

# TADI 2016-2017 - 2e partie

2 février 8h30-10h30

Seul document autorisé : une feuille A4 recto-verso de notes

## 1 Modèles déformables

1. La segmentation par modèle déformable s'écrit dans sa forme classique paramétrique comme la minimisation de

$$E(v) = \int_0^1 \left[ \alpha(s) \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \beta(s) \left( \frac{d^2v}{ds^2} \right)^2 - \|\nabla f(v(s))\| \right] ds$$

où  $v$  représente une courbe paramétrée par  $s$  et  $f$  est la fonction d'intensité de l'image.

- Expliquer la signification et le rôle des différents termes de cette énergie.
  - Quel est le rôle de l'initialisation ?
  - Quel peut être l'effet d'un terme supplémentaire de pression (force de "ballon") ?
  - Quel est l'intérêt d'utiliser une carte de gradients diffusés ?
2. Quel est le principe de la segmentation utilisant la fonctionnelle de Mumford et Shah ? Quel est l'intérêt du terme sur la longueur des contours ?
  3. Quelle est la différence entre les modèles déformables géométriques (implicites) et paramétriques ?

## 2 Analyses multi-résolution et Ondelettes

### 2.1 Espaces d'échelles

1. Soit une image  $I$  définie comme une fonction de  $\mathbb{R}^2$ . On considère une famille d'images  $(I_s)_{s>0}$  dépendant continûment du paramètre  $s$  et formant une représentation linéaire multi-échelles de  $I$ .

Rappeler, sous forme d'équations, les liens entre  $I$ ,  $I_0$  et  $I_s$ .

2. Expliquer ce qu'est le principe de causalité et pourquoi il doit être respecté lorsqu'on considère des représentations multi-échelles d'une image.
3. Qu'est que la dérivée normalisée (on donnera une définition) ? À quoi sert-elle ?
4. **Exercice** : montrer que la représentation  $(I_s)_{s>0}$  définie dans la question 1. vérifie le principe de causalité.
5. **Exercice** : on considère le schéma numérique 1D suivant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), j = 1 \cdots N, n \in \mathbb{N}^*, \Delta t > 0, \Delta x > 0$$

- a) Donner l'équation aux dérivées partielles correspondant à ce schéma numérique.

- b) Expliquer le rôle des paramètres  $\Delta x$  et  $\Delta t$ .
- c) En utilisant l'analyse de Fourier des erreurs, montrer que ce schéma est inconditionnellement instable.
6. **Exercice.** La méthode de Perona-Mali considère le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial I}{\partial s}(x, y, s) = \nabla \cdot (c(x, y, s) \nabla I(x, y, s)), \quad (x, y) \in [0, 1]^2, s > 0 \quad (1)$$

$$I(x, y, 0) = I_0(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1]^2 \quad (2)$$

où  $I_0$  est une image à traiter,  $c$  une fonction à valeur réelles positives et  $\nabla$  l'opérateur gradient spatial (il porte sur les variables  $x$  et  $y$ ).

- a) Développer le terme de droite de l'équation (1) de façon à faire apparaître deux termes, l'un en  $\nabla I$  et l'autre en  $\nabla^2 I$ .
- b) Expliquer le comportement de l'équation selon les valeurs que peut prendre la fonction  $c$ .
- c) Rappeler le choix de Perona-Malik pour la fonction  $c$ , expliquer également quel usage on peut en faire en traitement d'image.
- d) Sans démonstration : la méthode de Perona-Malik vérifie-t-elle le principe de causalité? si oui à quelle(s) condition(s)?

## 2.2 Résolution temporelle et fréquentielle

On considère la fonction  $x(t)$  suivante, avec  $f_0 = \frac{1}{T_0}$  :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cdot \text{Rect}\left(\frac{t - 3T_0}{6T_0}\right) + \cos(6\pi f_0 t) \cdot \text{Rect}\left(\frac{t - 9T_0}{6T_0}\right) \quad (3)$$

On rappelle que  $\text{Rect}(t)$  est la fonction porte :  $\text{Rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

1. Représenter graphiquement  $x(t)$  pour  $t \in [0; 12T_0]$ .
2. Quelles sont les composantes temporelles et fréquentielles intéressantes pour analyser  $x(t)$ ? Peut-on les détecter à partir de la transformée de Fourier  $X(f) = TF[x(t)]$ ? Justifier.

**On s'intéresse maintenant à la transformée de Fourier fenêtrée  $X(f, b)$  de  $x(t)$ .** On rappelle que la  $X(f, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bar{w}(t - b) e^{-2i\pi f t} dt$ . On va ici considérer une fenêtre Gaussienne, *i.e.*  $w(t) = g_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ . On supposera que  $g_\sigma(t) \approx 0$  pour  $|t| > 3 \cdot \sigma$ .

3. Calculer  $X(f, b)$ , avec 2 fenêtres Gaussiennes d'écart-type  $\sigma = T_0$ , la première centrée en  $3T_0$  ( $b = 3T_0$ ), la seconde en  $9T_0$ .  
— Tracer le spectrogramme  $|X(f, b)|$ . Les composantes du signal peuvent-elle être correctement séparées en temps et en fréquence? Justifier.

**Rappel : transformée de Fourier d'une Gaussienne :**

$$TF[g_\sigma(t)] = G(f) = e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2} = e^{-\frac{f^2}{2\sigma_f^2}}, \text{ avec } \sigma_f = \frac{1}{\pi\sigma}.$$

- Calculer la transformée de Fourier fenêtrée  $X(f, b)$ , avec 4 fenêtres Gaussiennes d'écart-type  $\frac{T_0}{2}$ , centrées respectivement en  $\frac{3T_0}{2}$ ,  $\frac{9T_0}{2}$ ,  $\frac{15T_0}{2}$ ,  $\frac{21T_0}{2}$ .  
— Tracer le spectrogramme  $|X(f, b)|$ . Les composantes du signal peuvent-elle être correctement séparées en temps et en fréquence? Justifier.
- Quelle est la limite intrinsèque de la transformée de Fourier fenêtrée ici illustrée? Quelle solution apporte la transformée en ondelettes?

### 2.3 Compressive Sensing et échantillonnage

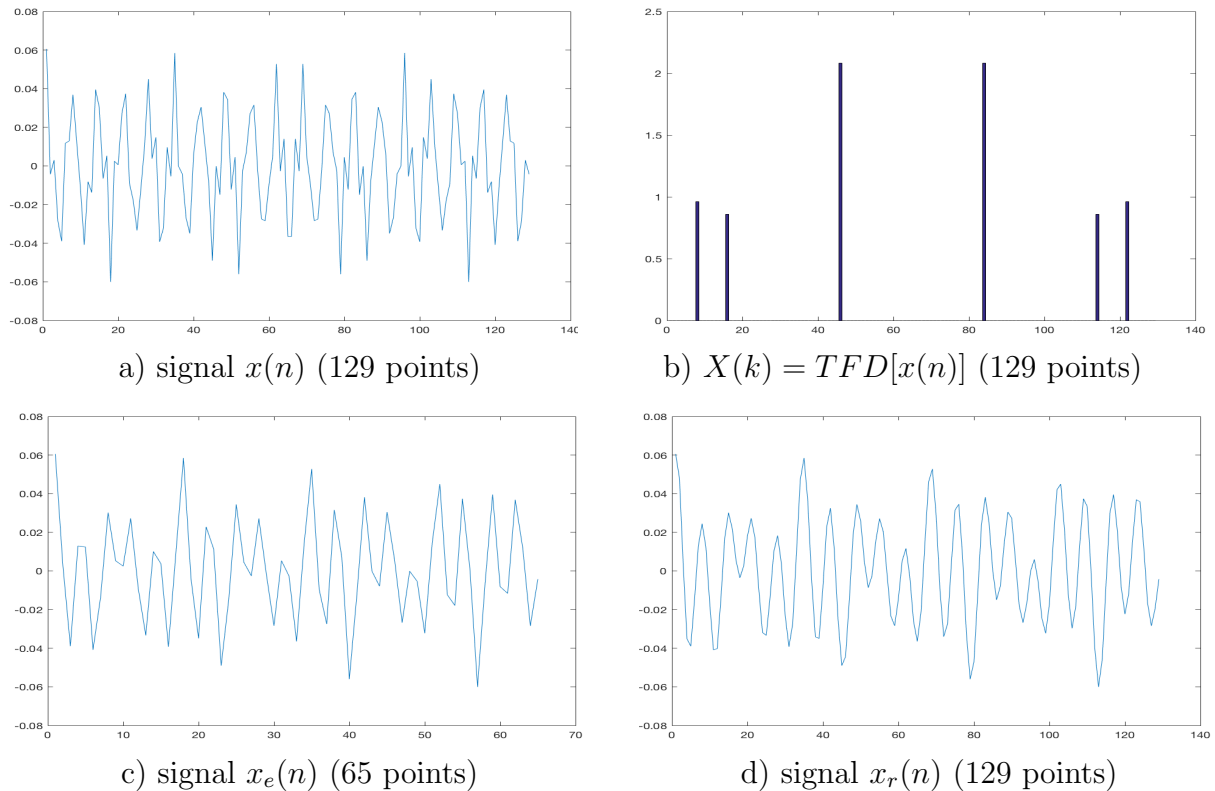


FIGURE 1 – Sous-échantillonnage et reconstruction par interpolation de Shannon. On considère en a) un signal  $x(n)$  (129 points) dont la transformée de Fourier discrète  $X(k) = TFD[x(n)]$  est donnée en b). On sous-échantillonne d'un facteur 2 le signal  $x(n)$  pour former le signal  $x_e(n)$  donné en c). L'application de la technique d'interpolation de Shannon produit le signal  $x_r(n)$  montré en d).

On considère le signal discret  $x(n)$  (129 échantillons) de la Figure 1a), dont la transformée de Fourier discrète  $X(k) = TFD[x(n)]$  est donnée à la Figure 1b). On

sous-échantillonne  $x(n)$  d'un facteur 2 pour former  $x_e(n)$ , cf Figure 1c). On applique à  $x_e(n)$  la technique d'interpolation de Shannon<sup>1</sup> pour produire le signal  $x_r(n)$ .

1. La reconstruction  $x_r(n)$  obtenue à partir de  $x_e(n)$  est-elle exacte? Expliquer.
2. On veut maintenant appliquer la technique d'acquisition comprimée (compressive sensing) pour échantillonner et reconstruire  $x(n)$ . Certaines propriétés, vérifiées par  $x(n)$  à la Figure 1a), vont être utilisées pour avoir une reconstruction exacte.
  - Quelle propriété de  $X(k) = TFD[x(n)]$  de la Figure 1b) va être exploitée?
  - Quelle(s) condition(s) la matrice de mesure doit-elle respecter? Donner un exemple.
    - Écrire le code d'une fonction (`matlab`) `y= mesure(signal)`.
  - Quelle formulation du problème va être résolue pour reconstruire le signal à partir des mesures?

---

1. Il s'agit de multiplier la TFD de  $x_e(n)$  pour une fonction rectangle de fréquence de coupure  $\frac{1}{2}$ .