MAIN4 Année 2021/2022

Calculabilité - Décidabilité (ICC)

Interrogation n°1 du 4 octobre 2021 - Automates finis

Seul le polycopié de cours est autorisé - Durée : 30 min

Le barème est donné à titre indicatif

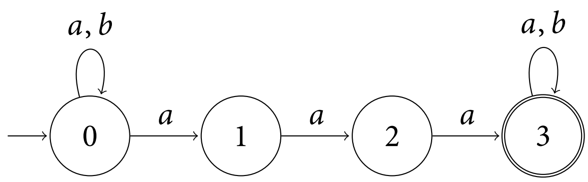
Le sujet se décompose en 4 exercices indépendants.

Exercice 1 (7 pts)**.** On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Soit L le langage comprenant tous les mots sur Σ ayant au moins trois occurrences successives de a.

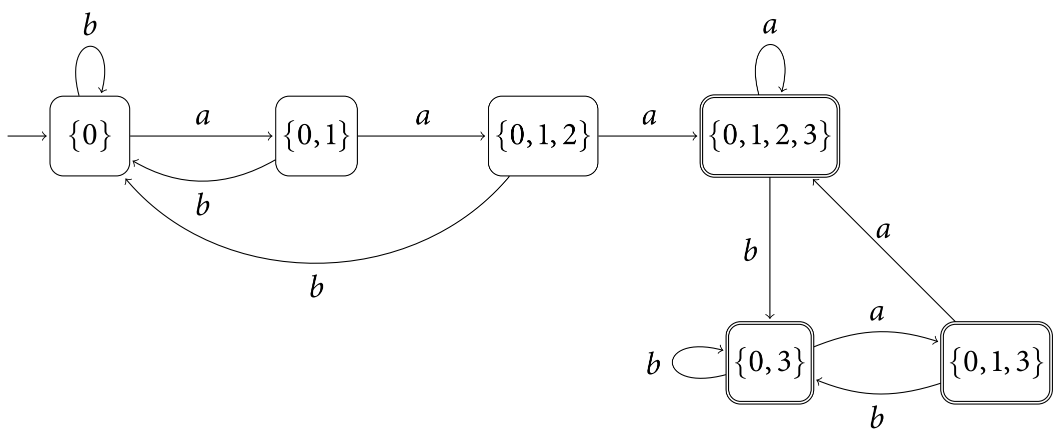
1. Donner un automate non déterministe reconnaissant L.
2. Construire un automate déterministe acceptant L.

Solution :

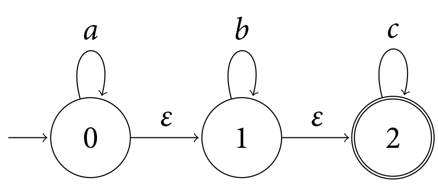
1. Un automate non déterministe reconnaissant le langage L est par exemple :



2. En déterminisant l'automate précedent, on obtient :



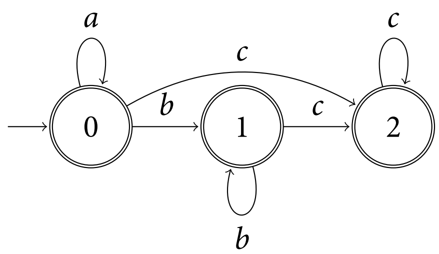
Exercice 2 (7 pts)**.** On considère l'automate suivant possédant des ε-transitions. Construire un automate reconnaissant le même langage mais sans ε-transition.



Solution : Pour les automates finis, les ε-transitions apportent de la concision mais ne changent pas le pouvoir d'expression du modèle.
Idée de l'algorithme : pour chaque état q, on calcule l'ensemble des états accessibles uniquement par une séquence d'ε-transitions. Cet ensemble est appelé l'ε-clôture de q, et noté $\mathrm{cl}_\varepsilon(q)$. Ensuite, la nouvelle fonction de transition associe à un état q et une lettre a l'ensemble des états que l'on peut atteindre en lisant une séquence d'ε-transitions, puis a. Ce qui revient à calculer les successeurs par a des états dans l'ε-clôture de q.
On accepte si on peut atteindre un état acceptant par une suite d'ε-transitions, autrement dit, les états ayant des états finaux dans leur ε-clôture.
Calculons l'ε-clôture de chacun des états :

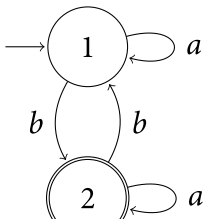
- $\mathrm{cl}_\varepsilon(0) = \{0, 1, 2\}$;
- $\mathrm{cl}_\varepsilon(1) = \{1, 2\}$;
- $\mathrm{cl}_\varepsilon(2) = \{2\}$.

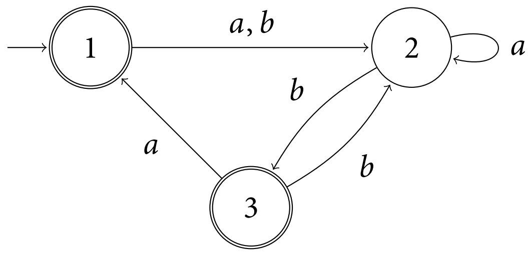
L'ensemble des états acceptants est $\{0, 1, 2\}$ car $\{2\}$ est final et se trouve dans $\mathrm{cl}_\varepsilon(0)$, $\mathrm{cl}_\varepsilon(1)$ et $\mathrm{cl}_\varepsilon(2)$.



Exercice 3 (6 pts)**.**

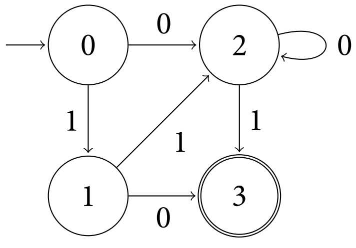
1. On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Construire un automate fini *déterministe* reconnaissant le langage généré par l'expression régulière $\mathbf{10} + (\mathbf{0} + \mathbf{11})\mathbf{0}^*\mathbf{1}$.
2. On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Déterminer des expressions régulières pour les automates suivants :



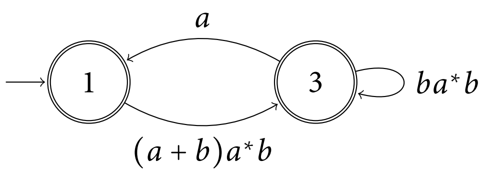


Solution :

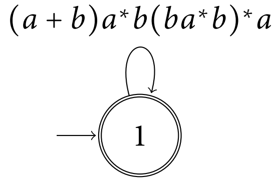
1. Soit on utilise la méthode vue en cours (avec alors des ε-transitions) et on déterminise ensuite, soit on « devine » directement l'automate. Voici une solution.



2. 1[er] automate : il s'agit d'un cas de base du cours. On a alors $(\mathbf{a} + \mathbf{ba}^*\mathbf{b})^*\mathbf{ba}^*$
   2[er] automate : on supprime d'abord l'état 2 et on obtient



On en déduit que $E_3 = ((a+b)a^*b)(ba^*b)^*a)^*(a+b)a^*b(ba^*b)^*$.
Si on supprime l'état 3, on obtient



On en déduit donc que $E_1 = ((a+b)a^*b(ba^*b)^*a)^*$. L'expression recherchée est $E_3 + E_1$.