

Exercice 1. Décrire des grammaires hors-contexte pour les langages suivants :

1. $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$;
2. $\{a^i b^j c^k \mid i \neq j \text{ ou } j \neq k\}$;
3. L'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui sont des palindromes.

Exercice 2. La grammaire suivante engendre le langage régulier $0^*1(0+1)^*$:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A1B, \\ A &\rightarrow 0A|\varepsilon, \\ B &\rightarrow 0B|1B|\varepsilon. \end{aligned}$$

Donner les dérivations à droite et à gauche des mots suivants :

1. 00101,
2. 1001,
3. 00011.

Exercice 3. Montrer que tout langage régulier est un langage hors-contexte.

Indication : raisonner par induction sur le nombre d'opérateurs dans l'expression régulière.

Exercice 4. On considère l'automate à piles $P = (\{q, p\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X\}, \delta, q, Z_0, \{p\})$ dont on définit δ de la manière suivante :

1. $\delta(q, 0, Z_0) = \{(q, XZ_0)\}$
2. $\delta(q, 0, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta(q, 1, X) = \{(q, X)\}$
4. $\delta(q, \varepsilon, X) = \{(p, \varepsilon)\}$
5. $\delta(p, \varepsilon, X) = \{(p, \varepsilon)\}$
6. $\delta(p, 1, X) = \{(p, XX)\}$
7. $\delta(p, 1, Z_0) = \{(p, \varepsilon)\}$

Décrire le comportement de P sur les entrées suivantes :

1. 01
2. 0011
3. 010

Exercice 5. On considère l'automate à pile P de l'exercice précédent. Soit L le langage reconnu par P par état final et L' celui qu'il reconnaît par pile vide.

1. Construire un automate à pile P_1 reconnaissant L par pile vide.
2. Construire un automate à pile P_2 reconnaissant L' par état final.

Exercice 6. Décrire un automate à piles acceptant les langages suivants (l'acceptation peut se faire par état final ou par pile vide) :

1. $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$;
2. l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ tels qu'aucun de leur préfixe n'a plus de 1 que de 0;
3. l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ ayant autant de 0 que de 1;
4. $\{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ or } j = k\}$.

Exercice 7.

Soit P un automate à piles reconnaissant un langage $L = N(P)$ par pile vide. Supposons que $\varepsilon \notin L$. Montrer comment modifier P pour qu'il reconnaisse $L \cup \{\varepsilon\}$ par pile vide.

Exercice 8. On considère un automate à piles $P = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, f\}, \{a, b\}, \{Z_0, A, B\}, \delta, q_0, Z_0, \{f\})$. Les règles définissant δ sont définies ci-dessous :

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0, a, Z_0) = (q_1, AAZ_0) & \delta(q_0, b, Z_0) = (q_2, BZ_0) & \delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = (f, \varepsilon) \\ \delta(q_1, a, A) = (q_1, AAA) & \delta(q_1, b, A) = (q_1, \varepsilon) & \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = (q_0, Z_0) \\ \delta(q_2, a, B) = (q_3, \varepsilon) & \delta(q_2, b, B) = (q_2, BB) & \delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = (q_0, Z_0) \\ \delta(q_3, \varepsilon, B) = (q_2, \varepsilon) & \delta(q_3, \varepsilon, Z_0) = (q_1, AZ_0) & \end{array}$$

1. Montrer que le mot $bab \in L(P)$.
2. Montrer que $abb \in L(P)$.
3. Décrire le contenu de la pile après lecture de $b^7 a^4$.
4. Quel est le langage reconnu par P ?

Exercice 9. Convertir la grammaire ci-dessous

$$\begin{array}{l} S \rightarrow 0S1 \mid A \\ A \rightarrow 1A0 \mid S \mid \varepsilon \end{array}$$

en un automate à pile reconnaissant le même langage par pile vide.

Exercice 10. Convertir la grammaire ci-dessous

$$\begin{array}{l} S \rightarrow aAA \\ A \rightarrow aS \mid bS \mid a \end{array}$$

en un automate à pile reconnaissant le même langage par pile vide.

Exercice 11. Convertir l'automate à pile $P = (\{p, q\}, \{0, 1\}, \{X, Z_0\}, \delta, q, Z_0)$ en une grammaire hors-contexte lorsque δ est définie par :

1. $\delta(q, 1, Z_0) = \{(q, XZ_0)\}$
2. $\delta(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta(q, \varepsilon, X) = \{(q, \varepsilon)\}$
5. $\delta(p, 1, X) = \{(p, \varepsilon)\}$

$$6. \delta(p, 0, Z_0) = \{(q, Z_0)\}$$

Exercice 12. On donne ci-dessous quelques langages hors-contexte. Donner des automates à piles reconnaissant ces langages par pile vide (on pourra dans un premier temps décrire les grammaires hors-contexte puis construire les automates à partir des grammaires).

1. $\{a^n b^m c^{2(n+m)} \mid n \geq 0, m \geq 0\}$
2. $\{a^i b^j c^k \mid i = 2j \text{ ou } j = 2k\}$
3. $\{0^n 1^m \mid n \leq m \leq 2n\}$

Exercice 13. Pour chacun des langages ci-dessous, décrire un automate à pile *déterministe* reconnaissant les langages ci-dessous :

1. $\{0^n 1^m \mid n \leq m\}$
2. $\{0^n 1^m \mid n \geq m\}$
3. $\{0^n 1^m 0^n \mid n \text{ et } m \text{ arbitraires}\}$

Exercice 14. Trouver une grammaire équivalente à

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid CA \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow BC \mid AB \\ C &\rightarrow aB \mid b \end{aligned}$$

sans symbole inutile.

Exercice 15. On considère la grammaire ci-dessous :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ASB \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow aAS \mid a \\ B &\rightarrow SbS \mid A \mid bb \end{aligned}$$

1. Éliminer les ε -productions.
2. Éliminer les productions unitaires.
3. Éliminer les symboles inutiles dans la grammaire résultante.
4. Mettre la grammaire résultante sous forme de Chomsky.

Exercice 16. Montrer que les langages ci-dessous ne sont pas hors-contexte :

1. $\{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$
2. $\{a^n b^n c^i \mid i \leq n\}$
3. $\{0^p \mid p \text{ premier}\}$
4. $\{0^i 1^j \mid j = i^2\}$
5. $\{a^n b^n c^i \mid n \leq i \leq 2n\}$
6. $\{ww^R w \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

Exercice 17. Montrer que les langages hors-contexte sont clos par les opérations init et L/a .

Exercice 18. Montrez que les langages hors-contexte ne sont pas clos par les opérations min et max telles que définies dans le TD1.

Soit L un langage hors-contexte. On définit $\text{half}(L)$ comme l'ensemble des premières moitiés des mots de L . Montrez que les langages hors-contexte ne sont pas clos par half.

Exercice 19. On considère les deux langages suivants :

$$L_1 = \{a^n b^{2n} c^m \mid n, m \geq 0\}$$

et

$$L_2 = \{a^n b^m c^{2m} \mid n, m \geq 0\}$$

- Montrez que L_1 et L_2 sont des langages hors-contexte.
- Le langage $L_1 \cap L_2$ est-il hors-contexte? Justifiez votre réponse.

Exercice 20. On considère la grammaire G définie par :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB|BC \\ A &\rightarrow BA|a \\ B &\rightarrow CC|b \\ C &\rightarrow AB|a \end{aligned}$$

Cette grammaire est-elle sous forme normale de Chomsky?

Utilisez l'algorithme vu en cours pour décider de l'appartenance des mots ci-dessous à $L(G)$:

- $ababa$
- $baaab$
- $aabab$

Exercice 21. Donner des algorithmes permettant de décider si :

- $L(G)$ est finie (où G est une grammaire donnée),
- $L(G)$ contient au moins 100 mots (où G est une grammaire donnée).

Exercice 22. Utilisez des techniques de programmation dynamique pour déterminer en complexité linéaire quels symboles d'une grammaire donnée se dérivent en ε .