Nom : .... Prénom : ....

MAIN4 Année 2021/2022

POLYTECH SORBONNE

Calculabilité - Décidabilité (ICC)

Interrogation n°2 du 15 novembre 2021 - Grammaires hors-contexte et automates à pile

Seul le polycopié de cours est autorisé - Durée : 30 min

Le barème est donné à titre indicatif

Le sujet se décompose en 3 exercices indépendants.

Exercice 1 (6 pts). Construire une grammaire hors-contexte G générant le langage

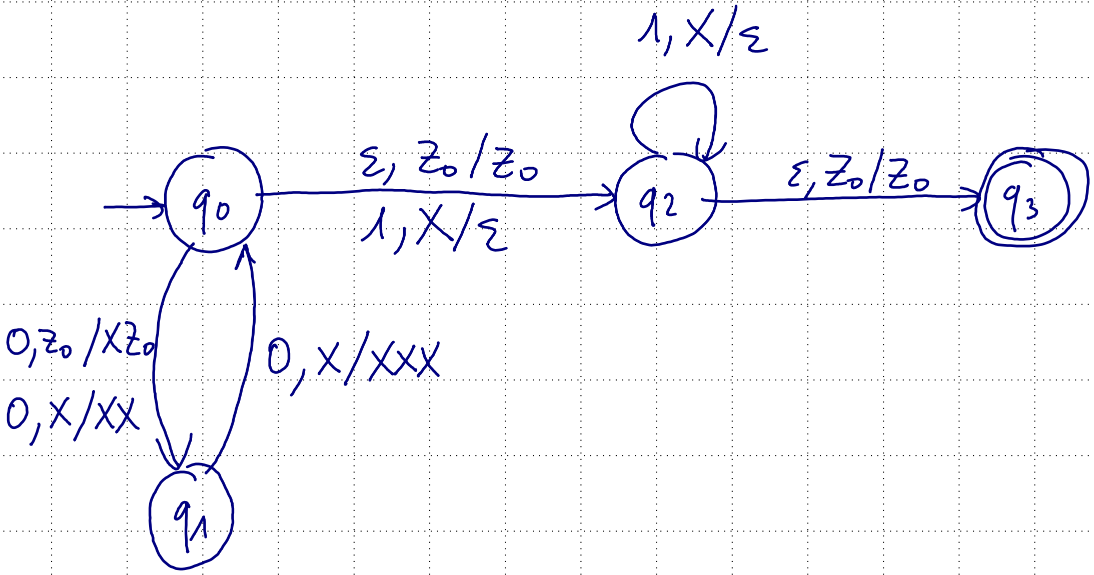
$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contient au moins trois } 1\}.$$

$S \to A1A1A1A$

$A \to A0 \mid A1 \mid \varepsilon$

Exercice 2 (7 pts). Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L = \{0^{2n}1^{3n} \mid n \geq 0\}$. Vous préciserez bien le mode d'acceptation. Avant de donner la construction, vous expliquerez rapidement le fonctionnement de votre automate. Donner une exécution de l'automate sur le mot 00111 et préciser si elle est acceptante.

Idée : quand on lit deux 0, on empile trois X et ensuite, on dépile un X lorsqu'on lit un 1.



Exécution sur l'entrée 00111

$$(q_0, 00111, Z_0) \vdash (q_1, 0111, XZ_0) \vdash (q_0, 111, XXXZ_0)$$
$$\vdash (q_2, 11, XXZ_0) \vdash (q_2, 1, XZ_0) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_0)$$
$$\vdash (q_3, \varepsilon, Z_0)$$

Le mot 00111 est accepté par l'automate.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 (7 pts). Soit la grammaire $G = (\{S, W, X, Y, Z\}, \{a, b\}, P, S)$ où P est donné par

$$\begin{array}{rcl} S & \to & aXb \mid aYbb \mid aZbbb \\ W & \to & aXb \mid aWbb \mid \varepsilon \\ X & \to & aXb \mid aX \mid \varepsilon \\ Y & \to & aYbb \mid Yb \mid \varepsilon \\ Z & \to & aZb \mid aZbb \end{array}$$

1. Mettre la grammaire G sous forme normale de Chomsky. Pour cela, vous expliquerez les différentes étapes de la mise sous forme normale de Chomsky et vous les détaillerez.

2. En utilisant l'algorithme CYK vu en cours, tester si le mot $abbb$ appartient à $L(G)$.

3. Quel est donc le langage engendré par cette grammaire ?

1) On voit clairement que les variables W et Z sont inutiles. Cela donne la grammaire

$$\begin{array}{l} S \to aXb \mid aYbb \\ X \to aXb \mid aX \mid \varepsilon \\ Y \to aYbb \mid Yb \mid \varepsilon \end{array}$$

En éliminant les ε-productions (X et Y sont les seules variables annulables), on obtient la grammaire

$$\begin{array}{l} S \to aXb \mid aYbb \mid ab \mid abb \\ X \to aXb \mid aX \mid ab \mid a \\ Y \to aYbb \mid Yb \mid abb \mid b \end{array}$$

qui est sous forme simplifiée.

Sa forme normale de Chomsky est donc

$$\begin{array}{l} S \to AC \mid AE \mid AB \mid AD \\ X \to AC \mid AX \mid AB \mid a \\ Y \to AE \mid YB \mid AD \mid b \\ A \to a \\ B \to b \\ C \to XB \\ D \to BB \\ E \to YD \end{array}$$

2) En appliquant l'algorithme CYK vu en cours, on construit le tableau suivant

$\{S, Y\}$			
$\{S, Y, C\}$	$\{E, Y\}$		
$\{S, X, C\}$	$\{Y, D\}$	$\{Y, D\}$	
$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
a	b	b	b

On en déduit que $abbb \in L(G)$

3) Le langage engendré par la grammaire est

$$L = \{ a^n b^m \mid m \leq n \text{ ou } n \leq 2m, \text{ avec } m, n \geq 1 \}.$$