ÉTUDE DU GROUPE CIRCULAIRE

par

Stef Graillat

On étudie le *groupe circulaire* (qui n'est autre que le groupe engendré par les homographie de la droite projective complexe et les inversions). On le caractérise géométriquement en montrant qu'il s'agit en fait du groupe des applications bijectives de la droite projective complexe qui préservent l'ensemble des droites et des cercles. Les techniques utilisées dans la preuve de cette caractérisation (homographie, birapport, envoi d'éléments à l'infini, etc.) permettent d'illustrer les leçons :

– 131 : Homographies de la droite complexe. Applications.
– 142 : Exemples de propriétés projectives et d'utilisation d'éléments à l'infini.

Nous avons utilisé principalement [**Aud98**, p.155] mais surtout la version anglaise de ce livre [**Aud02**, p.167]. On pourra aussi regarder dans [**?**, p.35].

On rappelle que le plan projectif $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est en bijection avec la sphère de Riemann $\widehat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

DÉFINITION 1. — On appelle *groupe circulaire* (ou groupe de Möbius) le groupe des transformations de $\widehat{\mathbf{C}}$ engendré par

– les homographies $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$;
– et la symétrie $z \mapsto \bar{z}$.

On le note G.

Remarque 2. — Le groupe circulaire G contient donc $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ et les inversions. En fait, le groupe circulaire G n'est autre que $\{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ avec $ad - bc \neq 0\}$.

PROPOSITION 3. — *Le groupe circulaire* G *est engendré par les inversions et les réflexions.*

Démonstration. — Soit φ un élément de G. Si $\varphi(\infty) = \infty$ alors φ est une similitude (directe ou indirecte) (en effet, si φ vaut $\frac{az+b}{cz+d}$ ou $\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, le fait que $\varphi(\infty) = \infty$ entraîne que $c = 0$). Elle est donc la composée d'une homothétie h et d'une isométrie u (voir [**Aud98**, p.74], proposition III-3.2). Nous savons que u est une composée de réflexions (voir [**Aud98**, p.48], théorème II-2.2) et que h est une composée d'inversions (voir [**Aud98**, p.80], proposition III-4.7). Si $\varphi(\infty) = \alpha$ avec $\alpha \neq \infty$, on compose φ avec une inversion I de pôle α et alors $\mathrm{I} \circ \varphi(\infty) = \infty$. On conclut comme précédemment. $\square$

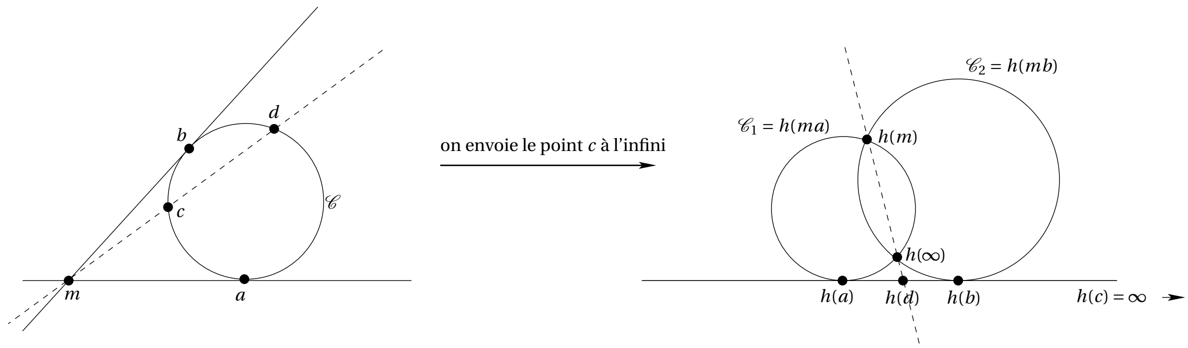
THÉORÈME 4. — *Les éléments du groupe circulaire* G *sont les applications* bijectives *de* $\widehat{\mathbf{C}}$ *dans* $\widehat{\mathbf{C}}$ *qui préservent l'ensemble des cercles et des droites.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente et les propriétés des réflexions et des inversions (voir [Aud98, p.78] §III-4), on en déduit que les éléments de G transforment cercles et droites en cercles et droites.

Réciproquement, soit $\varphi : \widehat{\mathbf{C}} \to \widehat{\mathbf{C}}$ une transformation préservant les cercles et les droites. Notons $\alpha = \varphi(\infty)$. Si $\alpha \neq \infty$, on peut composer par l'homographie $h(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ et alors $h \circ \varphi(\infty) = \infty$. L'application $h \circ \varphi$ préserve encore cercles et droites car une homographie préserve cercles et droites (voir [Aud98, p.154] corollaire V-7.8). On peut donc supposer que $\varphi(\infty) = \infty$. L'application φ envoie donc une droite sur une droite (car une droite passe par le point ∞). Comme φ est bijective, elle envoie alors cercles sur cercles (en effet, un cercle ne contient pas ∞. Or φ envoie un cercle sur un cercle ou une droite mais dans ce cas, il existe un point M du cercle tel que $\varphi(\mathrm{M}) = \infty$. Or φ étant bijective et $\varphi(\infty) = \infty$, on en déduit que $\mathrm{M} = \infty$, ce qui est exclu). On en conclut donc que φ induit une application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ qui envoie cercles sur cercles et droites sur droites.

On va maintenant montrer que φ préserve les *divisions harmoniques*. Pour cela, on va donner un moyen de construction géométrique de l'unique point d (étant donnés trois points a, b et c) tel que $[a, b, c, d] = -1$.

1^er^ cas : a, b et c sont cocycliques.

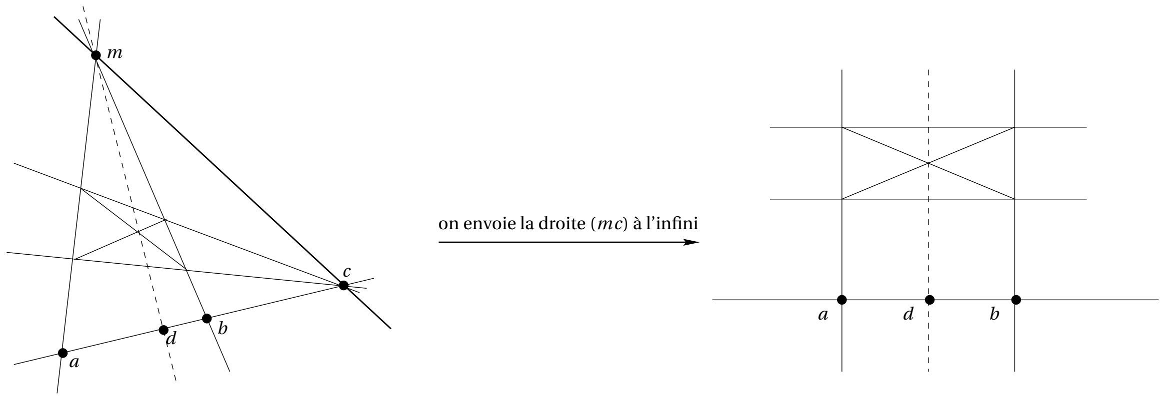


Envoyer c à l'infini revient à transformer la figure par une homographie h. Souvent, on ne note pas $h(a)$ l'image, mais seulement a, mais c'est moins clair. On travaille maintenant dans la figure de droite et on appelle a le point $h(a)$, etc. Le point d est sur l'axe radical des deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, on a donc $ad = db$ (voir [Aud98, p.86 et p.83]). Par conséquent, d est le milieu du segment $[a, b]$ et on a alors $[a, b, \infty, d] = [a, b, d, \infty]^{-1} = -1$ (voir [Aud98, p.152] remarque 6.6).

Remarque 5. — On a travaillé dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ car on a envoyé un point à l'infini.

2^e^ cas : a, b et c sont alignés.

On se place cette fois-ci dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ et on considère la droite (ab) comme $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$. On utilisera le fait que $[a, b, c, d]_{\mathbf{R}} = [a, b, c, d]_{\mathbf{C}}$ car $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{R}) \subset \mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ (voir [Aud98, p.153] proposition 7.5). On a donc que d est le milieu du segment $[a, b]$ et donc que



$[a,b,c,d] = [a,b,\infty,d] = [a,b,d,\infty]^{-1} = -1.$

On a donc un procédé de construction de *division harmonique*. On récapitule :

- φ envoie cercles sur cercles et droites sur droites ;
- φ est bijective (donc préserve la tangence et les points d'intersection).

Par conséquent, φ préserve les figures précédentes et donc les divisions harmoniques.

LEMME 6. — *Soit* $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *une transformation bijective qui préserve les divisions harmoniques et vérifiant* $\varphi(0) = 0$ *et* $\varphi(1) = 1$. *Alors* φ *est un automorphisme de corps de* $\mathbf{C}$.

Démonstration. — On sait que $[a,b,c,\infty] = -1$ si et seulement si c est le milieu du segment $[a,b]$. Comme φ conserve les divisions harmoniques, φ conserve les milieux : $\varphi(\frac{a+b}{2}) = \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$ (car $\varphi(\infty) = \infty$). En particulier (avec $b = 0$), on a $\varphi(a) = 2\varphi(\frac{a}{2})$ et donc $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. L'application φ est donc additive.

On a de plus que $[a,-a,a^2,1] = -1$. En effet, $[a,-a,a^2,1] = \frac{1+a}{1-a} \Big/ \frac{a^2+a}{a^2-a} = -1$. Donc $[\varphi(a),-\varphi(a),\varphi(a^2),1] = -1$ ($\varphi(-a) = -\varphi(a)$ car φ est additive et $\varphi(0) = 0$), d'où $\frac{1+\varphi(a)}{1-\varphi(a)} \Big/ \frac{\varphi(a^2)+\varphi(a)}{\varphi(a^2)-\varphi(a)} = -1$. Soit $(1+\varphi(a))(\varphi(a^2)-\varphi(a)) = (\varphi(a)-1)(\varphi(a^2)+\varphi(a))$. En simplifiant cette équation, on obtient $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$. Enfin, $ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$, donc avec la conservation des milieux ($\varphi(a) = 2\varphi(\frac{a}{2})$ d'où $\varphi(\frac{a}{2}) = \varphi(\frac{a}{4})$ et $\varphi(\frac{a}{4}) = \frac{1}{4}\varphi(a)$) et des carrés, l'additivité donne :

$$\varphi(ab) = \frac{1}{4}[(\varphi(a)+\varphi(b))^2 - (\varphi(a)-\varphi(b))^2] = \varphi(a)\varphi(b),$$

de sorte que φ est bien un automorphisme du corps $\mathbf{C}$. □

Reprenons la preuve du théorème 4. Posons $\alpha = \varphi(0)$ et $\beta = \varphi(1)$. On a $\alpha \neq \beta$ car φ est bijective. Notons s la similitude directe qui envoie α sur 0 et β sur 1 définie par $s(z) = \frac{1}{\beta-\alpha}z - \frac{\alpha}{\beta-\alpha}$. Quitte à composer par cette similitude, on peut supposer que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$. Or φ envoie droites sur droites. La droite $\mathbf{R}$ est donc envoyée sur une droite contenant 0 et 1. Il ne peut donc s'agir que de $\mathbf{R}$. Par conséquent, φ préserve l'axe réel et est un automorphisme du corps $\mathbf{C}$. Or, il est bien connu que les seuls automorphisme de $\mathbf{C}$ préservant l'axe réel sont l'identité et la conjuguaison. D'où, $\varphi(z) = z$ ou $\varphi(z) = \overline{z}$. □

Références

[Aud98] M. AUDIN – *Geometrie*, Belin, 1998.

[Aud02] ______ , *Geometry*, Universitext, Springer, 2002.

[Vid02] R. VIDONNE – *Groupe circulaire, rotations et quaternions*, Ellipses, 2002.

---

9 décembre 2004

STEF GRAILLAT, Université de Perpignan, 52, avenue Paul Alduy, F-66860 Perpignan Cedex
E-mail : graillat@univ-perp.fr • *Url :* http://gala.univ-perp.fr/~graillat