Calculabilité - Décidabilité (ICC)

Interrogation n°1 du 5 octobre 2020 - Automates finis

Seul le polycopié de cours est autorisé - Durée : 30 min

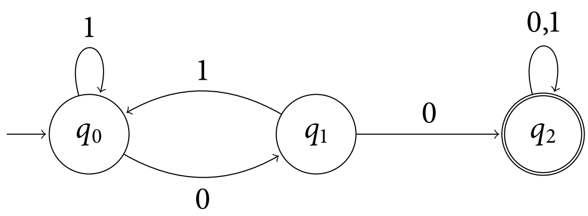
Le barème est donné à titre indicatif

Le sujet se décompose en 4 exercices indépendants.

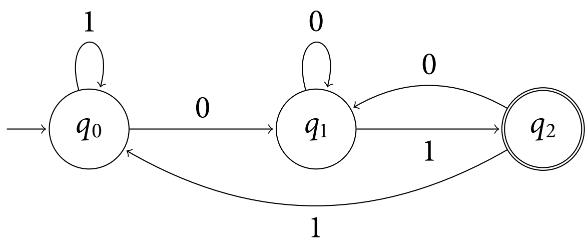
Exercice 1 (5 pts). Donner un automate fini déterministe reconnaissant l'ensemble de mots sur l'alphabet $\{0,1\}$ contenant le sous-mot 00 et se terminant par 01.

Solution : Le langage recherché peut s'écrire comme l'intersection des langages $L_1 = (\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{00}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$ et $L_2 = (\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01}$. Attention ce n'est pas le langage $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{00}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01}$ car 001 n'y appartient pas.

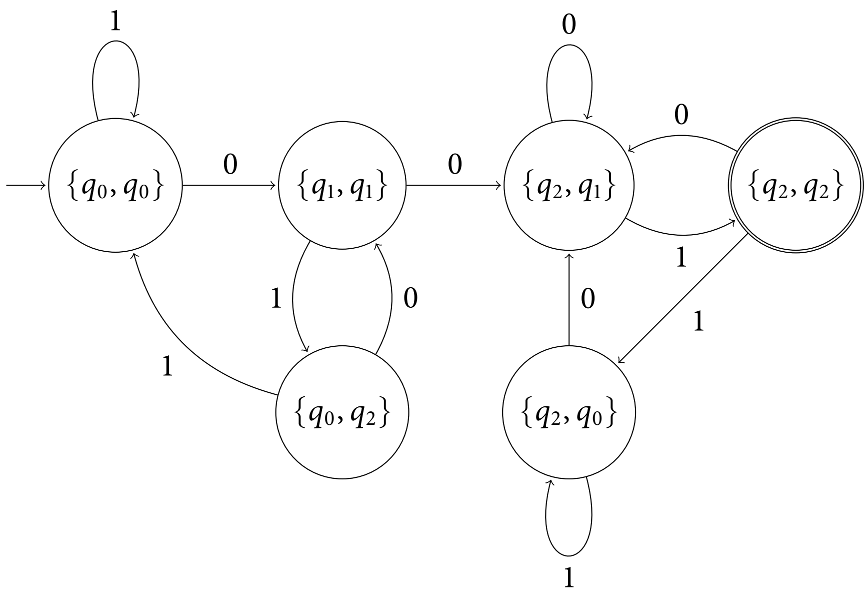
Automate déterministe reconnaissant L_1 :



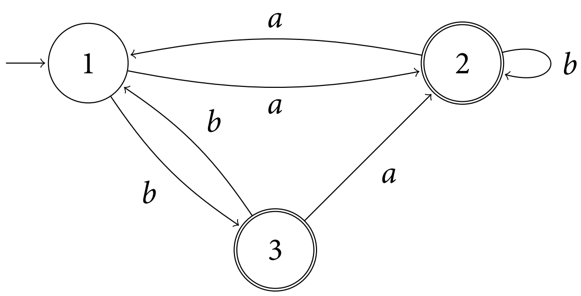
Automate déterministe reconnaissant L_2 :



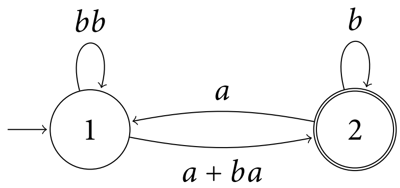
En appliquant la méthode du cours pour construire l'automate $L_1 \cap L_2$, on obtient



Exercice 2 (5 pts)**.** On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Déterminer une expression régulière pour le langage reconnu par l'automate suivant :

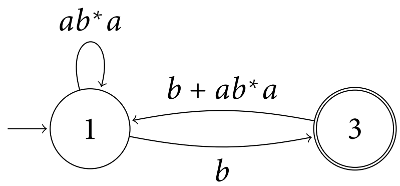


Solution : En supprimant l'état 3, on obtient l'automate



On a donc $E_2 = (ab^*a + b(b + ab^*a))^*b$.

En supprimant l'état 2, on obtient l'automate



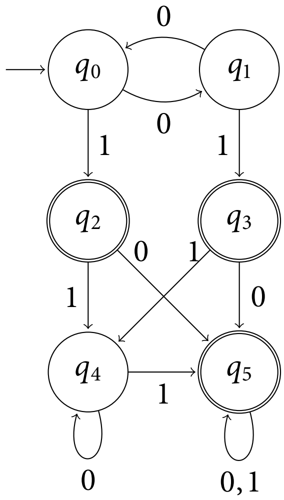
On a donc $E_3 = (bb + (a + ba)b^*a)^*(a + ba)b^*$.

Au final l'expression régulière est $E = E_2 + E_3 = (ab^*a + b(b + ab^*a))^*b + (bb + (a + ba)b^*a)^*(a + ba)b^*$.

Exercice 3 (5 pts)**.** On considère le langage $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$. En utilisant le lemme de pompage, montrer que le langage L n'est pas régulier.

Solution : On raisonne par l'absurde. Supposons que L soit régulier et soit n donné par le lemme de pompage. Prenons $w = 0^n10^n1$, c'est-à-dire $w = 0^n1$. D'après le lemme de pompage, on peut écrire $w = xyz$ avec $y \neq \varepsilon$ et $|xy| \leq n$. Il en résulte que y n'est pas le mot vide et ne contient que des 0. Par conséquent $xyyz$ n'appartient pas L contrairement à ce que dit le lemme de pompage. D'où la contradiction.

Exercice 4 (5 pts)**.** Donner l'automate fini déterministe minimal équivalent à l'automate suivant :



Solution : Comme dans le cours, on construit le diagramme permettant de distinguer les états.

q_1					
q_2	X	X			
q_3	X	X			
q_4	X	X	X	X	
q_5	X	X	X	X	X
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

On en déduit alors l'automate minimal.