

Exercice 1. Donner des automates finis acceptant les langages définis sur l'alphabet $\{0, 1\}$ ci-dessous :

1. L'ensemble des chaînes de caractères se terminant par 00.
2. L'ensemble des chaînes de caractères contenant trois 0 consécutifs.
3. L'ensemble des chaînes de caractères contenant 011.
4. L'ensemble des chaînes de caractères dont le 10-ième symbole compté à partir de la fin est 1.
5. L'ensemble des chaînes de caractères qui commencent ou terminent par 01.
6. L'ensemble des chaînes de caractères dont le nombre de 0 est divisible par 3.

Exercice 2. Soit A un automate fini déterministe et q un état de A tel que $\delta(q, a) = q$ pour tout symbole a . Montrer par induction sur la longueur des mots d'entrée que $\widehat{\delta}(q, w) = q$.

Exercice 3. Soit A un automate fini déterministe et a un symbole accepté par A tel que pour tout état q de A , $\delta(q, a) = q$.

1. Montrer par induction sur n que pour tout $n \geq 0$, $\widehat{\delta}(q, a^n) = q$.
2. Montrer que $\{a\}^* \subset L(A)$ ou $\{a\}^* \cap L(A) = \emptyset$.

Exercice 4. Soit $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_f\})$ un automate fini déterministe et supposons que pour tout a dans Σ , $\delta(q_0, a) = \delta(q_f, a)$.

1. Montrer que pour tout $w \neq \varepsilon$, on a $\widehat{\delta}(q_0, w) = \widehat{\delta}(q_f, w)$.
2. Montrer que si x est un mot non vide dans $L(A)$, alors pour tout $k > 0$, x^k est aussi dans $L(A)$.

Exercice 5. On considère un automate fini déterministe ayant la table de transition suivante :

	0	1
$\rightarrow A$	A	B
$\star B$	B	A

Décrire le langage accepté par cet automate en prouvant par induction sur la longueur des mots d'entrée que votre description est correcte.

Même question lorsque la table de transition est :

	0	1
$\rightarrow \star A$	B	A
$\star B$	C	A
C	C	C

Exercice 6. Convertir l'automate fini non-déterministe dont la table de transition est donnée ci-dessous en un automate fini déterministe :

	0	1
$\rightarrow p$	$\{p, q\}$	$\{p\}$
q	$\{r\}$	$\{r\}$
r	$\{s\}$	$\emptyset$
$\star s$	$\{s\}$	$\{s\}$

Même question pour l'automate fini non-déterministe dont la table de transition est donnée ci-dessous :

	0	1
$\rightarrow p$	$\{q, s\}$	$\{q\}$
$*q$	$\{r\}$	$\{q, r\}$
r	$\{s\}$	$\{p\}$
$*s$	$\emptyset$	$\{p\}$

Exercice 7. Donner des automates finis non-déterministes acceptant les langages définis ci-dessous (tirer profit au maximum du caractère non-déterministe) :

1. L'ensemble des chaînes de caractères sur l'alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ telles que leur dernier chiffre est apparu précédemment.
2. L'ensemble des chaînes de caractères sur l'alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ telles que leur dernier chiffre n'est pas apparu précédemment.
3. L'ensemble des chaînes de caractères sur l'alphabet $\{0, 1\}$ telles qu'elles contiennent deux zéros séparés par un nombre de lettres qui est multiple de 4.

Exercice 8. On considère un ε -automate fini non-déterministe donné par la table de transition suivante :

	ε	a	b	c
$\rightarrow p$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$
$*r$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$	$\{p\}$

1. Calculer la ε -cloture de chaque état.
2. Donner toutes les chaînes de caractères de longueur inférieur ou égale à trois acceptées par cet automate.
3. Convertir cet automate en un automate fini déterministe.

Exercice 9. Écrire les automates finis reconnaissant les langages suivants (ainsi que les expressions régulières associées) :

1. L'ensemble des mots de l'alphabet $\{a, b, c\}$ contenant au moins un a et au moins un b .
2. L'ensemble des mots de l'alphabet $\{0, 1\}$ dont le dixième symbole compté à partir de la fin est 1.
3. L'ensemble des mots de l'alphabet $\{0, 1\}$ qui contiennent au moins une paire de 1 consécutifs.
4. L'ensemble des mots de l'alphabet $\{0, 1\}$ tels que toute paire de 1 adjacents est précédée d'une paire de 0 adjacents.
5. L'ensemble des mots de l'alphabet $\{0, 1\}$ tels que le nombre de 0 contenus est divisible par cinq.
6. L'ensemble des mots de l'alphabet $\{0, 1\}$ tels qu'ils ne contiennent pas 101.
7. L'ensemble des mots de l'alphabet $\{0, 1\}$ tels que 0 et 1 apparaissent le même nombre de fois et qu'aucun préfixe a deux 0 de plus que de 1 ni deux 1 de plus que de 0.

Exercice 10. Convertir l'automate fini déterministe dont la table des transitions est donnée ci-dessous en une expression régulière. On utilisera la technique d'élimination d'état vue en cours.

	0	1
$\rightarrow q_1$	q_2	q_3
q_2	q_1	q_3
$*q_3$	q_2	q_1

Exercice 11. Convertir les expressions régulières ci-dessous en automates finis non-déterministes avec ε -transitions :

1. 01^*
2. $(0 + 1)01$
3. $00(0 + 1)^*$

Exercice 12. Prouver ou exhiber un contre-exemple aux lois algébriques faisant intervenir des expressions régulières ci-dessous :

- $(R + S)^* = R^* + S^*$
- $(RS + R)^*R = R(SR + R)^*$
- $(RS + R)^*RS = (RR^*S)^*$
- $(R + S)^*S = (R^*S^*)^*$
- $S(RS + R)^*R = RR^*S(RR^*S)^*$

Exercice 13. Prouver que les langages suivants ne sont pas réguliers :

1. $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$
2. L'ensemble des chaînes de caractères bien parenthésées.
3. $\{0^n 10^n \mid n \geq 1\}$
4. $\{0^n 1^m 2^n \mid n \text{ et } m \text{ sont des entiers arbitraires}\}$
5. $\{0^n 1^m \mid n \leq m\}$
6. $\{0^n 1^{2n} \mid n \geq 1\}$

Exercice 14. On considère un automate dont la table de transition figure ci-dessous.

	0	1
$\rightarrow A$	B	A
B	A	C
C	D	B
$\star D$	D	A
E	D	F
F	G	E
G	F	G
H	G	D

Donner la table des états distinguables et minimiser l'automate.

Exercice 15. Même exercice que le précédent pour l'automate décrit par la table de transition ci-dessous :

	0	1
$\rightarrow A$	B	E
B	C	F
$\star C$	D	H
D	E	H
E	F	I
$\star F$	G	B
G	H	B
H	I	C
$\star I$	A	E