Évaluation de la distribution d'une variable aléatoire à travers un filtre numérique

Encadrant : Thibault HILAIRE (`thibault.hilaire@lip6.fr`), bureau 26-00 326
Mots-clés : densité de probabilité, polynôme par morceaux, calcul multi-précision

Contexte :

Les filtres linéaires à paramètres invariants (LTI) sont des briques de bases d'algorithmes de traitement du signal ou de commande. Ceux-ci sont classiquement implémentés en arithmétique virgule fixe (une arithmétique où on utilise les calculs en entier du processeur, quand celui-ci ne dispose pas d'unité de calcul en arithmétique flottante), et, dans le cadre de la génération automatique de code virgule fixe implémentant des filtres LTI, il est nécessaire d'évaluer la dynamique de toutes les variables. Cela équivaut à étudier les valeurs maximum possibles prises par la sortie d'un filtre LTI, connaissant les valeurs maximum prises par son entrée.

Dans certains cas, les valeurs maximum possibles (le pire cas) ne sont que très peu probable et sont de plusieurs ordre de grandeur (en base 2) plus grande que les autres valeurs prises. Il peut être intéressant de dimensionner l'arithmétique virgule fixe en ne se basant pas sur le pire cas, mais sur une valeur que l'on ne dépasse *quasiment* jamais.
En supposant que l'entrée est uniformément distribuée entre deux valeurs, il serait donc intéressant de connaitre la densité de probabilité de la sortie (pour évaluer quel maximum est admissible avec une probabilité de $1-\varepsilon$).

Sujet :

On peut définir un filtre LTI par l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{x}(k+1) & = & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}u(k) \\ y(k) & = & \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(k) + du(k) \end{array} \right.$$

où $u(k)$ est l'entrée à l'instant k, $y(k)$ la sortie, et $\boldsymbol{x}(k)$ un vecteur stockant l'état interne du filtre. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ et d définissent le filtre. On notera que le rayon spectral de $\boldsymbol{A}$ est strictement inférieur à 1.
On note $h(k)$ la réponse du filtre à une impulsion ($h(0)=d$ et $h(k)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{b}$ pour $k>0$). La sortie $y(k)$ peut se calculer par :

$$y(k) = \sum_{l=0}^{k} h(l)u(k-l)$$

Si l'entrée $u(k)$ est uniformément distribuée dans $[-\bar{u};\bar{u}]$, alors, pour tout k, $y(k)$ est compris dans l'intervalle $[-\bar{y}_k;\bar{y}_k]$ avec $\bar{y}_k = \bar{u}\sum_{l=0}^{k}|h(l)|$.
Pour connaitre la distribution de $y(k)$, il faut utiliser le fait que si deux variables aléatoires x_1 et x_2 sont indépendantes (ce que l'on suppose être le cas pour $u(l)$ et $u(m)$ si $l \neq m$), de densité de probabilité f_1 et f_2, alors la densité de probabilité de la variable aléatoire x_1+x_2 est f, produit de convolution de f_1 et f_2 :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u)f2(x-u)du$$

Heureusement, les densités de probabilités des variables aléatoires uniformément distribuées sont constantes, à support finie, ce qui fait que la densité de probabilité de $y(k)$ est un polynôme (par morceaux) de degré au plus k. Et une formule explicite (peu facile à utiliser) existe [1, 2, 3].

Enfin, on s'intéressera au comportement de cette densité de probabilité quand $k \to \infty$. En majorant $h(k)$ par une constante fois la puissance $k^{\text{ème}}$ du rayon spectral de $\boldsymbol{A}$, il sera possible d'obtenir un encadrement pour la densité de probabilité.

Réalisation

Il s'agit de mettre en place un programme (en C ou en Python, ou en combinant les deux) permettant, à partir des matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ et d, de :

1. Obtenir une idée de la distribution et de sa forme en réalisant un grand nombre de simulations (on regardera l'influence du rayon spectral de $\boldsymbol{A}$ sur la forme de la distribution) ;
2. Calculer la densité de probabilité pour $y(k)$ en se basant sur les formules explicites de la bibliographie (on ne pourra le faire que pour k faible, car la densité de probabilité est un polynôme en 2^k morceaux) ;
3. D'utiliser une bibliothèque d'arithmétique en multi-précision (`MPFR` par exemple) pour appréhender les erreurs de calcul de cette densité de probabilité (on ne fera pas l'analyse mathématique, mais on examinera numériquement le comportement en fonction de la précision de calcul utilisée) ;
4. Enfin, être capable de calculer, à une précision ε donnée, la densité de probabilité d'avoir, quelle que soit la valeur de k, une valeur de $y(k)$ plus grande qu'une valeur donnée (2^p par exemple).

Bien que ce sujet apparaisse comme très *mathématique*, un réel effort est nécessaire pour le développement logiciel et pour l'analyse de la précision des calculs qui en découle.

Références

[1] J. S. Kang, S. L. Kim, Y. H. Kim, and Y. S. Jang, "Generalized convolution of uniform distributions," *J. Applied Mathematic & Informatics*, vol. 28, no. 5-6, pp. 1573–1581, 2010.

[2] F. Killmann and E. von Collani *Economic Quality Control*, no. 1, pp. 17–41, 2001.

[3] D. M. Bradley and R. C. Gupta, "On the distribution of the sum of n non-identically distributed uniform random variables," *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, pp. 689–70, 2002.

[4] E. G. Olds, "A note on the convolution of uniform distributions," *Ann. Math. Statist.*, vol. 23, pp. 282–285, 06 1952.