \frac{f''(r+th)}{f'(r+h)} \right| \quad < \quad K$$

en choisissant $x_0 \in \mathcal{V}$ et $|x_0 - r| < \frac{1}{2K}$ on montre par récurrence que :

Conditions d'utilisation (suite)

Pour conclure, il suffit de voir que si f est C^2 et $f'(r) \neq 0$
$\exists \mathcal{V}$ voisinage de r et $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left| \frac{f''(r+th)}{f'(r+h)} \right| \quad < \quad K$$

en choisissant $x_0 \in \mathcal{V}$ et $|x_0 - r| < \frac{1}{2K}$ on montre par récurrence que :

$$|x_n - r| \quad < \quad \frac{1}{2^{2^n} K}$$

Conditions d'utilisation (suite)

Pour conclure, il suffit de voir que si f est C^2 et $f'(r) \neq 0$
$\exists \mathcal{V}$ voisinage de r et $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left| \frac{f''(r+th)}{f'(r+h)} \right| \quad < \quad K$$

en choisissant $x_0 \in \mathcal{V}$ et $|x_0 - r| < \frac{1}{2K}$ on montre par récurrence que :

$$|x_n - r| \quad < \quad \frac{1}{2^{2^n} K}$$

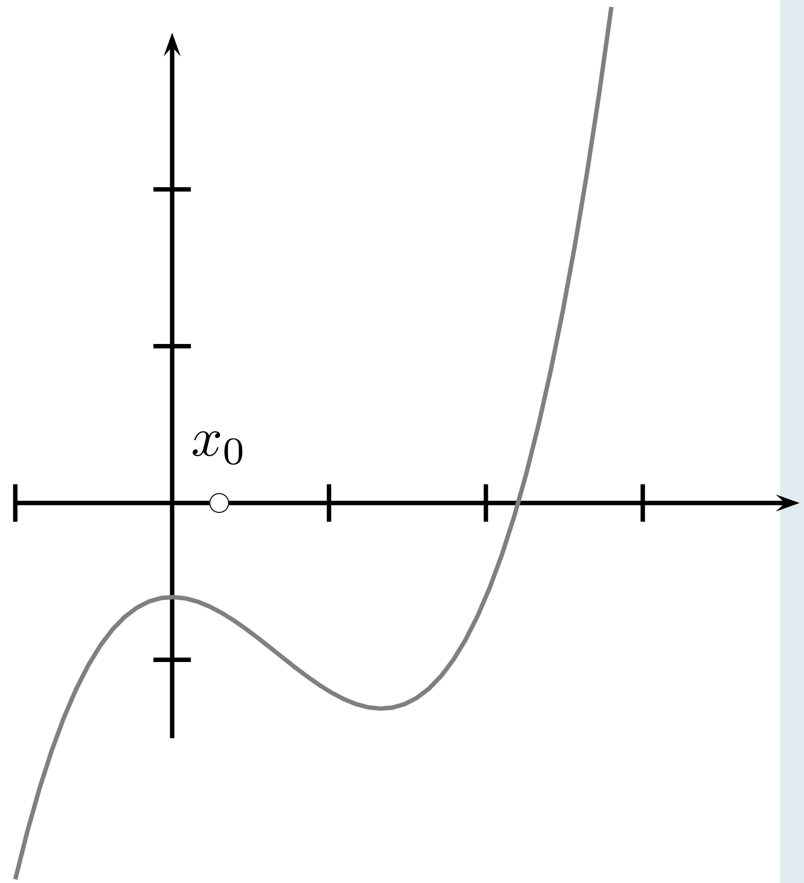
Le point de départ doit être proche du résultat !

Calculez

$$\sqrt{2}$$

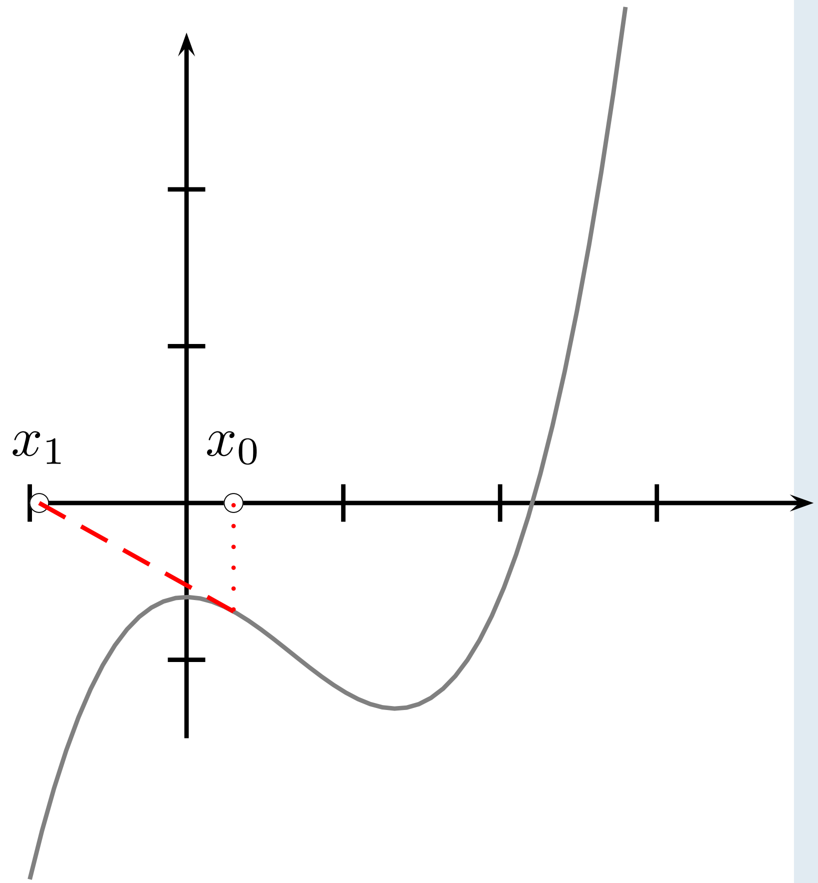
Si la dérivée s'annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$



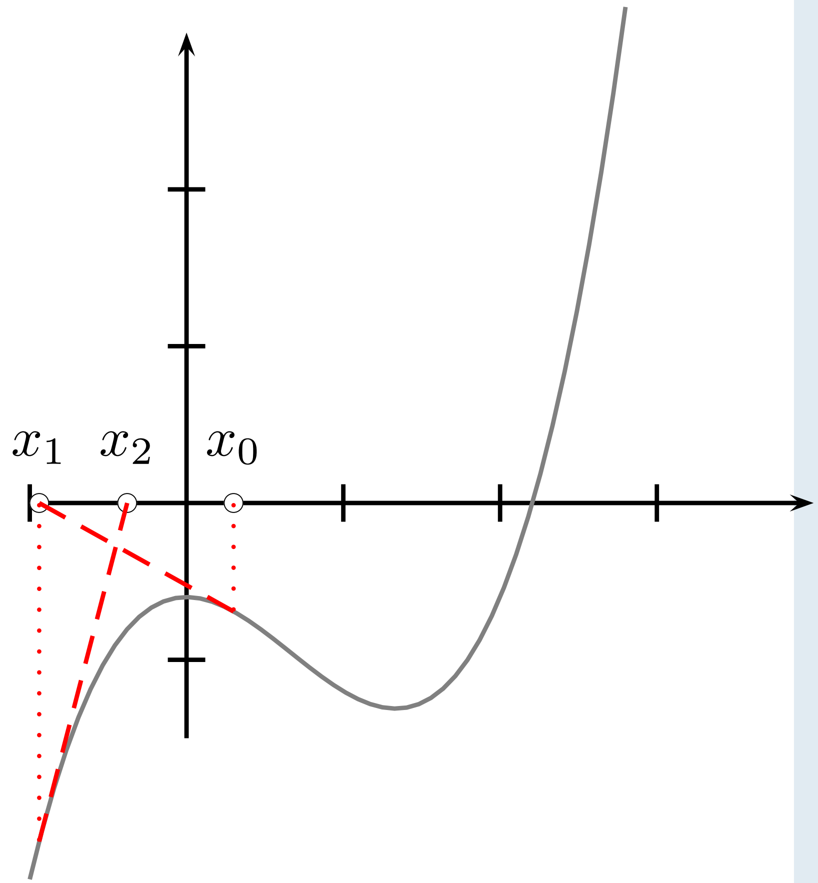
Si la dérivée s'annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$



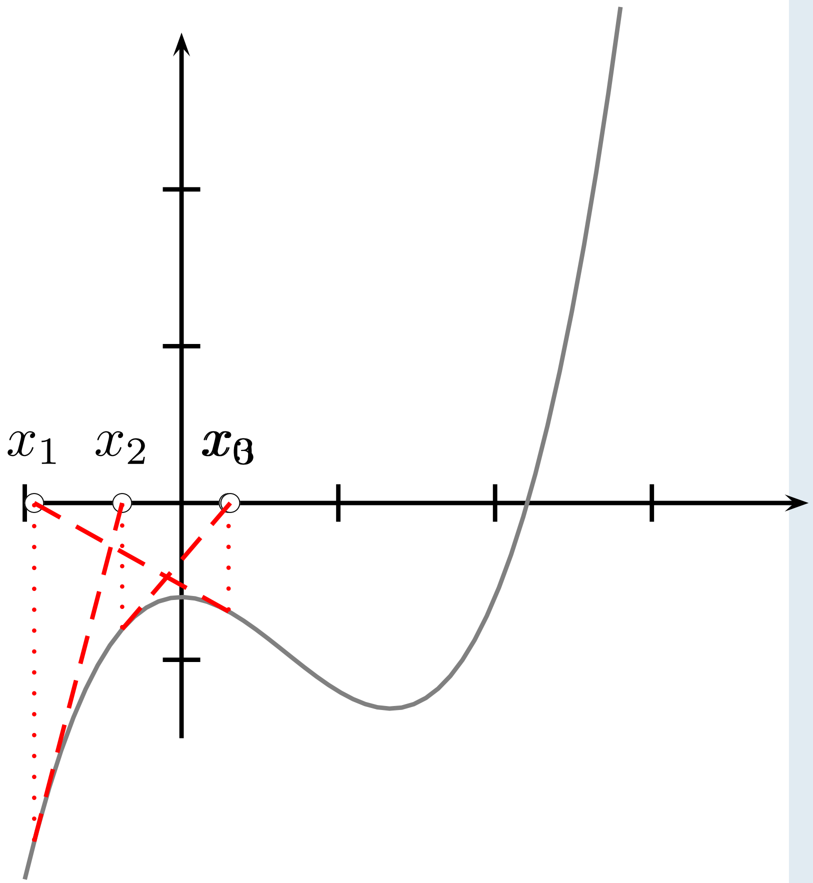
Si la dérivée s'annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$



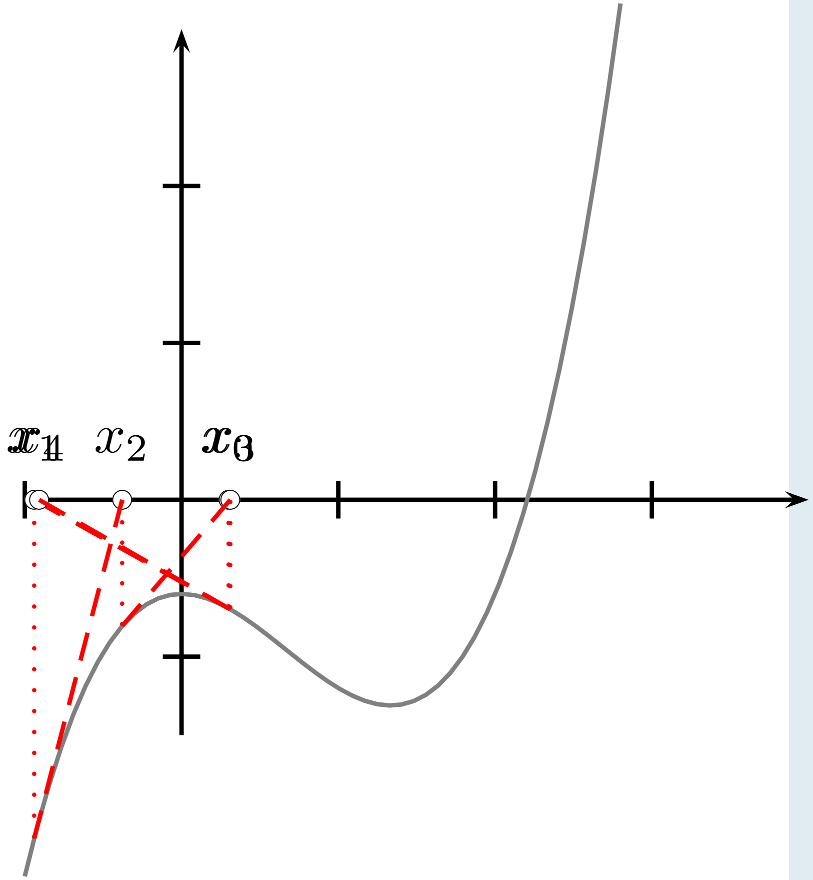
Si la dérivée s'annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

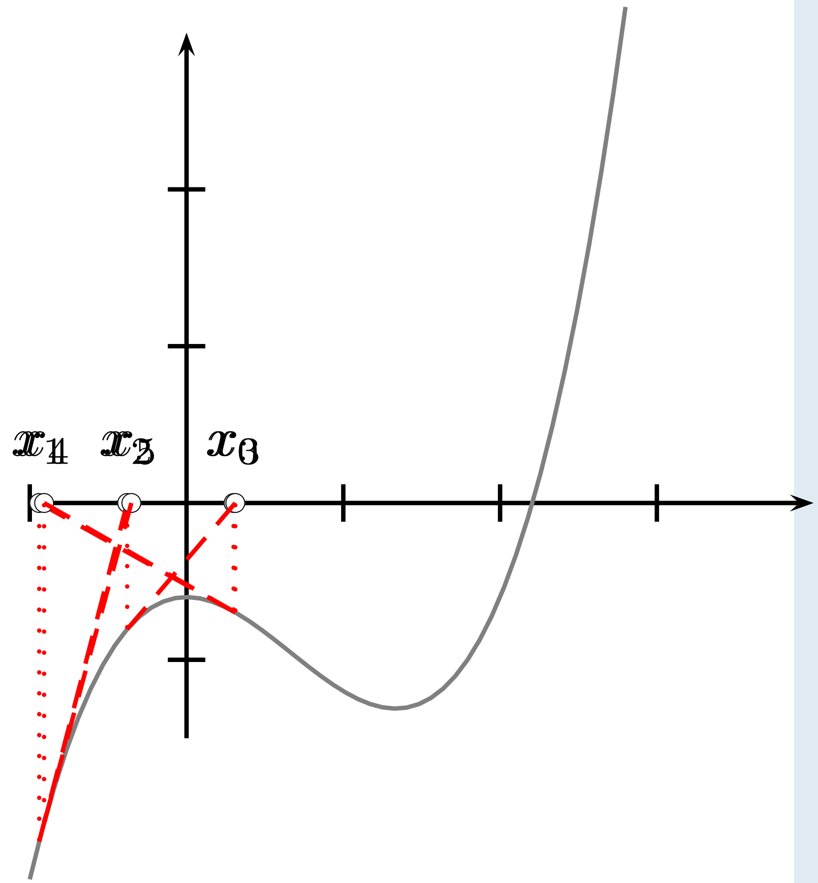


Si la dérivée s'annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

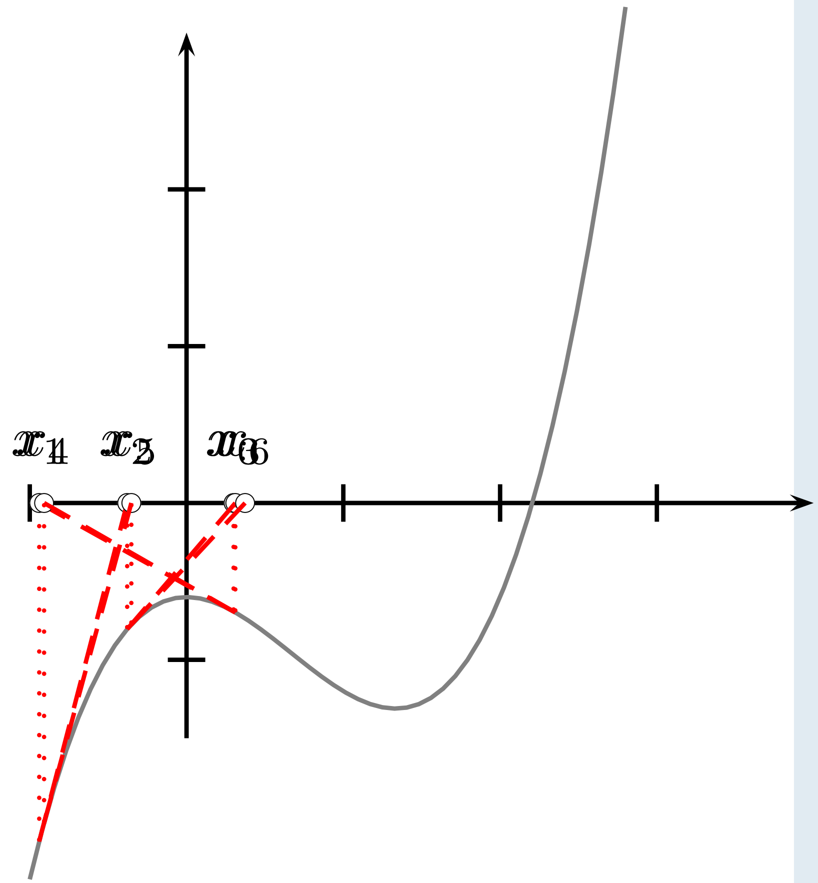


Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

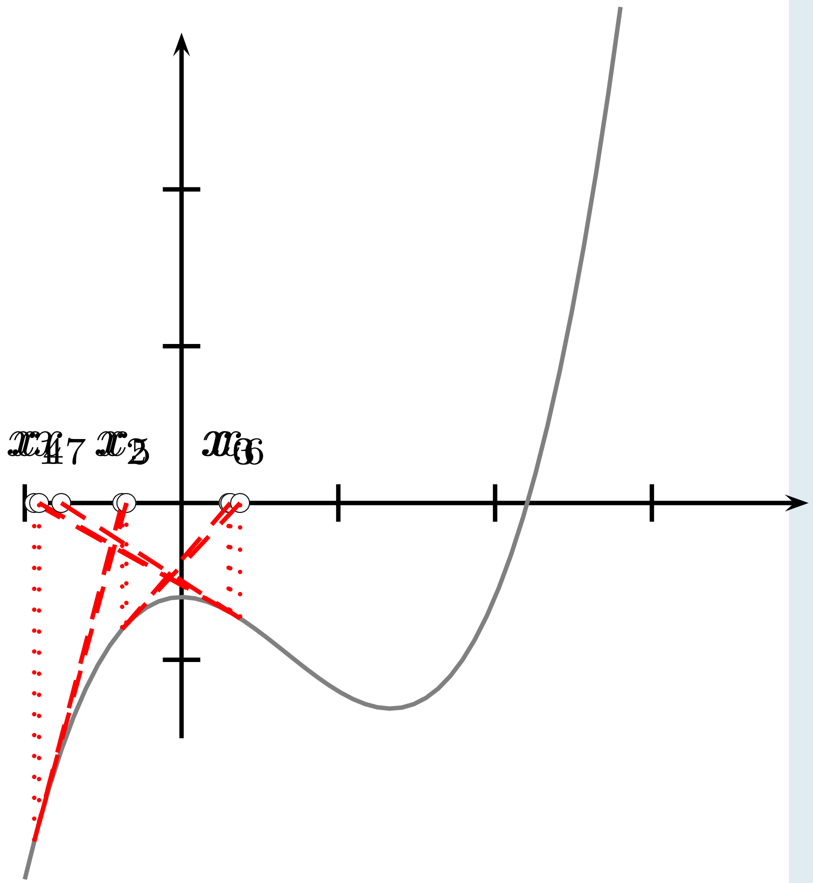


Si la dérivée s'annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

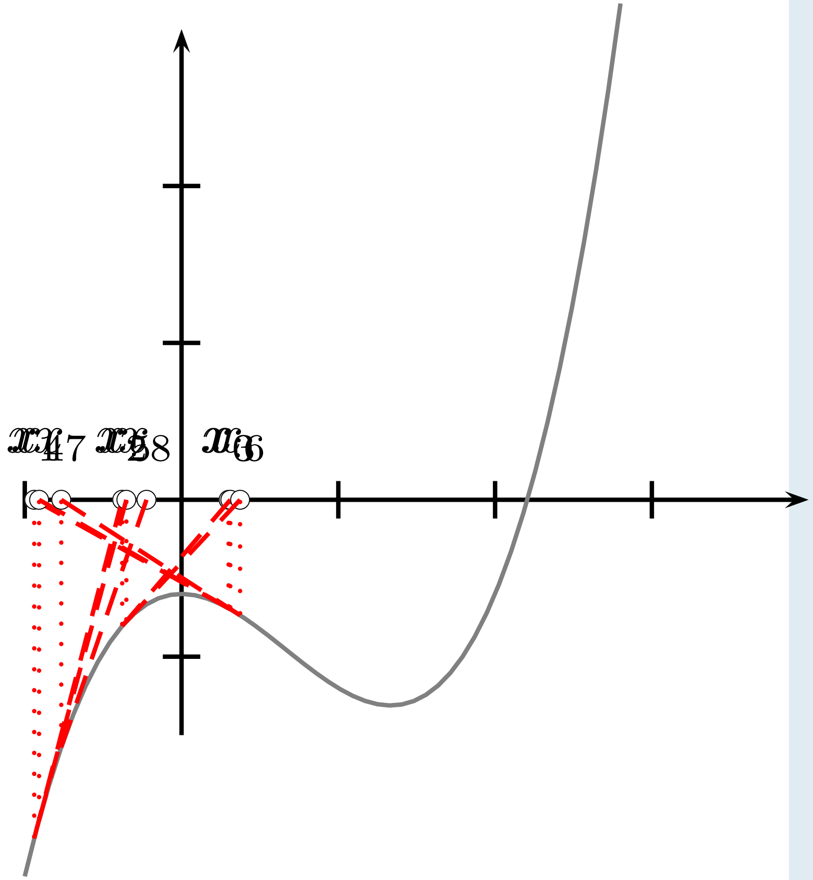


Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$



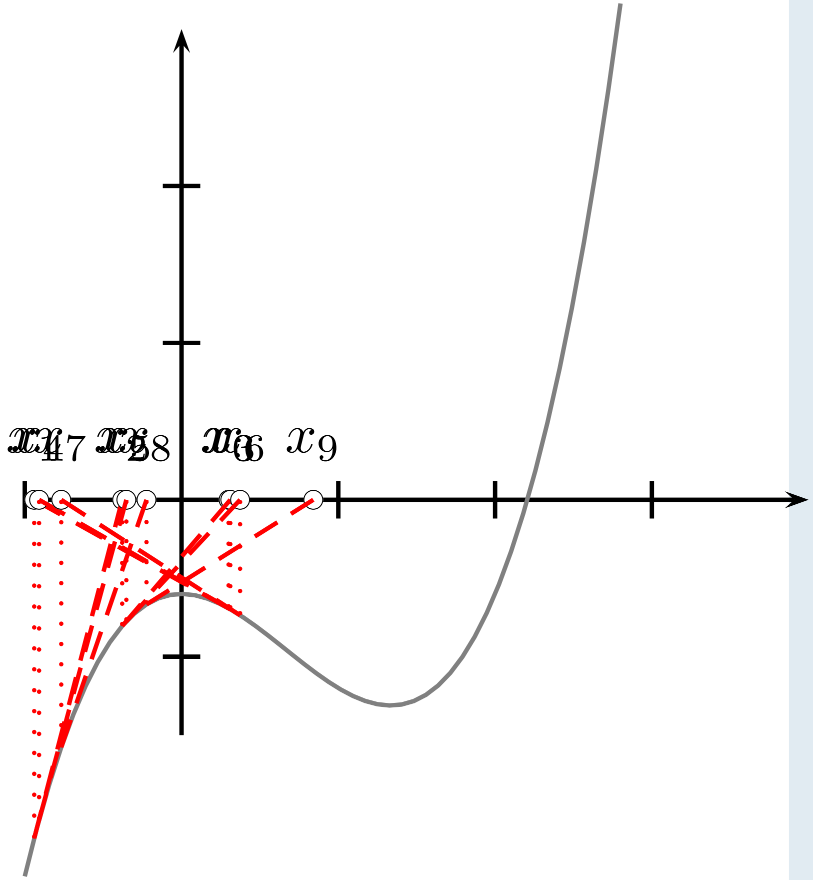
Si la dérivée s'annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$



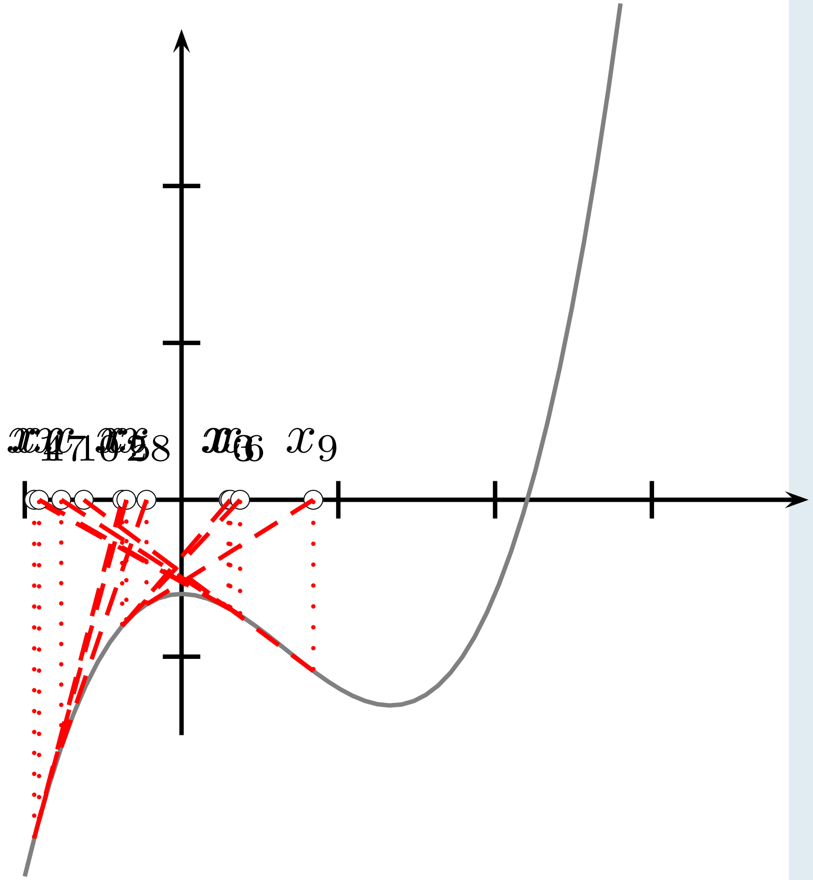
Si la dérivée s’annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

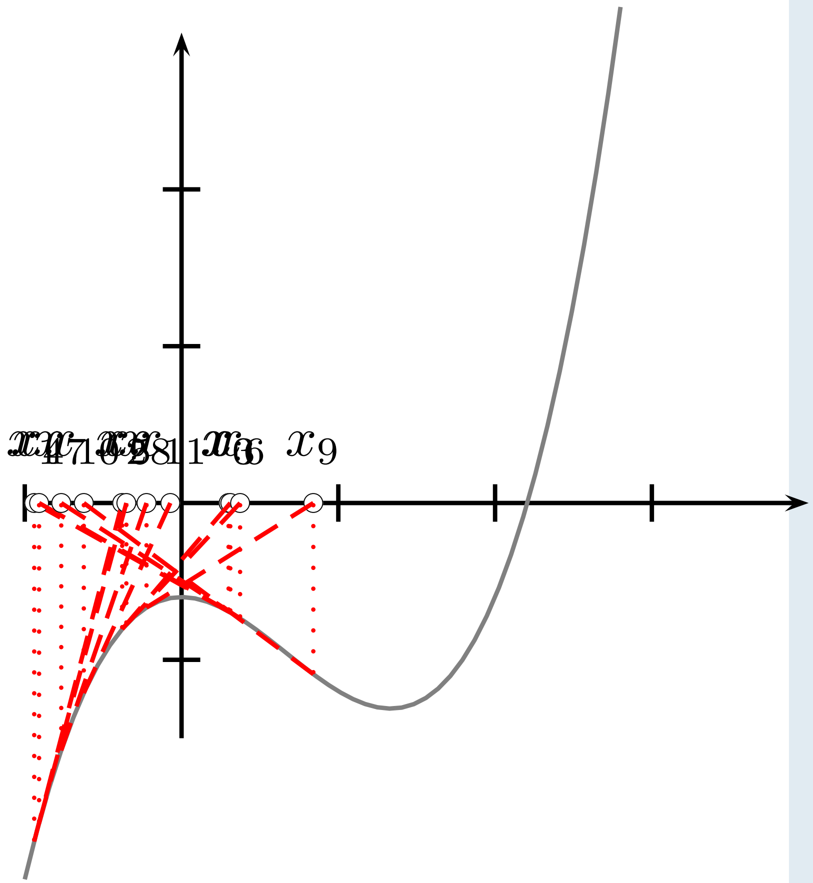


Si la dérivée s'annule

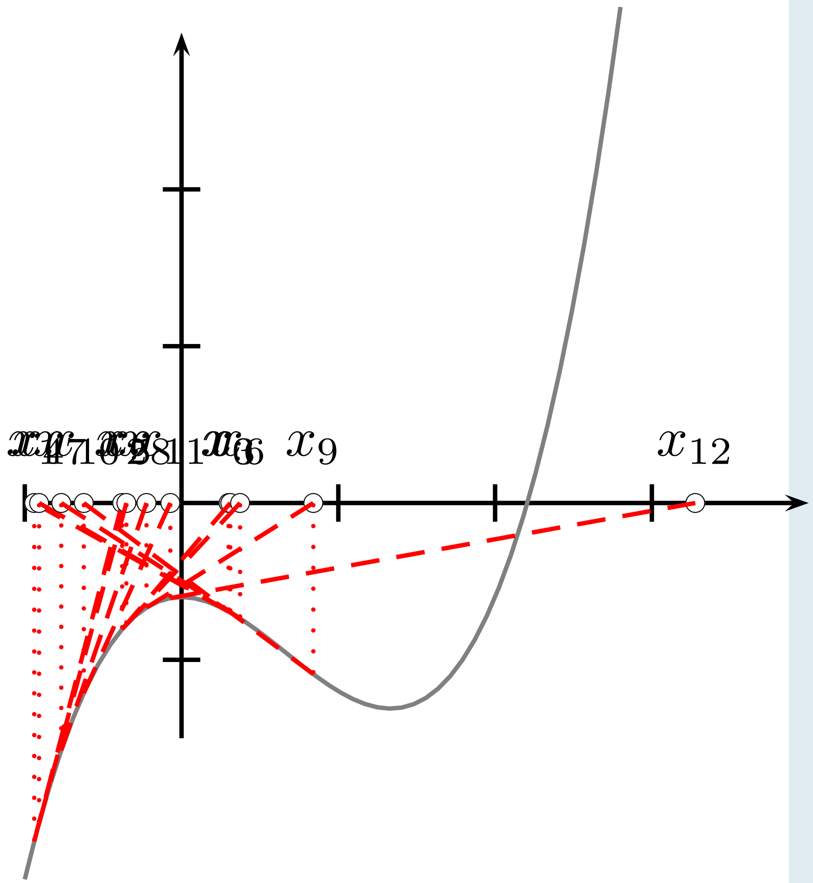
Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$



Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

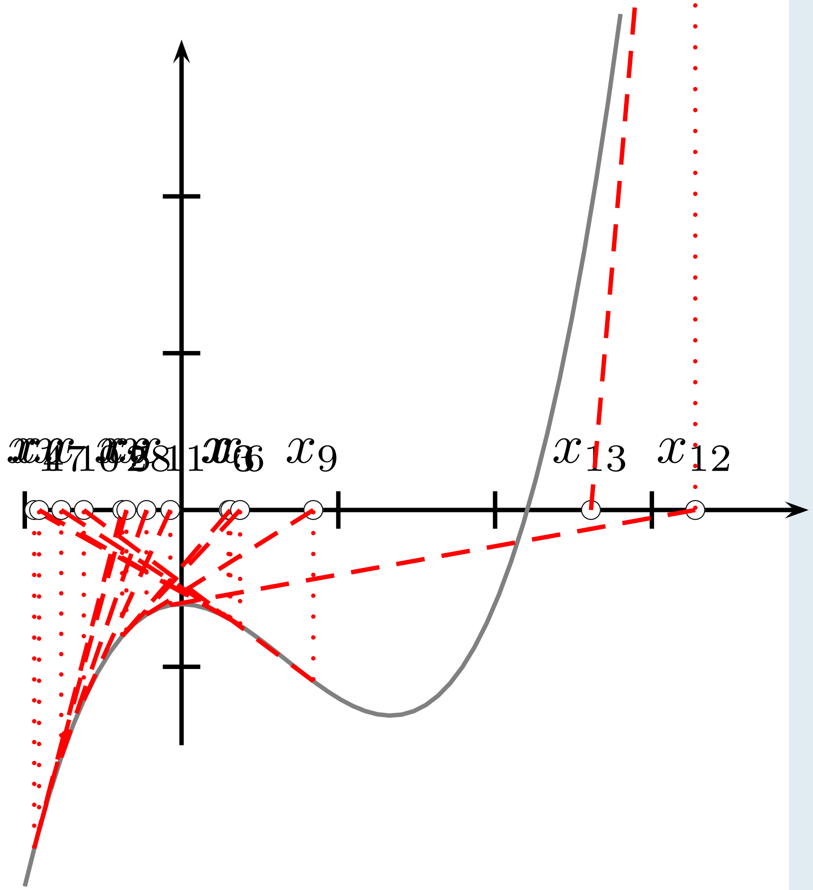


Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

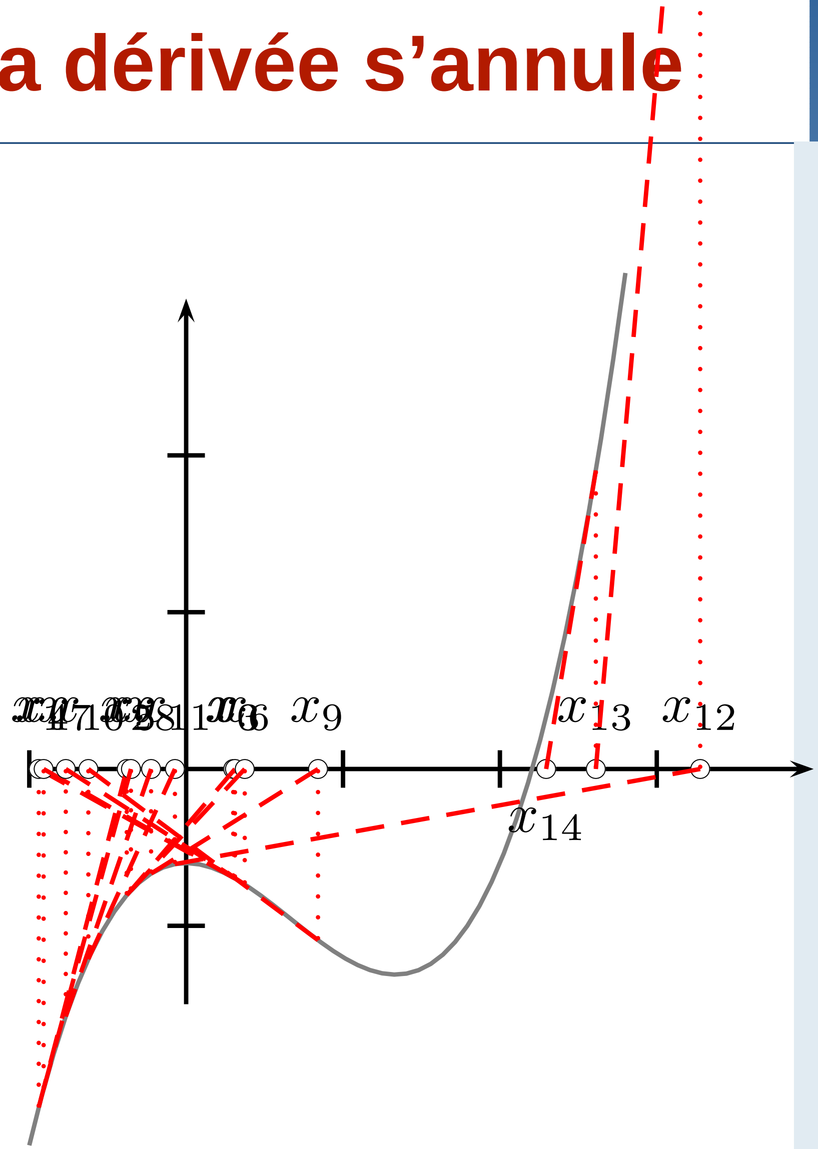


Si la dérivée s'annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

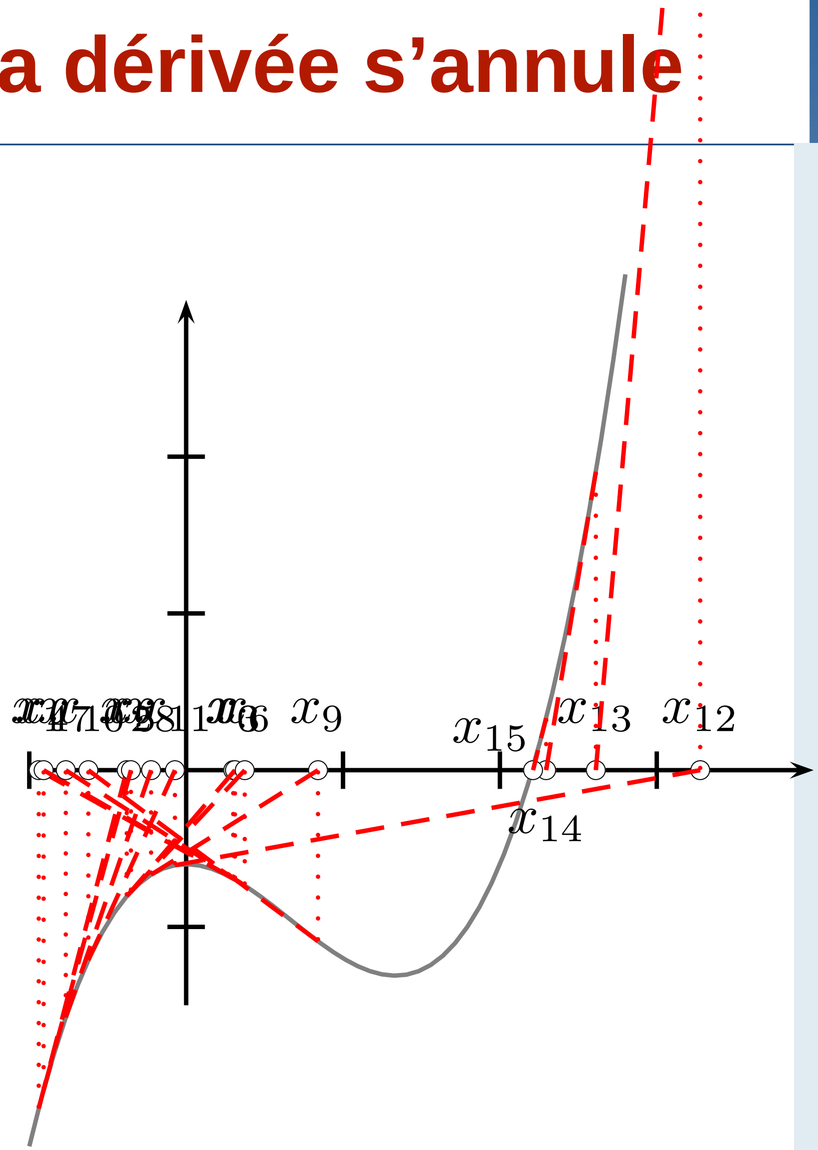


Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$



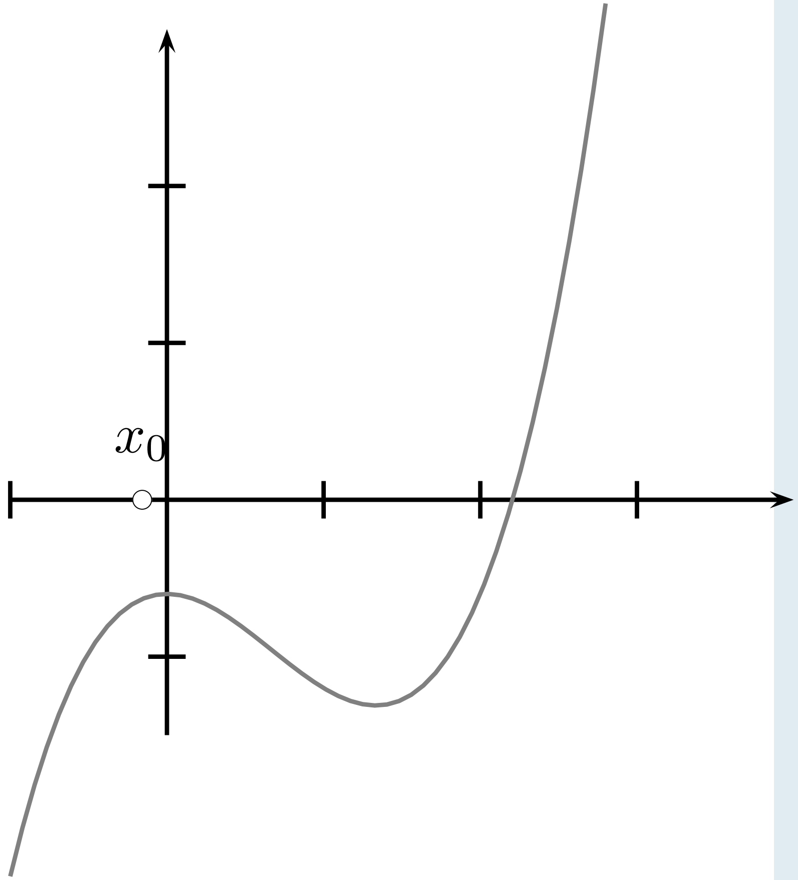
Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

- La convergence peut être ralentie.



Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

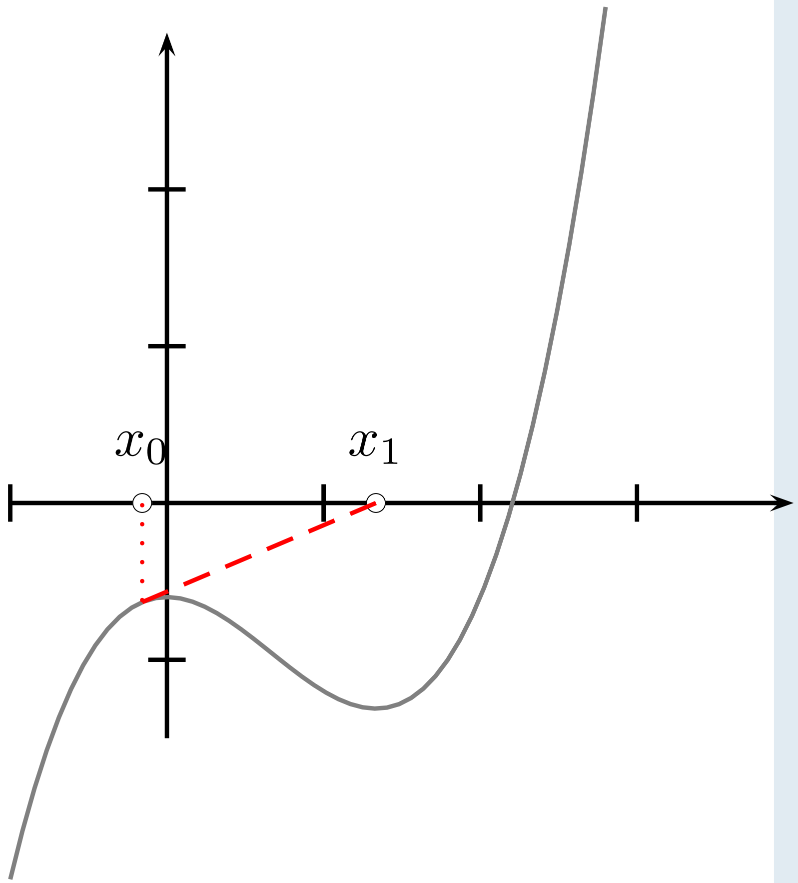
- La convergence peut être ralentie.



Si la dérivée s'annule

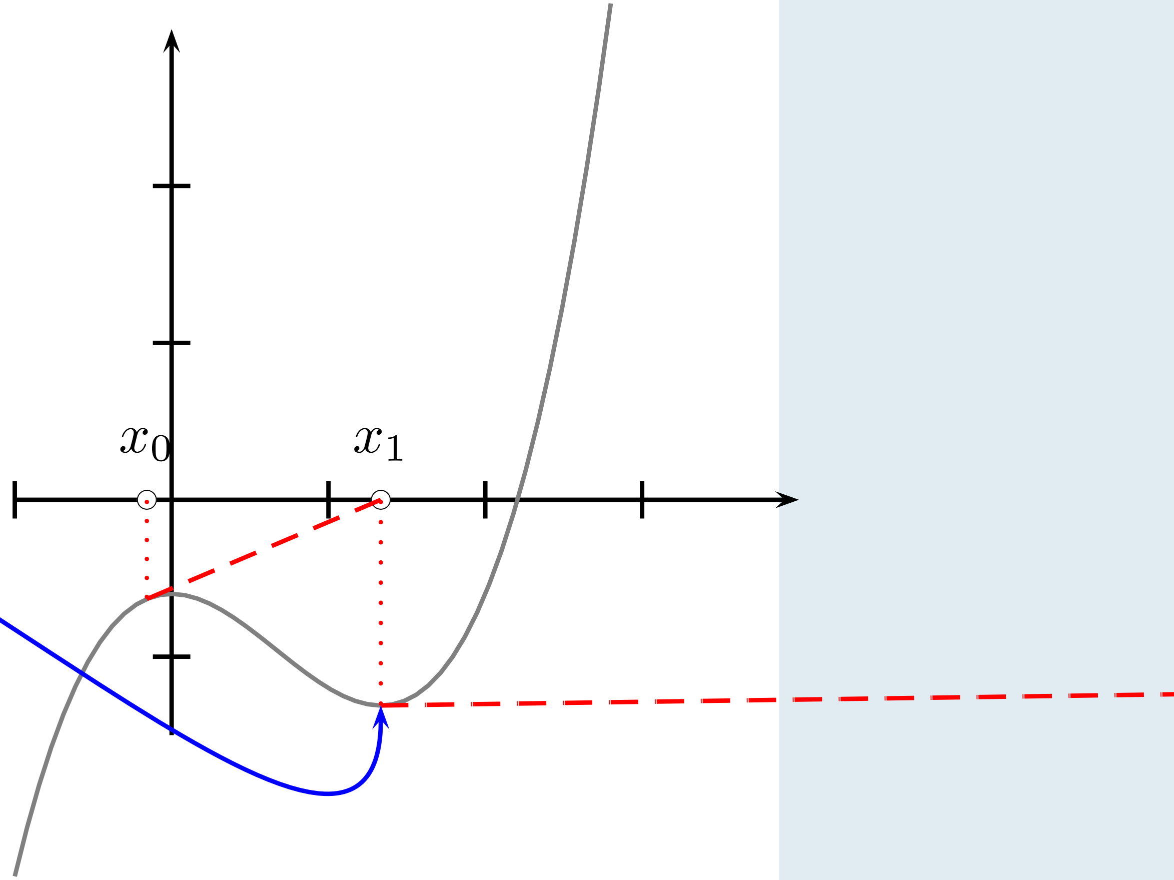
Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

- La convergence peut être ralentie.



Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

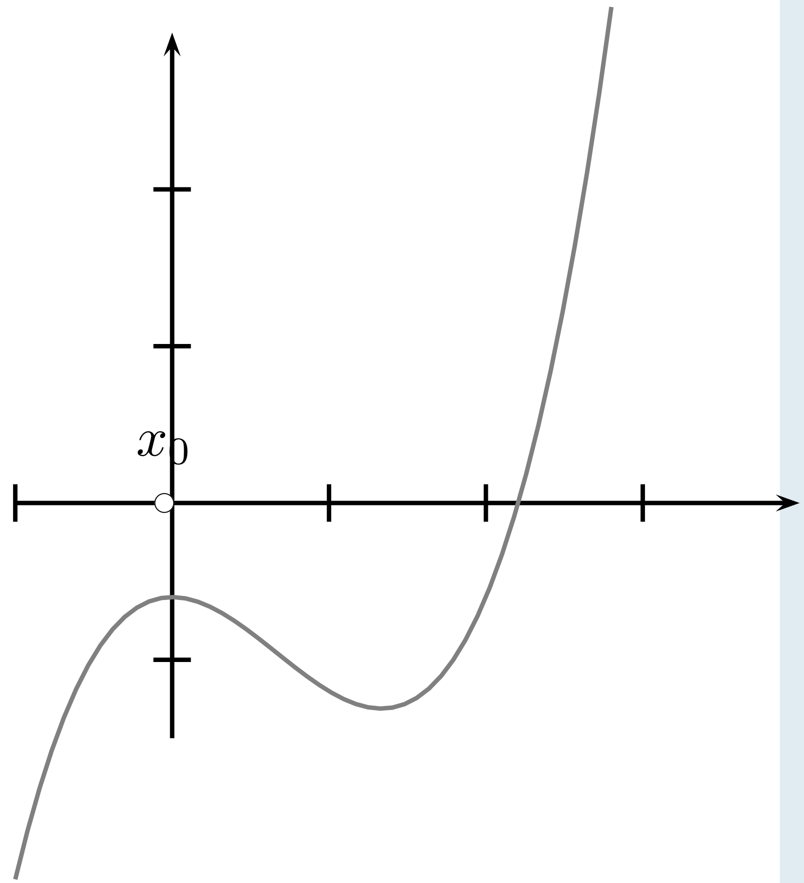
- La convergence peut être ralentie.
- La tangente peut être parallèle à l'axe des x (division par 0).



Si la dérivée s'annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

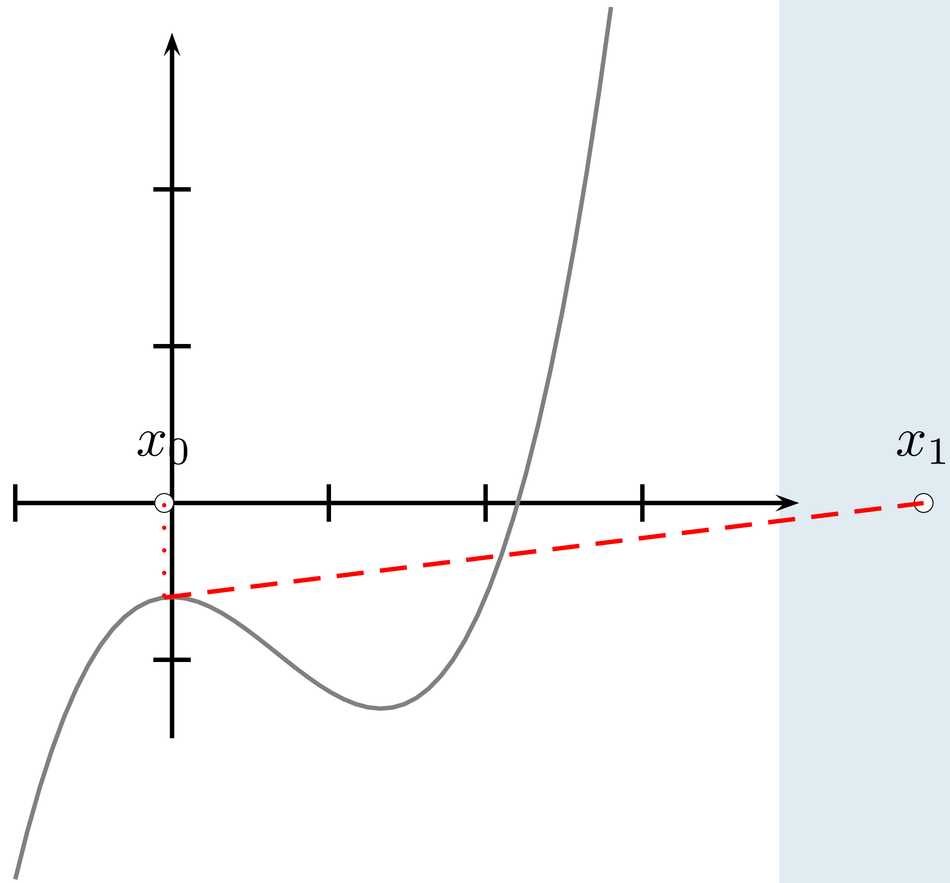
- La convergence peut être ralentie.
- La tangente peut être parallèle à l'axe des x (division par 0).



Si la dérivée s'annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

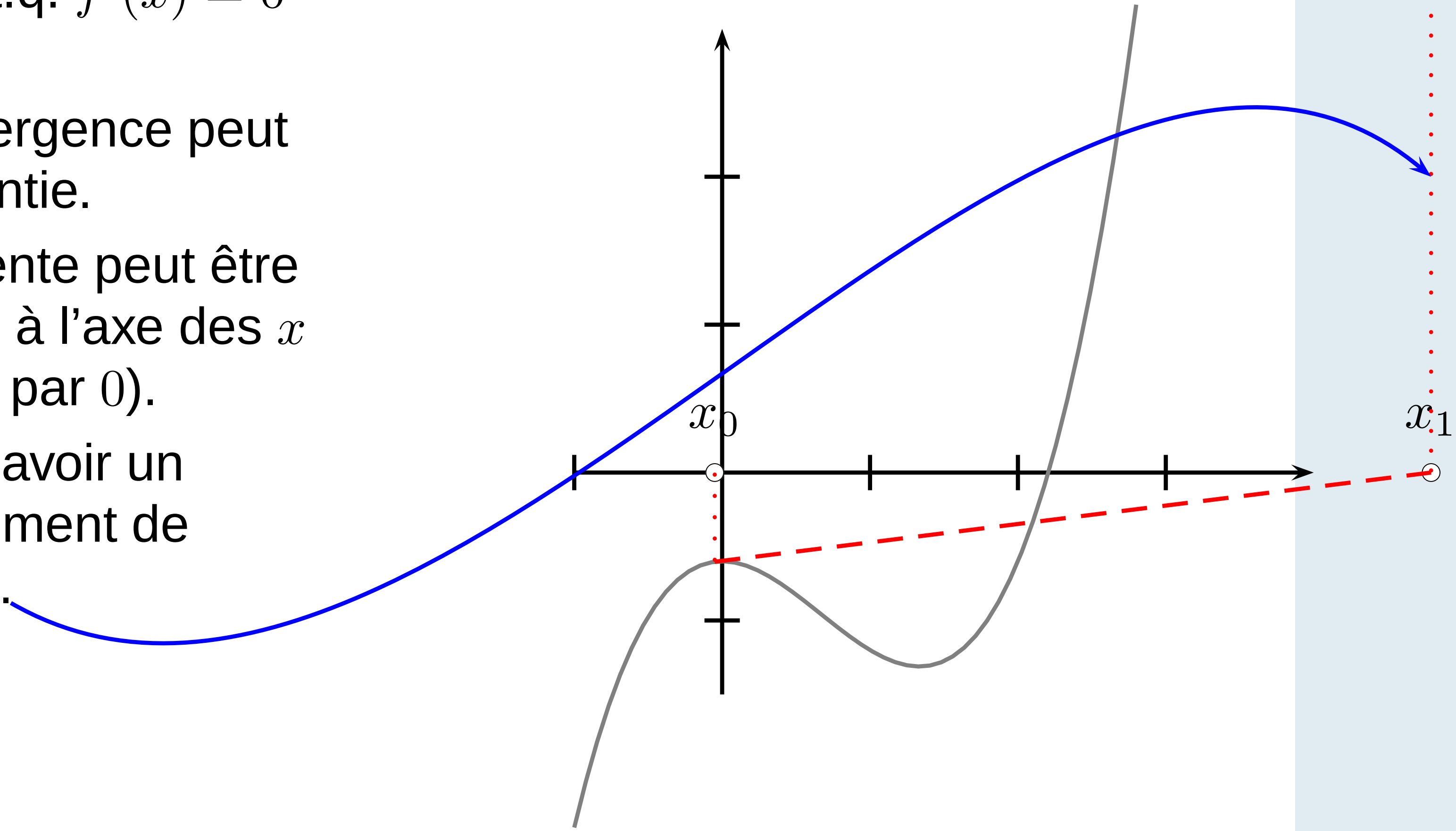
- La convergence peut être ralentie.
- La tangente peut être parallèle à l'axe des x (division par 0).



Si la dérivée s'annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

- La convergence peut être ralentie.
- La tangente peut être parallèle à l'axe des x (division par 0).
- Il peut y avoir un dépassement de capacité.



Propriété de l'algorithme

La convergence est très rapide : Si x_n est une approximation de r avec p chiffres significatifs *i.e.*

$$\|x_n - r\| \quad \leq \quad 2^{-p}$$

Alors x_{n+1} est une approximation de r avec environ $2p$ chiffres significatifs

$$\|x_{n+1} - r\| \quad \leq \quad 2^{-2p}$$

Cela reste vrai même s'il y a des erreurs d'arrondi dans le calcul de x_n.

- On peut dire que ces méthodes corrigent leurs propres erreurs d'arrondi.
- Dans le calcul de la suite (x_i), seul la dernière itération doit être faite avec toute la précision, les autres peuvent être faites avec moins de précision. $\Rightarrow$*plus rapidement*
- La division a la même complexité théorique que la multiplication

En dimension $n > 1$

Si $$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & \overrightarrow{x} & \longmapsto & (f_1(\overrightarrow{x}), \ldots, f_n(\overrightarrow{x})) \end{array}$$

Si $\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \overrightarrow{x} & \longmapsto & (f_1(\overrightarrow{x}), \ldots, f_n(\overrightarrow{x})) \end{array}$

on utilise la matrice Jacobienne de f :

$$\bigtriangledown f(x). \quad = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Pour calculer r

Pour calculer r

- On choisit x_0 suffisamment proche de r.

Méthode

Pour calculer r

- On choisit x_0 suffisamment proche de r.
- On construit le vecteur $f(x) = b$.

Méthode

Pour calculer r

- On choisit x_0 suffisamment proche de r.
- On construit le vecteur $f(x) = b$.
- On construit la matrice Jacobienne $A = \bigtriangledown f(x)$

Méthode

Pour calculer r

- On choisit x_0 suffisamment proche de r.
- On construit le vecteur $f(x) = b$.
- On construit la matrice Jacobienne $A = \bigtriangledown f(x)$
- On résout le système $Ay = b$

Méthode

Pour calculer r

- On choisit x_0 suffisamment proche de r.
- On construit le vecteur $f(x) = b$.
- On construit la matrice Jacobienne $A = \bigtriangledown f(x)$
- On résout le système $Ay = b$
- On pose $x_{k+1} = x_k - y$

Algorithme en dimension n

Données : x_0, NMAX et ε

début

$n \leftarrow 0$

répéter

$n \leftarrow n + 1$

$x \leftarrow x_0$

$b \leftarrow f(x)$

$A \leftarrow \nabla f(x)$

résoudre $Ay = b$

$x_0 \leftarrow x - y$

jusqu'à *(*$\|x - x_0\| \leq \varepsilon$*) ou (*$n =$*NMAX)*

Résultat : **si** *(*$n =$*NMAX)* **alors**

échouer

sinon

rendre x_0

fin

Condition de convergence

Condition de convergence

Si

- $\exists \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$
- f est différentiable sur un voisinage $\mathcal{V}$ de a et $\forall x \in \mathcal{V}$ $\| \bigtriangledown f(x) - \bigtriangledown f(a)\| \leq \alpha \|x - a\|$
- $\bigtriangledown f(a)$ inversible

alors $\exists \eta > 0$ t.q. si $\|x_0 - a\| < \eta$ la méthode de NEWTON converge vers a de façon quadratique.

Condition de convergence

Si

- $\exists \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$
- f est différentiable sur un voisinage $\mathcal{V}$ de a et $\forall x \in \mathcal{V}$
  $\| \bigtriangledown f(x) - \bigtriangledown f(a)\| \leq \alpha \|x - a\|$
- $\bigtriangledown f(a)$ inversible

alors $\exists \eta > 0$ t.q. si $\|x_0 - a\| < \eta$ la méthode de Newton converge vers a de façon quadratique.

- À chaque itération, il faut inverser la matrice $\bigtriangledown f(x)$
- Le point de départ doit toujours être au voisinage de la solution

Avantages et inconvénients

Avantages :

Avantages et inconvénients

Avantages :

- Convergence très rapide.

Inconvénients :

Avantages et inconvénients

Avantages :

- Convergence très rapide.

Inconvénients :

- La convergence n'est pas assurée.
- Il faut choisir un point de départ « au voisinage de la solution ».
  $\Rightarrow$*Il faut connaître la fonction* f
  (bug du pentium)
- Il faut calculer $f'(x)$.
- En dimension n, il faut inverser $\bigtriangledown f(x_n)$

Avantages et inconvénients

Avantages :

- Convergence très rapide.
- Très très rapide.

Inconvénients :

- La convergence n'est pas assurée.
- Il faut choisir un point de départ « au voisinage de la solution ».
  $\Rightarrow$*Il faut connaître la fonction* f
  (bug du pentium)
- Il faut calculer $f'(x)$.
- En dimension n, il faut inverser $\bigtriangledown f(x_n)$

Variantes de la méthode de NEWTON

Variantes de la méthode de NEWTON

- N'utiliser que la matrice $\bigtriangledown f(x_0)$. On peut alors préparer la matrice pour faciliter la résolution (décomposition PLU, voir cours suivant).
  - mêmes conditions d'utilisations
  - convergence linéaire

Variantes de la méthode de NEWTON

- N'utiliser que la matrice $\bigtriangledown f(x_0)$. On peut alors préparer la matrice pour faciliter la résolution (décomposition PLU, voir cours suivant).
  - mêmes conditions d'utilisations
  - convergence linéaire
- Pour $n = 1$, méthode des sécantes :
  on approche la dérivée de f par

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

  - C'est une méthode récurrente d'ordre 2 :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

  - Pour une fonction f au moins C^3 telle que $f'(r) \neq 0$ la convergence est exponentielle mais non quadratique.
    $\Rightarrow$*moins rapide que la méthode de* NEWTON

Conclusion

- Plusieurs méthodes existent
  - Méthode de dichotomie,
    - $+$ convergence assurée
    - $-$ convergence linéaire
  - Méthode de NEWTON,
    - $+$ convergence quadratique,
    - $-$ non assurée, calcul des dérivées
  - Sécantes,
    - $+$ convergence exponentielle sans calcul des dérivées
    - $-$ moins rapide que Newton
  - Autres méthodes de point fixe,
    - $-$ convergence linéaire
    - $-$ choix de g