Calculabilité - Décidabilité (ICC)

Interrogation n°2 du 2 novembre 2020 - Grammaires hors-contexte et automates à pile

Seul le polycopié de cours est autorisé - Durée : 45 min

Le barème est donné à titre indicatif

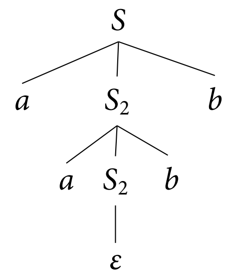
Le sujet se décompose en 4 exercices indépendants.

Exercice 1 (5 pts)**.** On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

1. Construire une grammaire hors-contexte G générant le langage $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j + k, i, j, k \geq 0\}$.
2. Donner une dérivation de G générant le mot $aaabcc$.
3. Donner l'arbre de dérivation de G de frontière $aabb$.

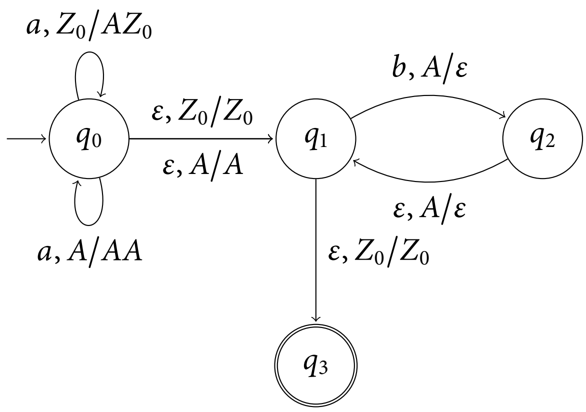
Solution :

1. $S \to a \cdot S_1 \cdot c \mid a \cdot S_2 \cdot b \mid \varepsilon$
   $S_1 \to a \cdot S_1 \cdot c \mid S_2$
   $S_2 \to a \cdot S_2 \cdot b \mid \varepsilon$
2. $S \Rightarrow aS_1c \Rightarrow aaS_1cc \Rightarrow aaS_2cc \Rightarrow aaaS_2bcc \Rightarrow aaabcc$
3.



Exercice 2 (5 pts)**.** Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L = \{a^i b^j \mid i = 2j\}$. Vous préciserez bien le mode d'acceptation. Avant de donner la construction, vous expliquerez *rapidement* le fonctionnement de votre automate. Donner une exécution de l'automate sur le mot $aaaabb$ et préciser si elle est acceptante.

Solution : On construit un automate acceptant par état final, qui commence par lire les a en empilant un symbole A sur la pile à chaque fois, puis qui lit les b en dépilant à chaque fois 2 A.



Exécution de l'automate : $(q_0, aaaabb, Z_0) \vdash (q_0, aaabb, AZ_0) \vdash (q_0, aabb, AAZ_0) \vdash (q_0, abb, AAAZ_0) \vdash (q_0, bb, AAAAZ_0) \vdash (q_1, bb, AAAAZ_0) \vdash (q_2, b, AAAZ_0) \vdash (q_1, b, AAZ_0) \vdash (q_2, \varepsilon, AZ_0) \vdash (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_3, \varepsilon, Z_0)$. L'exécution est acceptante.

Exercice 3 (5 pts). On considère la grammaire G suivante

$$\begin{aligned}
S &\to aAa \mid bBb \mid \varepsilon \\
A &\to C \mid a \\
B &\to C \mid b \\
C &\to CDE \mid \varepsilon \\
D &\to A \mid B \mid ab
\end{aligned}$$

Mettre la grammaire G sous forme normale de Chomsky.

Solution : On commence par supprimer les ε-productions. Les variables annulables sont $\{S, C, A, B, D\}$. On obtient alors une nouvelle grammaire reconnaissant $L(G)\setminus\{\varepsilon\}$ sans ε-production :

$$\begin{aligned}
S &\to aAa \mid bBb \mid aa \mid bb \\
A &\to C \mid a \\
B &\to C \mid b \\
C &\to CDE \mid DE \mid CE \mid E \\
D &\to A \mid B \mid ab
\end{aligned}$$

On supprime ensuite les productions unitaires. Les paires unitaires sont $\{(A, C), (B, C), (D, A), (D, B)\}$. On obtient alors une nouvelle grammaire reconnaissant $L(G)\setminus\{\varepsilon\}$ sans ε-production et sans production unitaire :

$$\begin{aligned}
S &\to aAa \mid bBb \mid aa \mid bb \\
A &\to CDE \mid DE \mid CE \mid E \mid a \\
B &\to CDE \mid DE \mid CE \mid E \mid b \\
C &\to CDE \mid DE \mid CE \mid E \\
D &\to CDE \mid DE \mid CE \mid E \mid a \mid b \mid ab
\end{aligned}$$

On élimine maintenant les symboles inutiles. La variable E n'étant pas productive, on obtient

$$\begin{aligned}
S &\to aAa \mid bBb \mid aa \mid bb \\
A &\to a \\
B &\to b \\
D &\to a \mid b \mid ab
\end{aligned}$$

La variable D étant inaccessible, on obtient

$$\begin{aligned}
S &\to aAa \mid bBb \mid aa \mid bb \\
A &\to a \\
B &\to b
\end{aligned}$$

On peut maintenant mettre la grammaire sous forme normale de Chomsky

$$
\begin{aligned}
S &\to XA \mid YB \mid AA \mid BB \\
A &\to a \\
B &\to b \\
X &\to AA \\
Y &\to BB
\end{aligned}
$$

Exercice 4 (5 pts)**.** On considère la grammaire G définie par :

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & AB \\
A & \to & BB|a \\
B & \to & AB|b
\end{array}
$$

En utilisant l'algorithme CYK, décider si le mot $aabbb$ appartient à $L(G)$.

Solution : En appliquant l'algorithme CYK vu en cours, on contruit le tableau suivant :

$$
\begin{array}{ccccc}
\{\mathbf{S}, B\} & & & & \\
\{A\} & \{S, B\} & & & \\
\{S, B\} & \{A\} & \{S, B\} & & \\
\varnothing & \{S, B\} & \{A\} & \{A\} & \\
\{A\} & \{A\} & \{B\} & \{B\} & \{B\} \\
\hline
a & a & b & b & b
\end{array}
$$

On en déduit alors que $aabbb \in L(G)$