TADI-5I650 2017-2018 - examen réparti 2

8 février 2018 8h30-10h30

Seul document autorisé : une feuille A4 recto-verso.
L'examen comporte 4 parties et est noté sur 40.
Le barème est approximatif et est susceptible de changer.

Partie 1 et 2 : Méthodes *a contrario* et Graph cut (20 points)

Vous répondrez directement sur les énoncés distribués séparément.

Partie 3 : Analyses multi-résolution et Ondelettes (12 points

Exercice 1 Résolution temporelle et fréquentielle (7 points)

On considère la fonction $x(t)$ suivante, avec $f_1 = \frac{1}{T_1}$:

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) \cdot \mathrm{Rect}(\frac{t - T_1}{2T_1}) + \cos(8\pi f_1 t) \cdot \mathrm{Rect}(\frac{t - 3T_1}{2T_1}) \tag{1}$$

On rappelle que $\mathrm{Rect}(t)$ est la fonction porte : $\mathrm{Rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Représenter graphiquement $x(t)$ pour $t \in [0; 4T_1]$.
2. Quelles sont les composantes temporelles et fréquentielles intéressantes pour analyser $x(t)$? Peut-on les détecter à partir de la transformée de Fourier $X(f) = TF[x(t)]$? Justifier.

   On s'intéresse maintenant à la transformée de Fourier fenêtrée $X(f, b)$ de $x(t)$. On rappelle que la $X(f, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\bar{w}(t - b)e^{-2i\pi f t}dt$.
   On va ici considérer une fenêtre $w_T(t)$ triangulaire, définie de la manière suivante :

   $$w_T(t) = \begin{cases} T - |t| & \text{si } |t| \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2}$$

   La transformée de Fourier de $w_T(t)$ s'écrit : $TF[w_T(t)] = [T \,\mathrm{sinc}(\pi f T)]^2$, où $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

3. Calculer la transformée de Fourier fenêtrée $X(f, b)$, avec 2 fenêtres triangulaires disjointes de taille $2T_1$, la première centrée en T_1, *i.e.*. $w_{T_1}(t - T_1)$, la seconde en $3T_1$, *i.e.*. $w_{T_1}(t - 3T_1)$.
   N.B. : On considérera que $\mathrm{sinc}(\pi f T)^2 \approx 0$ pour $|f| > \frac{1}{T}$ (c'est à dire que le carré de la fonction sinus cardinal sera considéré nul en dehors du lobe principal de la fonction sinc).
   — Tracer le spectrogramme $|X(f, b)|$. Les composantes du signal peuvent-elle être correctement séparés en temps et en fréquence ? Justifier.
4. Calculer la transformée de Fourier fenêtrée $X(f, b)$, avec 4 fenêtres triangulaires disjointes de taille T_1, centrées respectivement en $\frac{T_1}{2}$, $\frac{3T_1}{2}$, $\frac{5T_1}{2}$, $\frac{7T_1}{2}$.

— Tracer le spectrogramme $|X(f,b)|$. Les composantes du signal peuvent-elle être correctement séparés en temps et en fréquence ? Justifier.

5. Quelle est la limite intrinsèque de la transformée de Fourier fenêtrée ici illustrée ? Quelle solution apporte la transformée en ondelettes ?

Exercice 2 Ondelettes de Haar (5 points)

On rappelle que la fonction d'échelle ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \tag{3}$$

est une fonction d'échelle admissible pour construire une analyse multi-résolution de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. La projection sur V^j est données par les fonctions de base $\phi_k^j(t) = \sqrt{2^j}\ \phi(2^j t - k)$.

On considère le signal discret $S = [2\ 4\ 8\ -1]$, que l'on peut représenter dans V^2.

1. Représenter graphiquement les fonctions de base de V^2.

   La décomposition en ondelette va consister à déterminer récursivement les espaces tels que : $V^{j+1} = V^j \oplus W^j$. Pour les ondelettes de Haar, on peut montrer que $\psi_k^j(t) = \sqrt{2^j}\ \psi(2^j t - k)$ définissent une base orthonormée de W^j, avec : $\Psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$.

   On va donc avoir $V^2 = V^0 \oplus W^0 \oplus W^1$

2. Représenter les fonction de base de V^0, W^0 et W^1. Justifier la terme d'analyse multi-résolution en analysant qualitativement les supports temporels et fréquentiels des différentes fonctions de base dans $V^0 \oplus W^0 \oplus W^1$.

3. Pour passer de V^{j+1} à $V^j \oplus W^j$, on rappelle que le calcul des coefficients avec les ondelettes de Haar est le suivant :

$$s_k^j = \frac{s_{2k}^{j+1} + s_{2k+1}^{j+1}}{\sqrt{2}} \qquad d_k^j = \frac{s_{2k}^{j+1} - s_{2k+1}^{j+1}}{\sqrt{2}}$$

   — Représenter S dans $V^1 \oplus W^1$ puis dans $V^0 \oplus W^0 \oplus W^1$.

   — Peut-on directement décompresser le signal ? Si oui préciser, sinon justifier.

Partie 4 : espaces d'échelles (8 points)

Exercice 3 Question de cours (3 points)

1. Parmi les espaces d'échelles linéaires/non linéaires, continus/discrets, le(s)quelle(s) admettent une représentation unique ?
2. Quelles sont les différences entre une méthode multi-échelle et une méthode multi-résolution ? Une méthode multi-résolution est-elle multi-échelle et réciproquement une méthode multi-échelle est-elle multi-résolution ?
3. Quels sont la ou les propriétés axiomatiques communes à toutes les représentations multi-échelles ?

Exercice 4 Schéma de Crank-Nicholson (3 points)

Soit une fonction $(x,t) \mapsto u(x,t)$ défini sur $[x_0, x_1] \times \mathbb{R}^+$ vérifiant l'équation de la chaleur. On pose $u_j^n = u(x_0 + j\triangle x, n\triangle t)$ avec $j = \{1, \cdots, N\}$ et $n \in \mathbb{N}$‘. On considère le schéma numérique suivant :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{c\triangle t}{2\triangle x^2}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \tag{4}$$

1. Dans le contexte des représentations multi échelles des signaux que représente le paramètre c ?
2. Montrer que ce schéma est inconditionnellement stable.
3. Ce schéma est-il implicite ou explicite ?

Exercice 5 Programmation (2 points)

On rappelle que la diffusion de Perona-Malik obéit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y;t) = \nabla.(g(\|\nabla u(x,y;t)\|)\|\nabla u(x,y;t)\|) \tag{5}$$

avec $g(x) = e^{-\left(\frac{x}{\kappa}\right)^2}$. En cours, nous avons donné le schéma numérique suivant implémentant l'équation (pour un pas de temps à 1) :

$$u_{i,j}^{k+1} = eu_{i,j}^k + [C_N.\nabla_N u^k + C_S.\nabla_S u^k + C_E.\nabla_E u^k + C_W.\nabla_W u^k] \tag{6}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\nabla_N u &= u_{i-1,j} - u_{i,j} & C_N &= g_{i,j} \\
\nabla_E u &= u_{i,j+1} - u_{i,j} & C_E &= g_{i,j+1} \\
\nabla_S u &= u_{i+1,j} - u_{i,j} & C_S &= g_{i+1,j} \\
\nabla_W u &= u_{i,j-1} - u_{i,j} & C_W &= g_{i,j}
\end{aligned}$$

Écrire une fonction `matlab` qui prend une image (sous la forme d'une matrice) en entrée, le paramètre κ, un temps k et retourne la représentation à l'échelle k de l'image d'entrée.