Résolution d'équations différentielles

Polytech'Paris-UPMC

Introduction

Le problème

- Soit un intervalle $[a, b]$, $a < b$.
- Soit une fonction définie et continue $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Soient $x_0 \in [a, b]$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
- On cherche une fonction $z : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable telle que :

$$\begin{cases} z'(x) & = & f(x, z(x)), \quad \forall x \in [a, b] \\ z(x_0) & = & y_0 \end{cases}$$

Ce problème est appelé *problème de* CAUCHY.
La condition $z(x_0) = y_0$ est appelée *condition de* CAUCHY

Existence de la solution

Définition (Fonctions lipschitziennes)

Une fonction

$$\begin{array}{rcl} f \quad : \quad [a,b]\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x,y & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

est dite lipschitzienne indépendamment de x *et par rapport à* y *si* $\exists L \in \mathbb{R}^+$ *tel que :*

$$\forall (x,y,z) \in [a,b]\times\mathbb{R}^2 \qquad |f(x,y) - f(x,z)| \quad \leq \quad L\,|y-z|$$

Existence de la solution

Définition (Fonctions lipschitziennes)

Une fonction $$f : \begin{array}{ccc} [a,b]\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x,y & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

est dite lipschitzienne indépendamment de x et par rapport à y si $\exists L \in \mathbb{R}^+$ tel que :

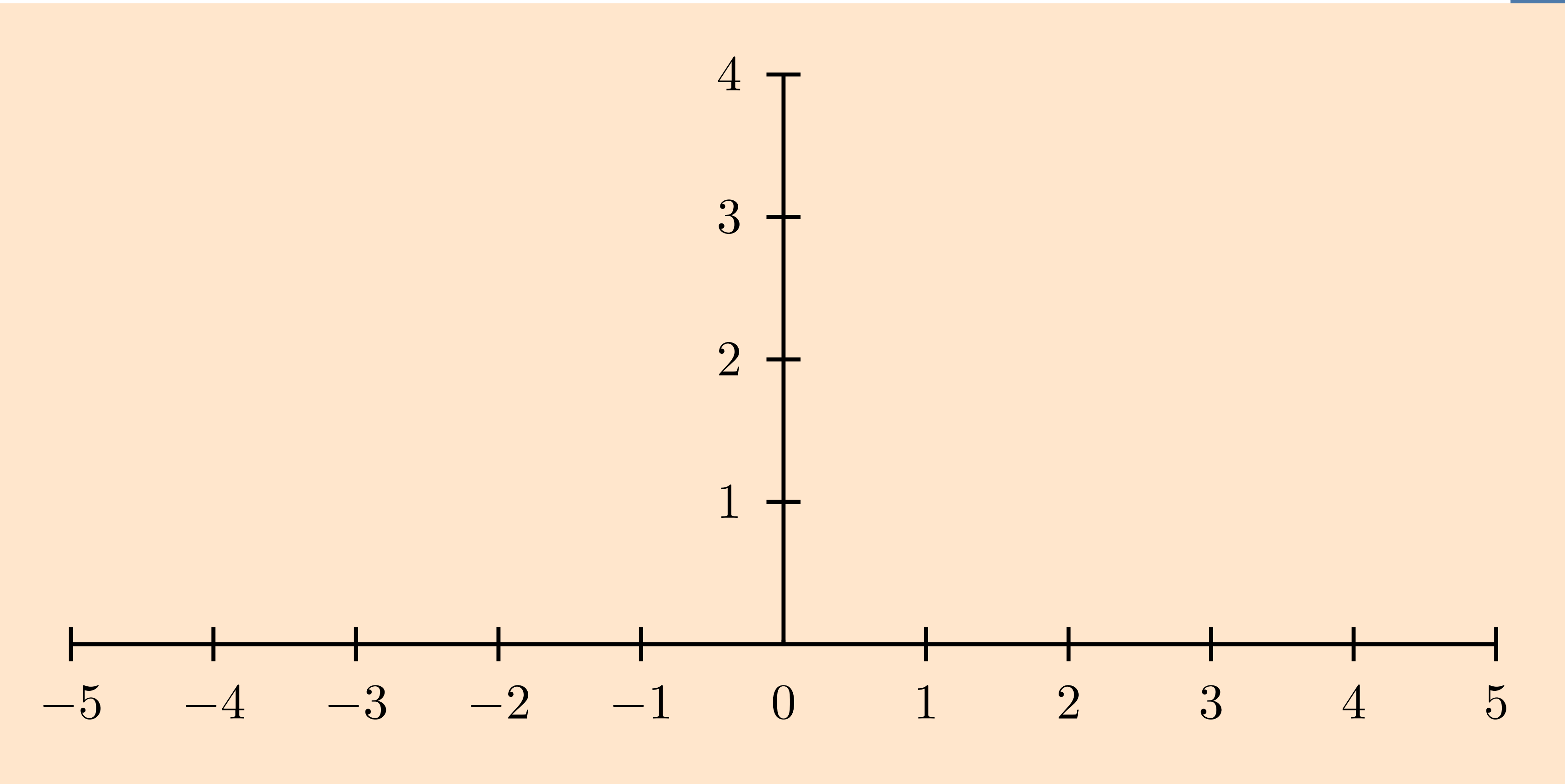
$$\forall (x,y,z) \in [a,b]\times\mathbb{R}^2 \qquad |f(x,y)-f(x,z)| \quad \leq \quad L\,|y-z|$$

Théorème (Cauchy-Lipschitz)

Si $f(x,y)$ est continue sur $[a,b]\times\mathbb{R}$ et lipschitzienne indépendamment de x par rapport à y et si $(x_0,y_0)\in[a,b]\times\mathbb{R}$ alors l'équation :

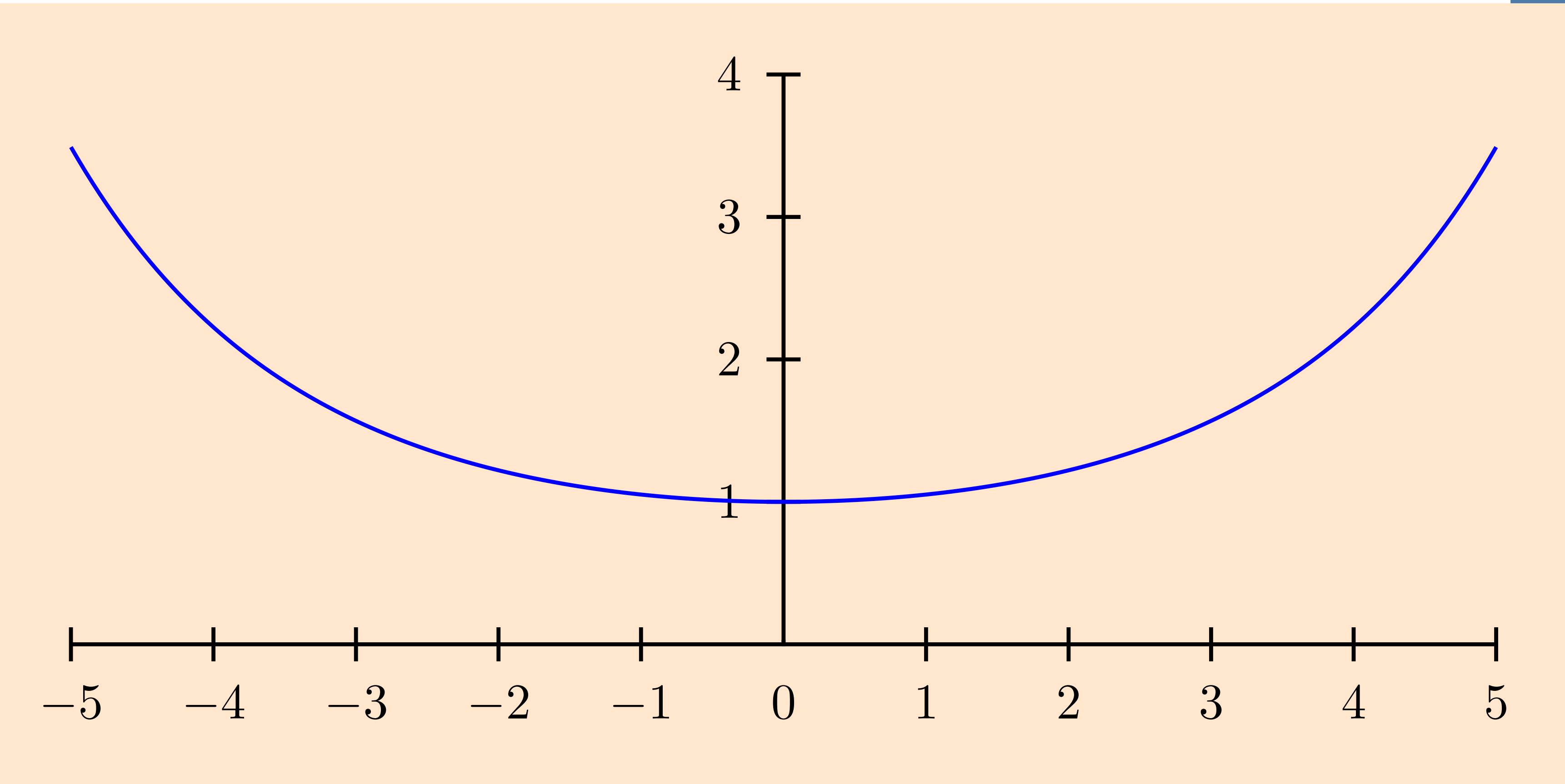
$$\left\{ \begin{array}{rcl} z'(x) & = & f(x,z(x)), \quad \forall x \in [a,b] \\ z(x_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

admet une solution unique sur $[a,b]$



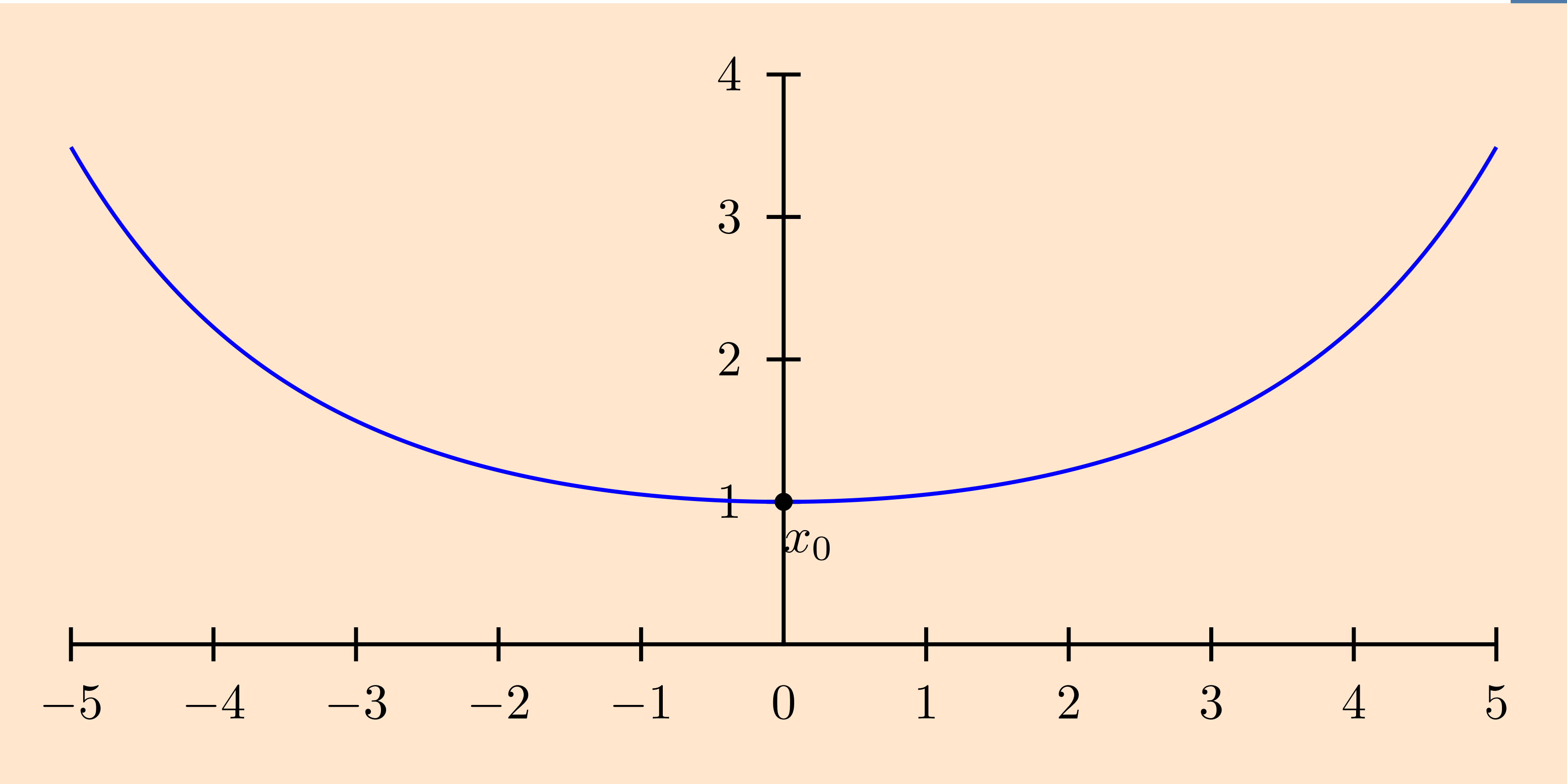
$$\begin{cases} z'(x) = 0.1 \times x \times z(x), & \forall x \in [a,b] \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Exemple



$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
z'(x) & = & 0.1 \times x \times z(x), \quad \forall x \in [a,b] \\
z(0) & = & 1
\end{array}
\right.
$$

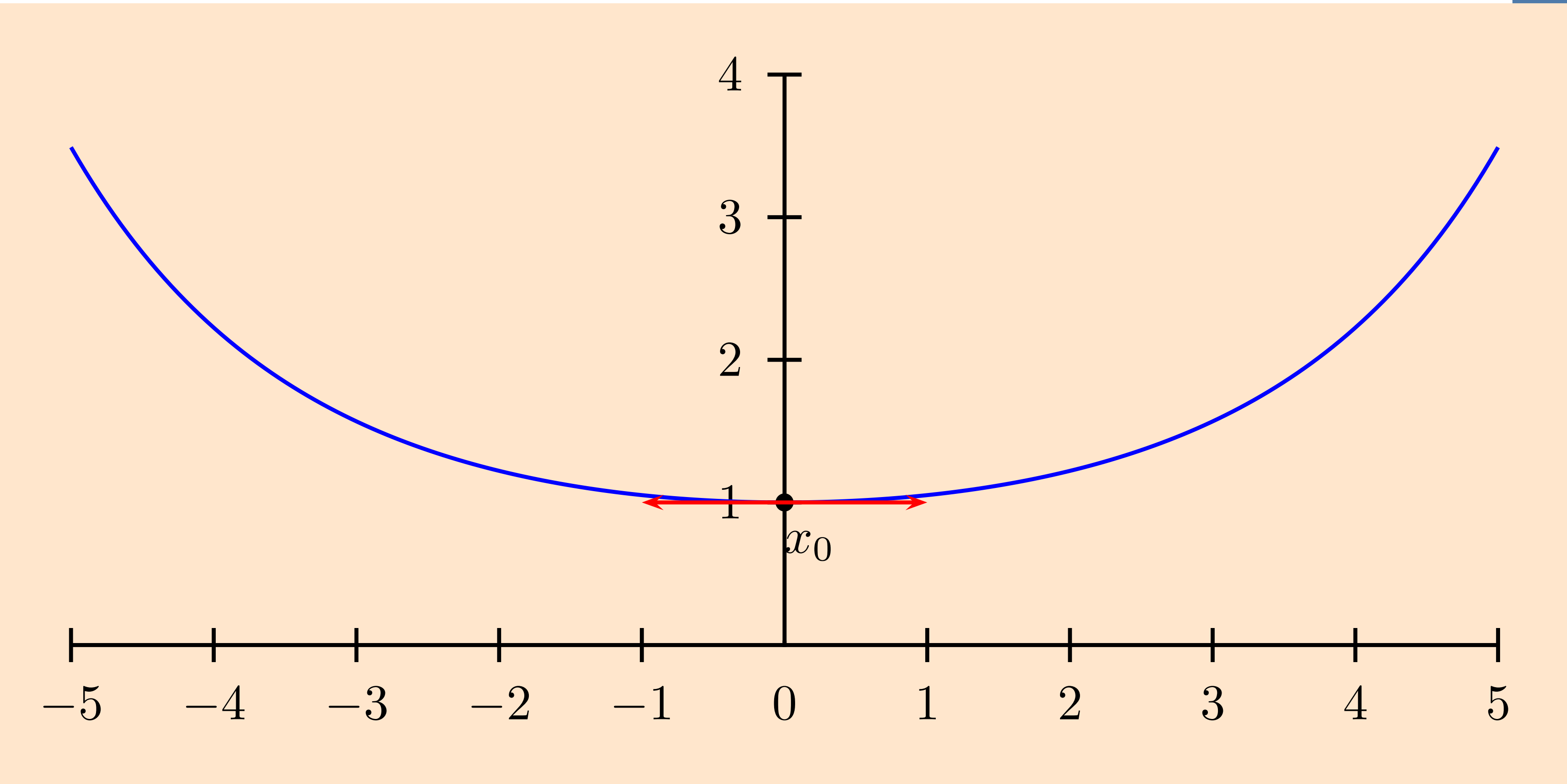
Exemple



$$\begin{cases} z'(x) = 0.1 \times x \times z(x), & \forall x \in [a,b] \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

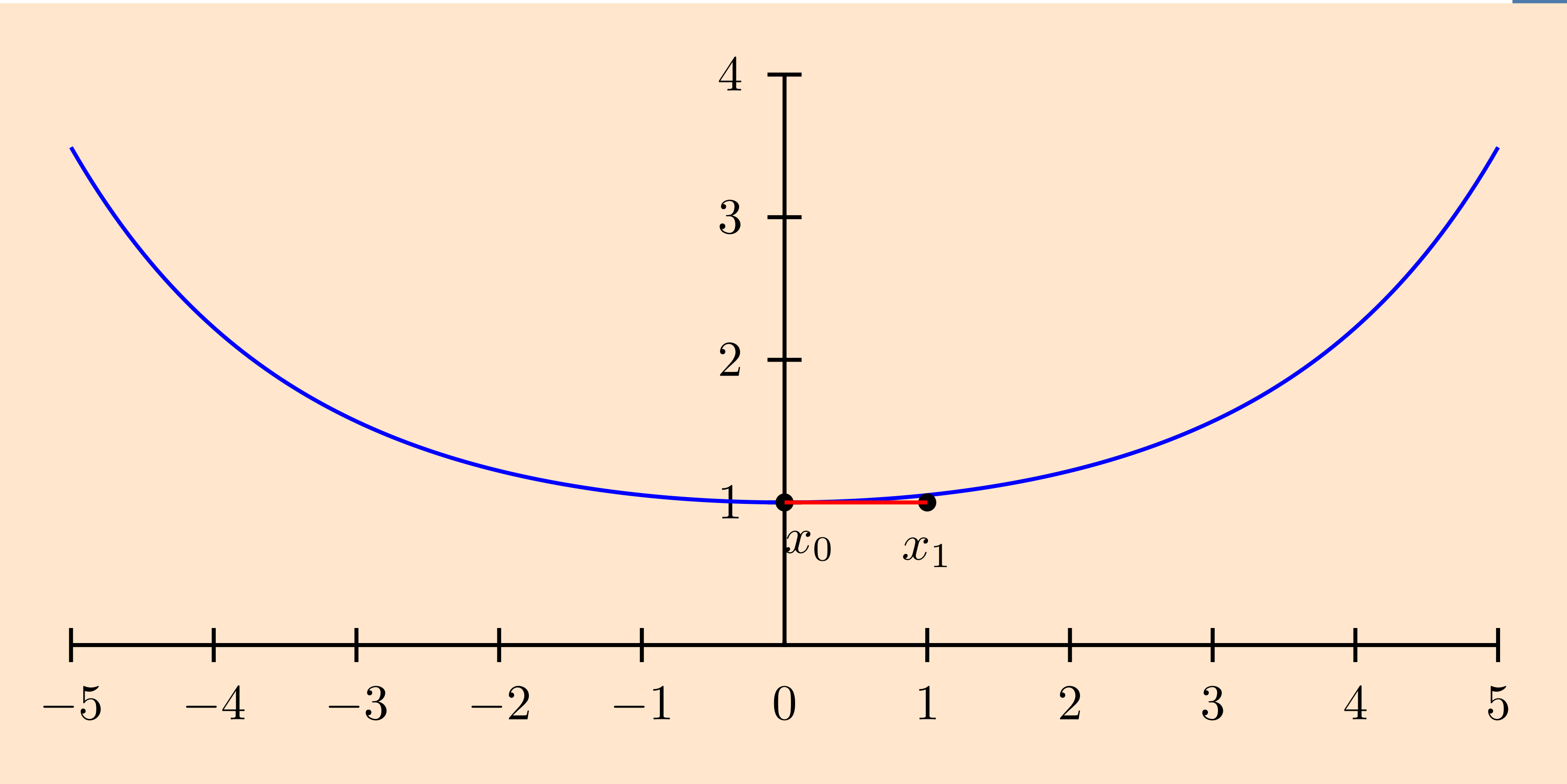
Polytech'Paris-UPMC

Exemple



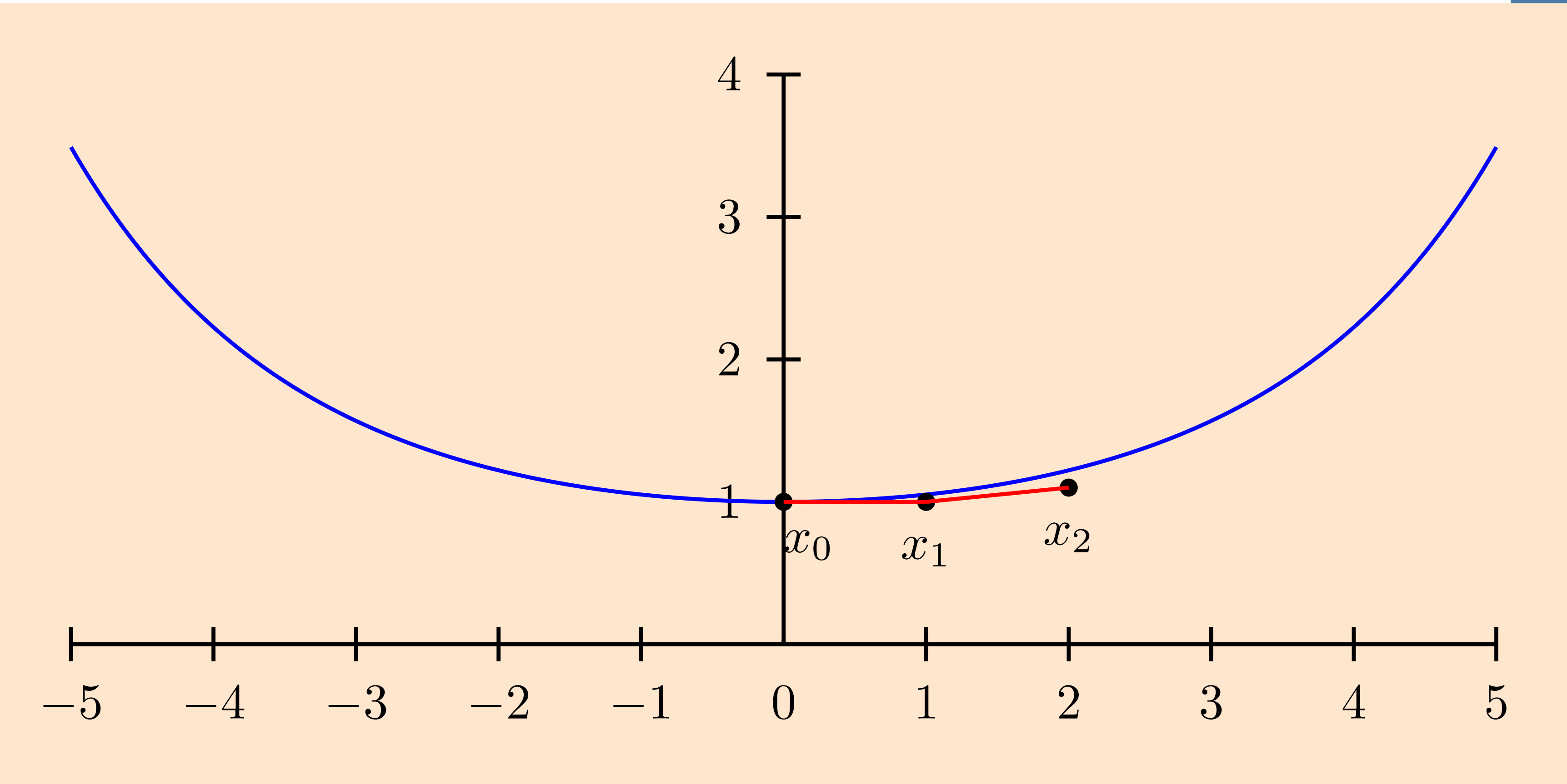
$$\begin{cases} z'(x) & = & 0.1 \times x \times z(x), \quad \forall x \in [a, b] \\ z(0) & = & 1 \end{cases}$$

Exemple



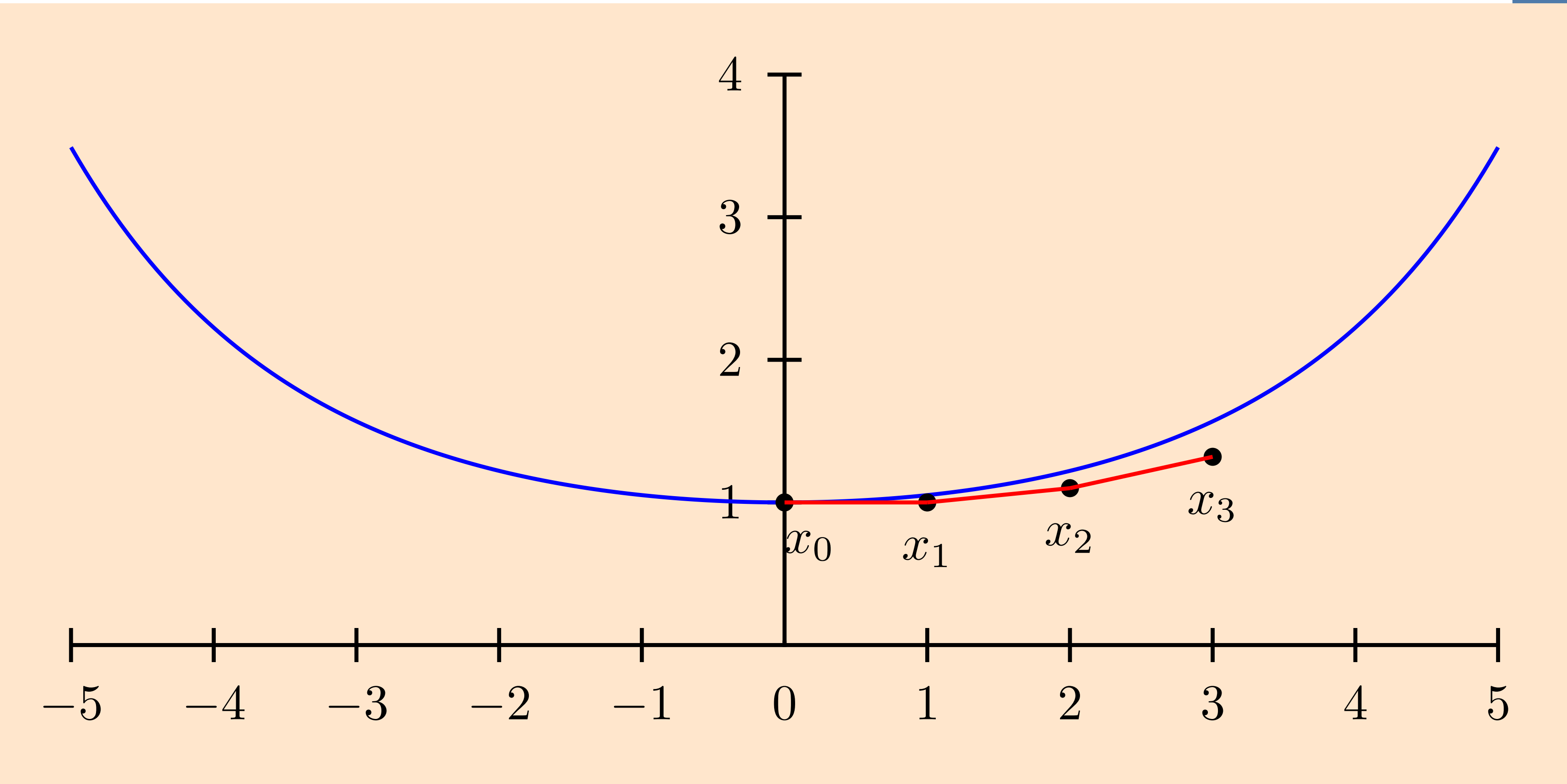
$$\begin{cases} z'(x) = 0.1 \times x \times z(x), & \forall x \in [a,b] \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Exemple

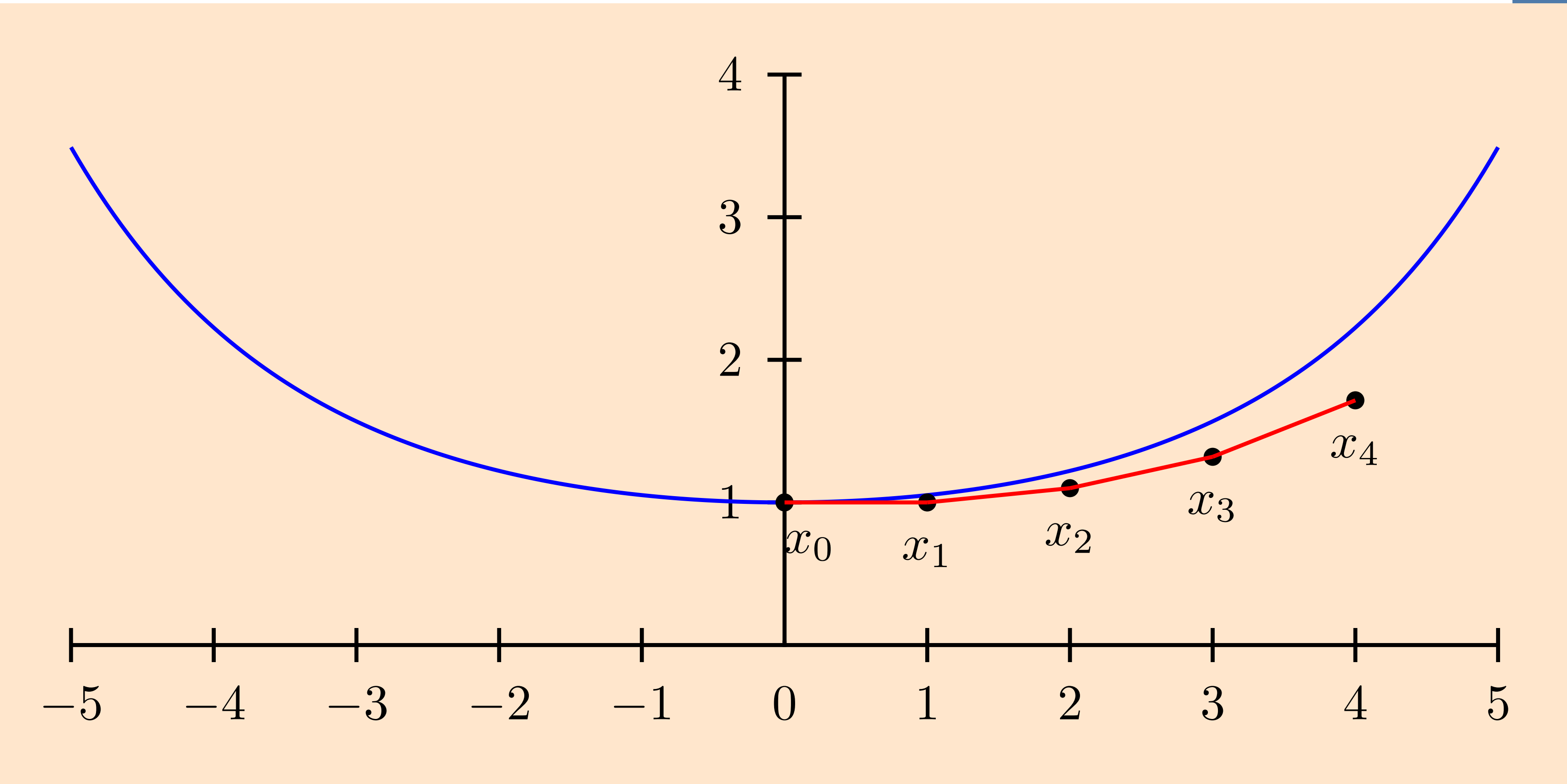


$$\begin{cases} z'(x) = 0.1 \times x \times z(x), & \forall x \in [a, b] \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

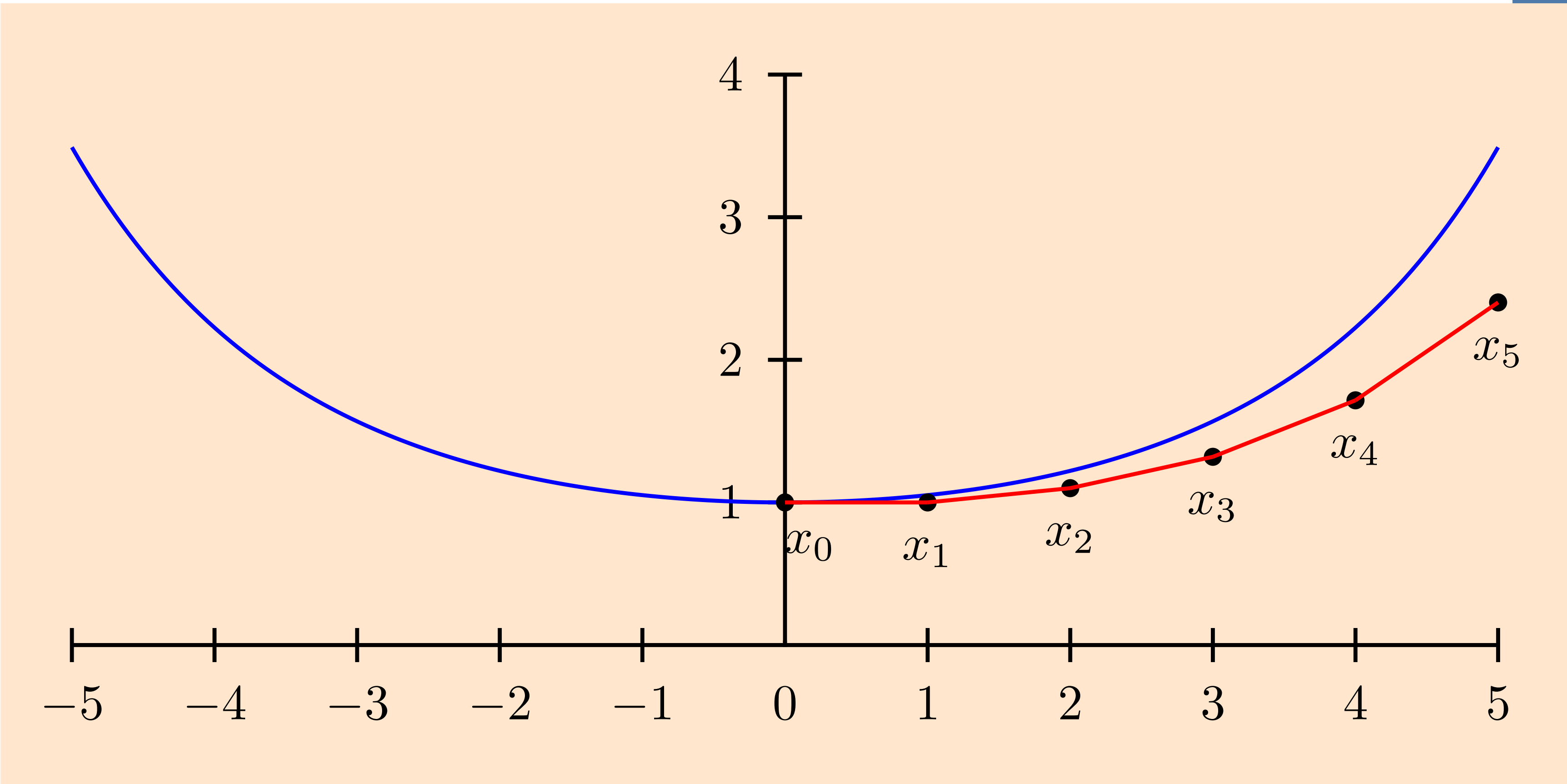
Exemple



$$\begin{cases} z'(x) = 0.1 \times x \times z(x), & \forall x \in [a,b] \\ z(0) = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} z'(x) = 0.1 \times x \times z(x), & \forall x \in [a, b] \\ z(0) = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} z'(x) & = & 0.1 \times x \times z(x), \quad \forall x \in [a, b] \\ z(0) & = & 1 \end{cases}$$

Principe

Pour résoudre :

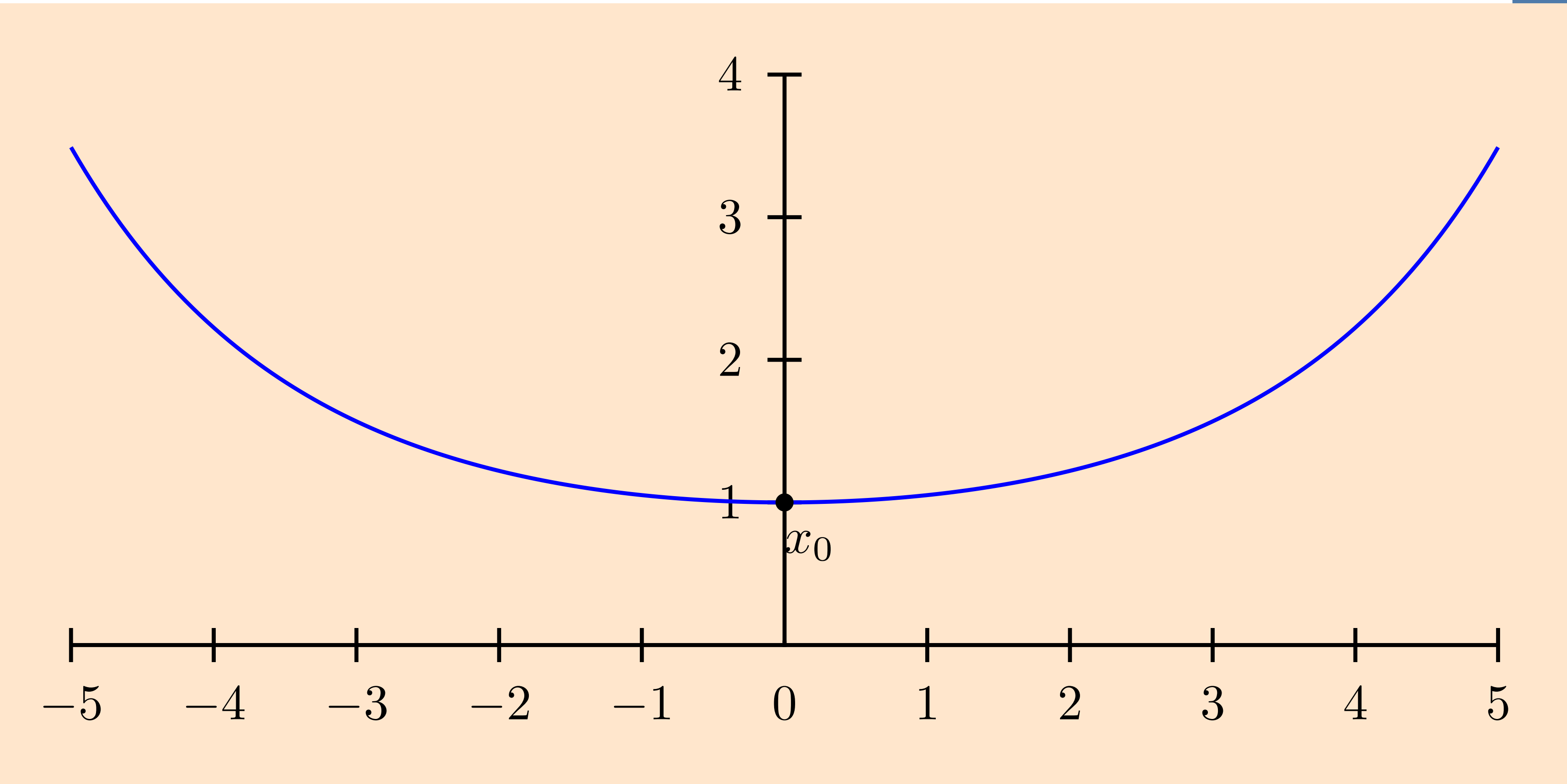
$$\begin{cases} z'(x) & = & f(x, z(x)) \\ z(x_0) & = & y_0 \end{cases}$$

- On connaît $z(x_0)$ et $z'(x_0)$.
- On choisit un pas h.
- Il est alors possible d'obtenir une approximation de $z(x_0 + h)$ grâce à la formule :

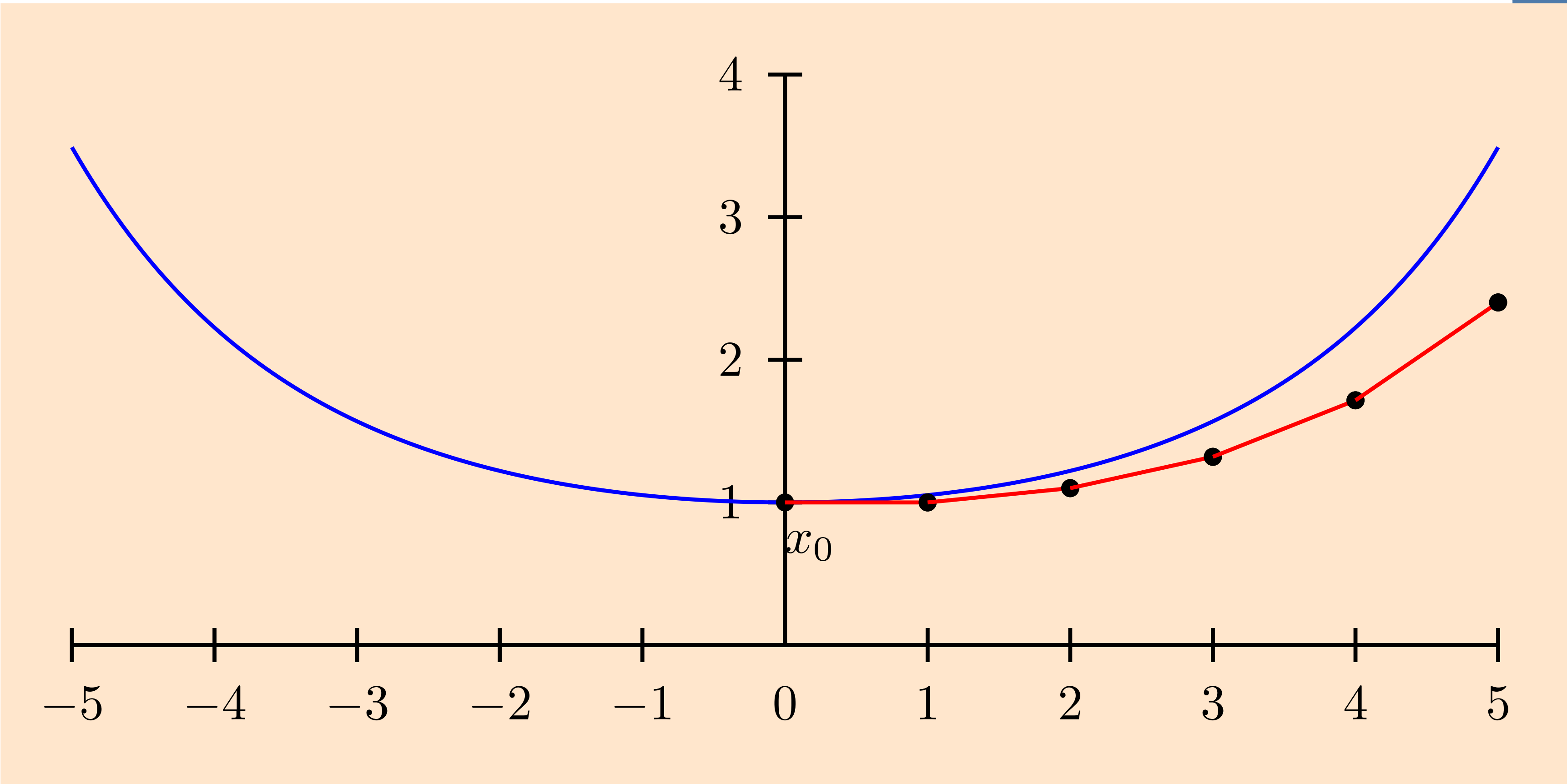
$$\begin{aligned} z(x_0 + h) & \simeq z(x_0) + h \times z'(x_0) \\ & \simeq y_0 + h \times f(x_0, z(x_0)) \end{aligned}$$

- On pose $x_1 = x_0 + h$ et $y_1 = y_0 + h \times f(x_0, z(x_0))$ et on itère
- ...

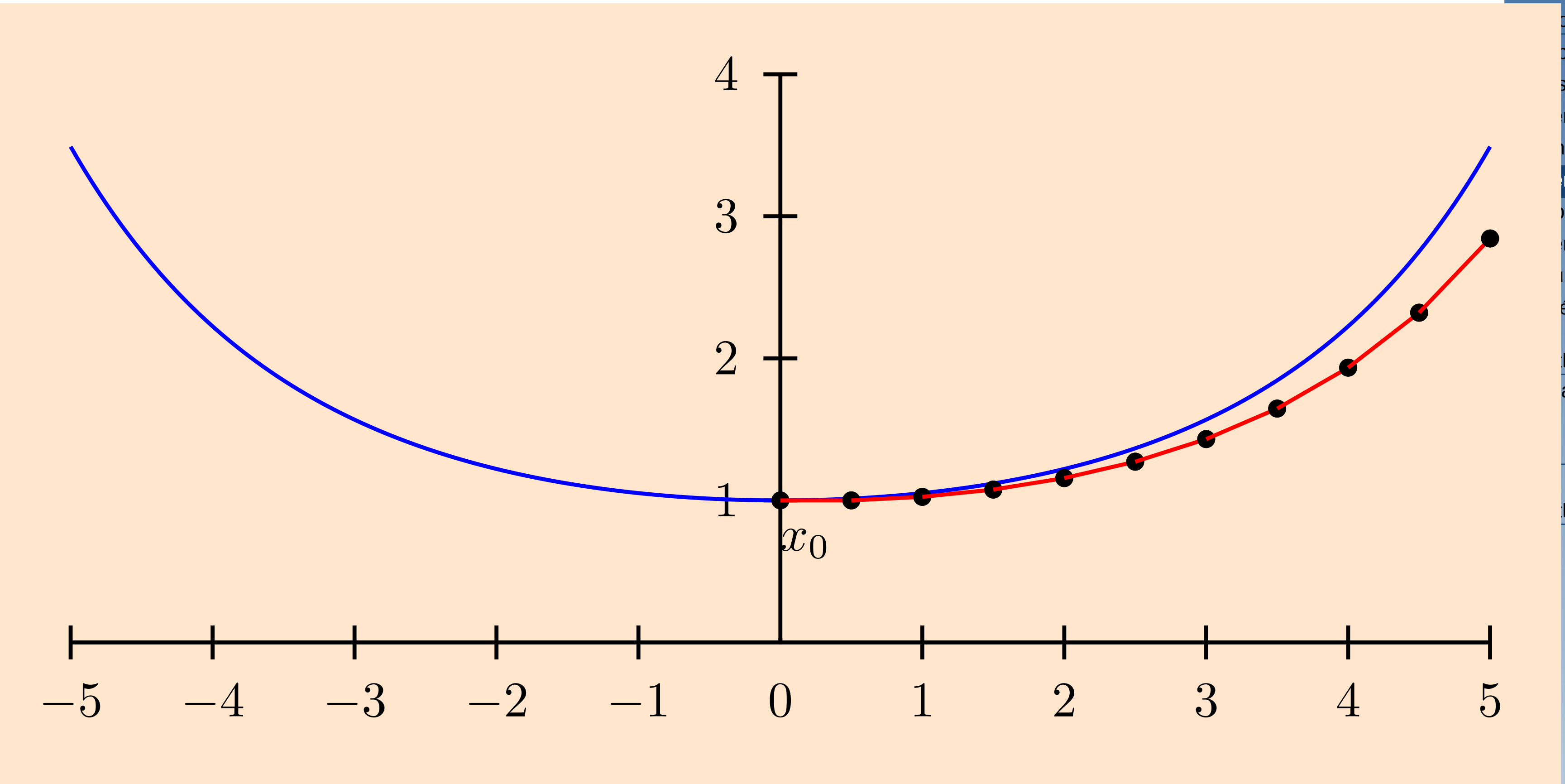
Exemple



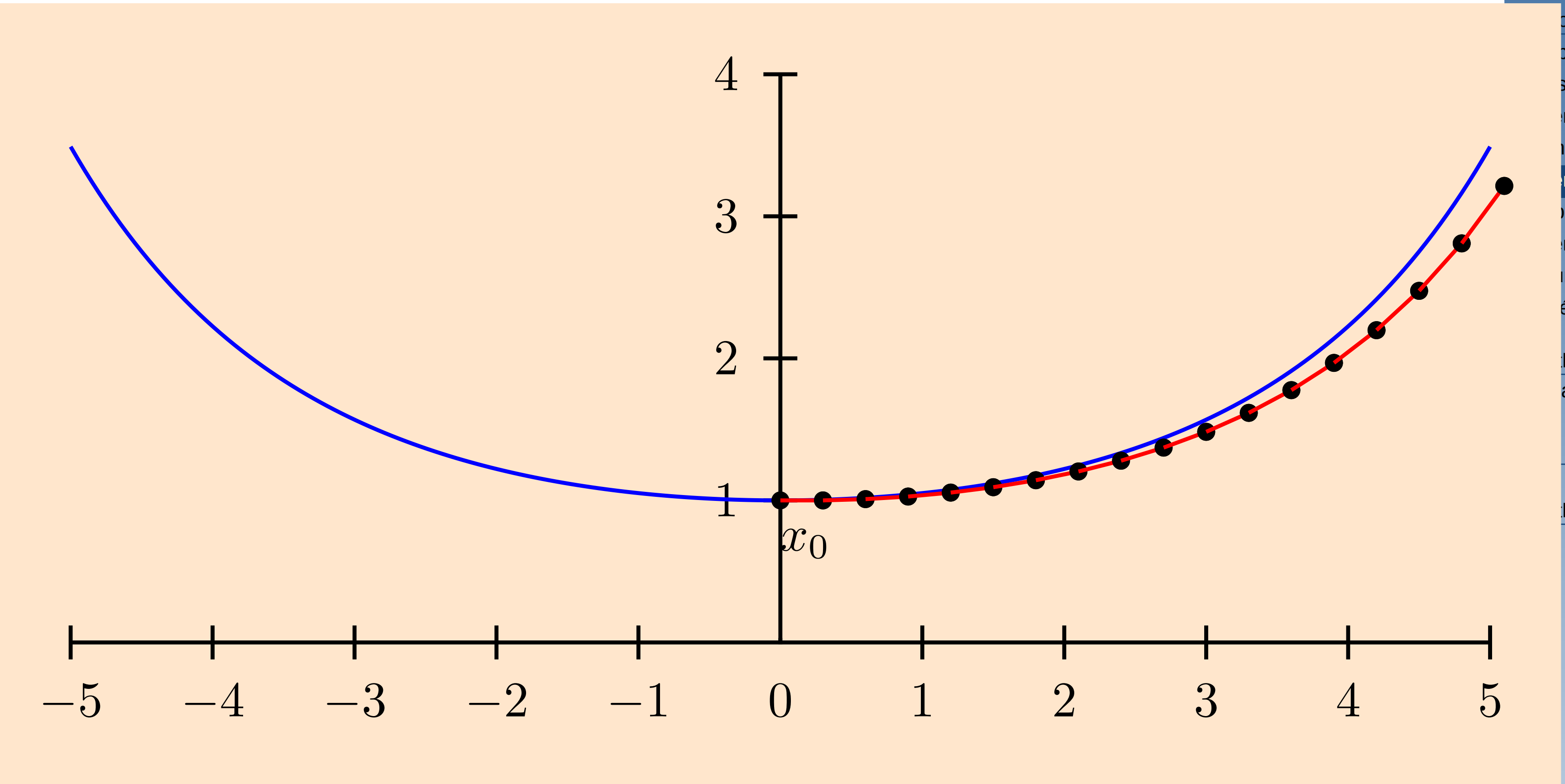
Exemple



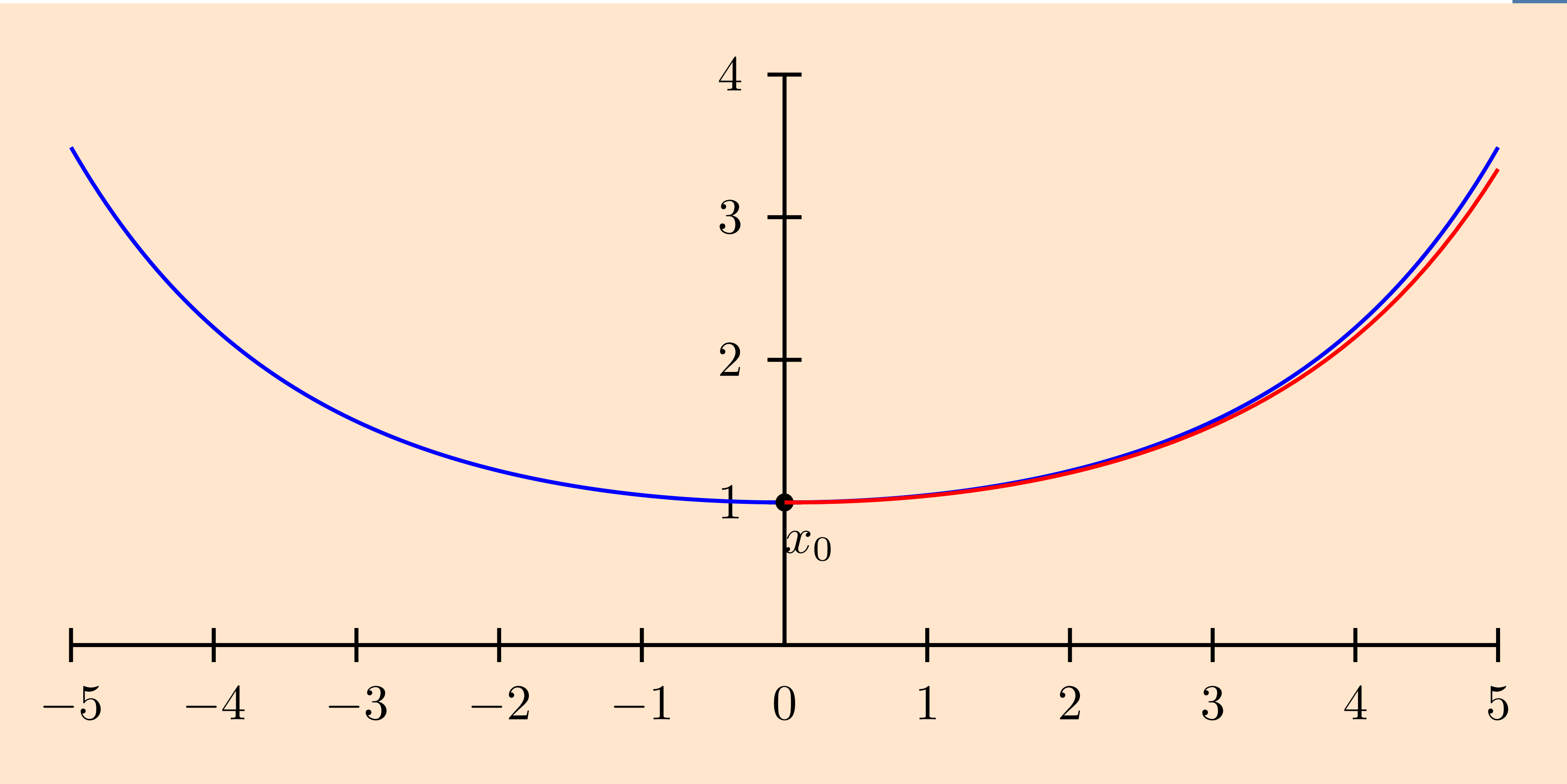
Avec un pas de 1



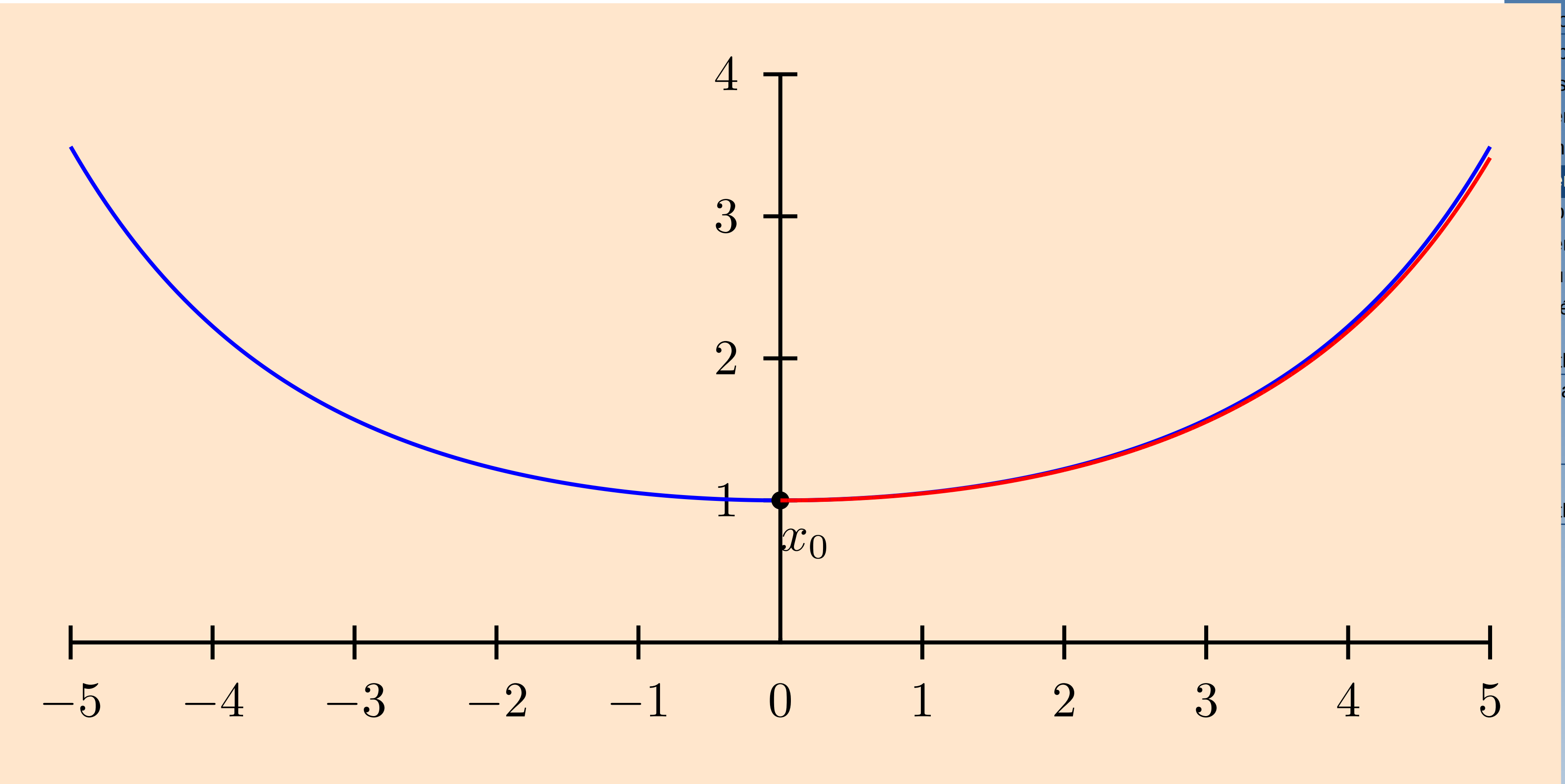
Avec un pas de 0.5



Avec un pas de 0.3



Avec un pas de 0.1



Avec un pas de 0.05

Dans cet algorithme, on fait deux approximations :

Approximation

Dans cet algorithme, on fait deux approximations :

- On approche z par son développement limité à l'ordre 1

$$\begin{aligned} z(x_{k+1}) &= z(x_k + h) \\ &\simeq z(x_k) + h \times z'(x_k) \end{aligned}$$

Approximation

Dans cet algorithme, on fait deux approximations :

- On approche z par son développement limité à l'ordre 1

$$\begin{aligned} z(x_{k+1}) &= z(x_k + h) \\ &\simeq z(x_k) + h \times z'(x_k) \end{aligned}$$

- De plus comme on ne connaît pas $z'(x_k)$, on fait une deuxième approximation

$$\begin{aligned} z'(x_k) &= f(x_k, z(x_k)) \\ &\simeq f(x_k, \mathbf{y_k}) \end{aligned}$$

Approximation

Dans cet algorithme, on fait deux approximations :

- On approche z par son développement limité à l'ordre 1

$$\begin{aligned} z(x_{k+1}) &= z(x_k + h) \\ &\simeq z(x_k) + h \times z'(x_k) \end{aligned}$$

- De plus comme on ne connaît pas $z'(x_k)$, on fait une deuxième approximation

$$\begin{aligned} z'(x_k) &= f(x_k, z(x_k)) \\ &\simeq f(x_k, \mathbf{y_k}) \end{aligned}$$

Cette approximation est permise car $f(x, y)$ est lipschitzienne par rapport à y et indépendamment de x

Approximation

Dans cet algorithme, on fait deux approximations :

- On approche z par son développement limité à l'ordre 1

$$
\begin{aligned}
z(x_{k+1}) &= z(x_k + h) \\
&\simeq z(x_k) + h \times z'(x_k)
\end{aligned}
$$

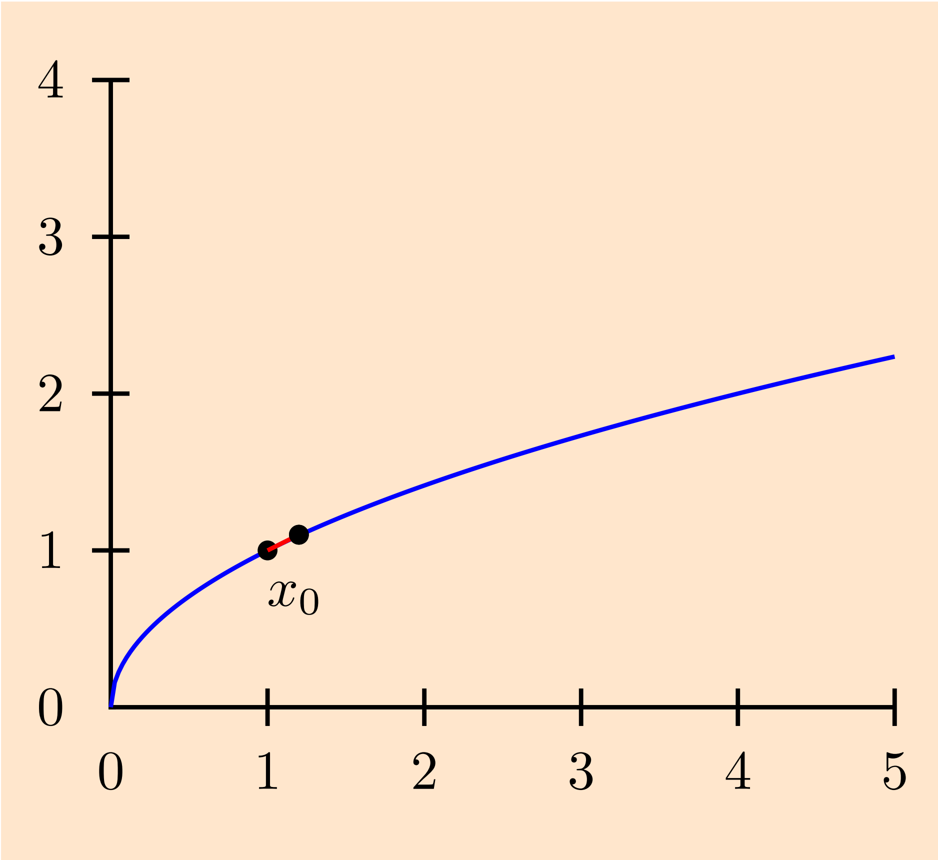
- De plus comme on ne connaît pas $z'(x_k)$, on fait une deuxième approximation

$$
\begin{aligned}
z'(x_k) &= f(x_k, z(x_k)) \\
&\simeq f(x_k, \mathbf{y_k})
\end{aligned}
$$

Cette approximation est permise car $f(x, y)$ est lipschitzienne par rapport à y et indépendamment de x

Ces deux approximations sont-elles toujours valides ?

Exemple



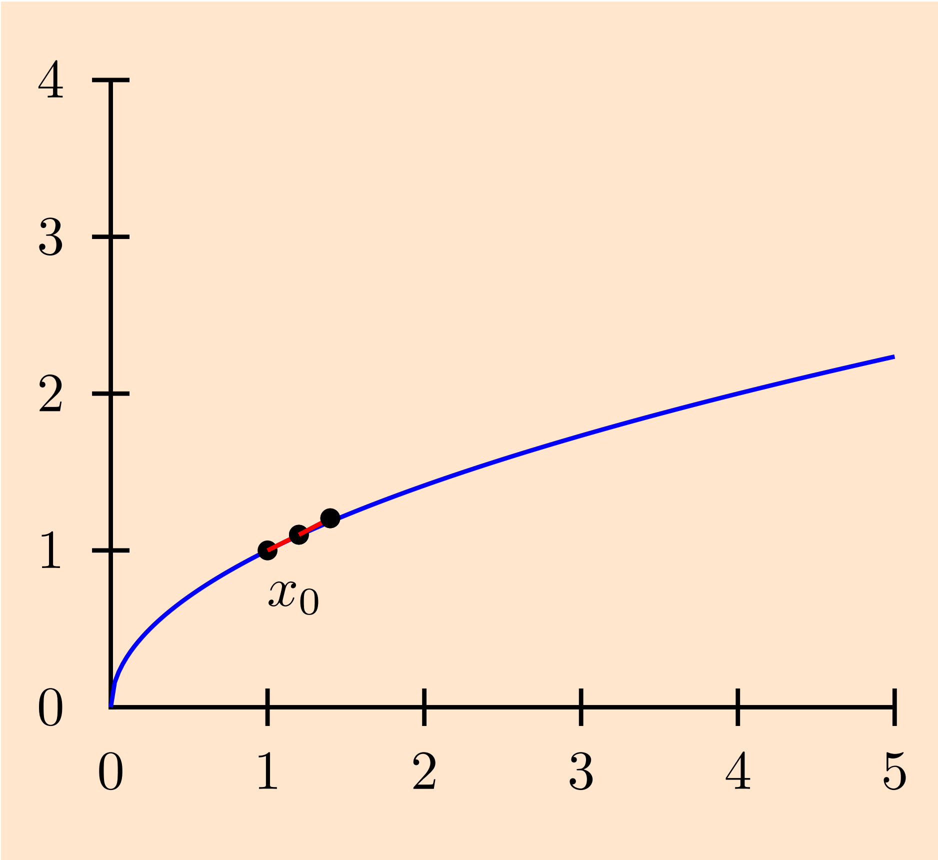
L'équation :

$$\begin{cases} z(1) & = & 1 \\ z'(x) & = & \frac{1-30x}{2\sqrt{x}} + 15z(x) \end{cases}$$

a pour solution :

$$z(x) \quad = \quad \sqrt{x}$$

Exemple



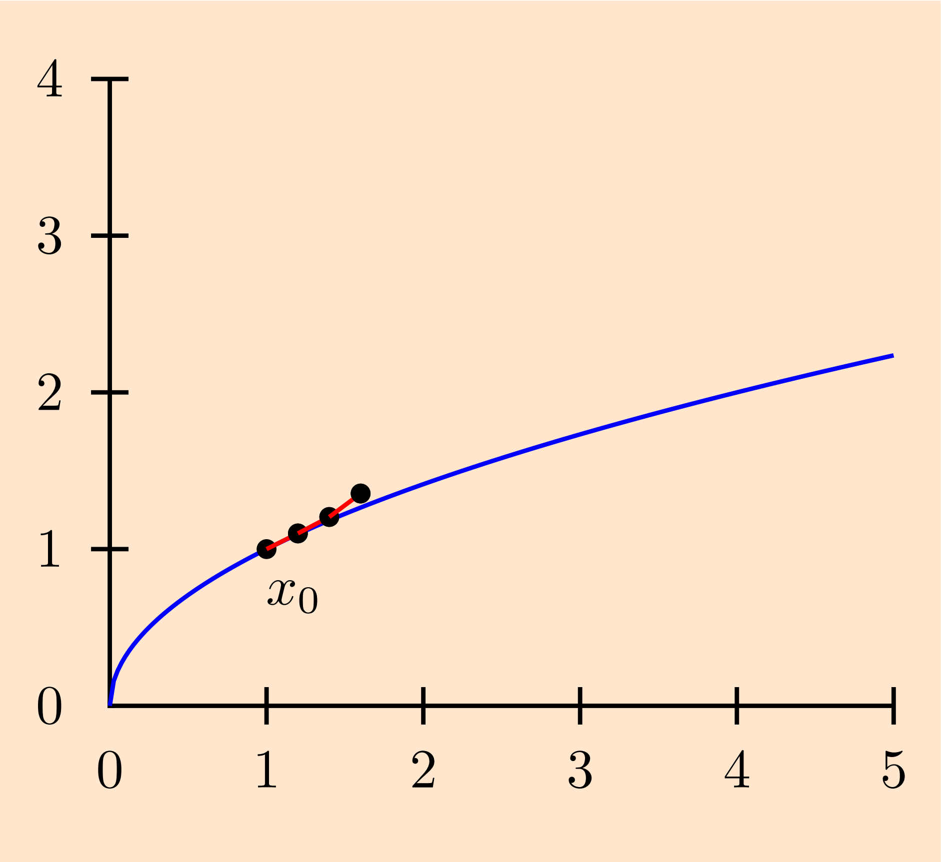
L'équation :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z(1) & = & 1 \\ z'(x) & = & \frac{1-30x}{2\sqrt{x}} + 15z(x) \end{array}\right.$$

a pour solution :

$$z(x) = \sqrt{x}$$

Exemple

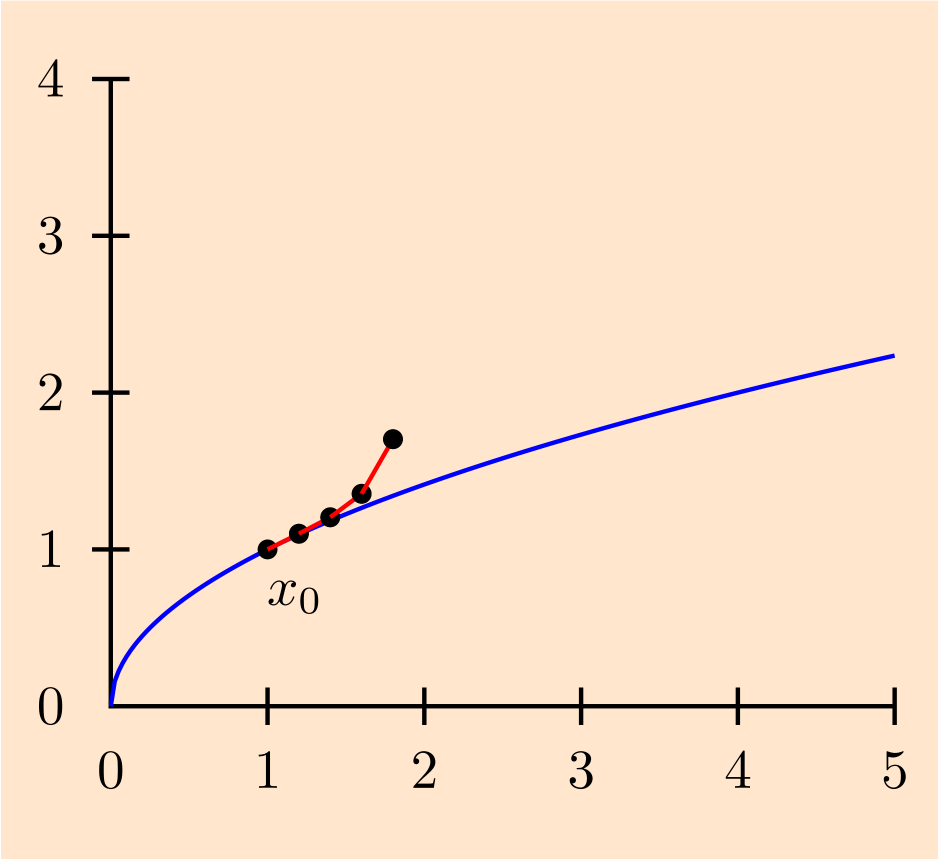


L'équation :

$$\begin{cases} z(1) & = & 1 \\ z'(x) & = & \frac{1-30x}{2\sqrt{x}} + 15z(x) \end{cases}$$

a pour solution :

$$z(x) \quad = \quad \sqrt{x}$$

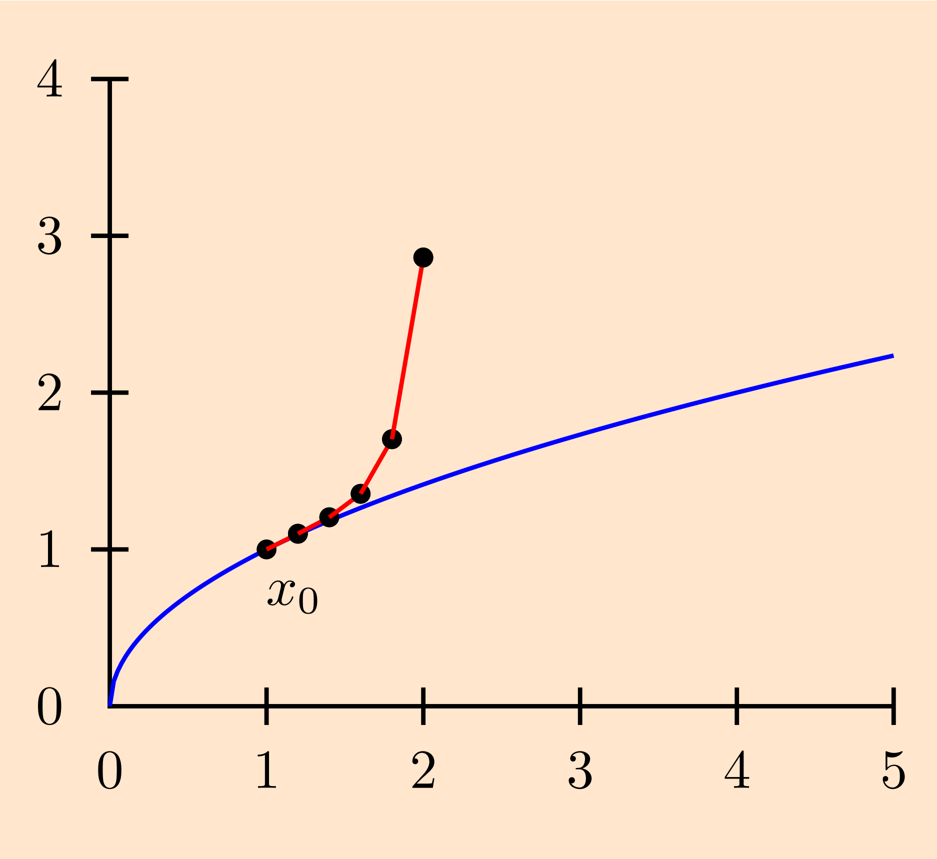


L'équation :

$$\begin{cases} z(1) & = & 1 \\ z'(x) & = & \frac{1-30x}{2\sqrt{x}} + 15z(x) \end{cases}$$

a pour solution :

$$z(x) \quad = \quad \sqrt{x}$$



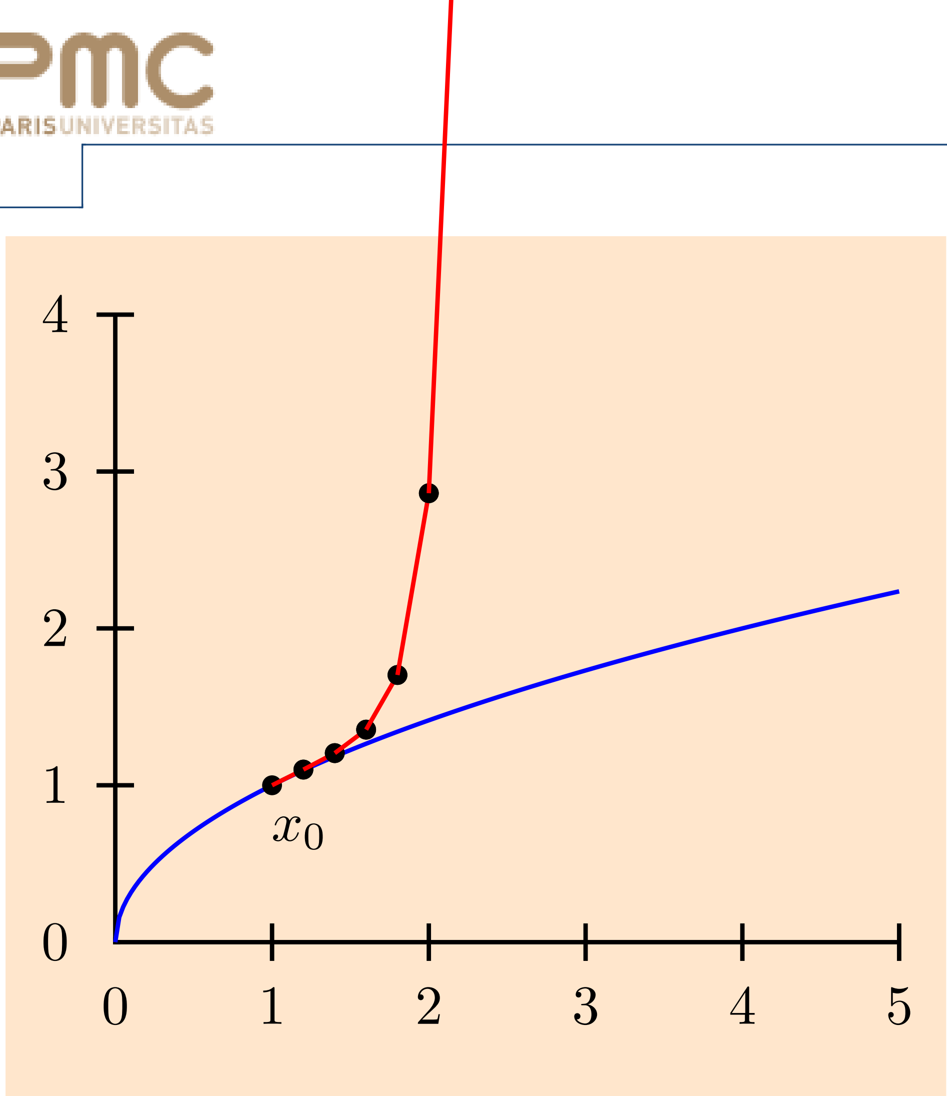
L'équation :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z(1) & = & 1 \\ z'(x) & = & \frac{1-30x}{2\sqrt{x}} + 15z(x) \end{array}\right.$$

a pour solution :

$$z(x) \quad = \quad \sqrt{x}$$

Exemple



L'équation :

$$\begin{cases} z(1) & = & 1 \\ z'(x) & = & \frac{1-30x}{2\sqrt{x}} + 15z(x) \end{cases}$$

a pour solution :

$$z(x) \quad = \quad \sqrt{x}$$

En utilisant l'algorithme, on calcule la suite :

$$\begin{cases} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 1 \\ y_{k+1} & = & y_k + h \times \left(\frac{1-30x_k}{2\sqrt{x_k}} + 15y_k \right) \end{cases}$$

Pourquoi ?

En utilisant l'algorithme, on calcule la suite :

$$\begin{cases} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 1 \\ y_{k+1} &= y_k + h \times \left(\frac{1-30x_k}{2\sqrt{x_k}} + 15y_k \right) \end{cases}$$

Cela signifie qu'on approche $z'(x_k)$ par la valeur

$$\frac{1-30x_k}{2\sqrt{x_k}} + 15y_k = \frac{1}{2\sqrt{x_k}} + 15(y_k - \sqrt{x_k})$$

Idéalement, $y_k = \sqrt{x_k}$, la valeur précédante se simplifie et donne $z'(x_k) = \frac{1}{2\sqrt{x_k}}$ dont la solution est bien $\sqrt{x}$.

En utilisant l'algorithme, on calcule la suite :

$$\begin{cases} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 1 \\ y_{k+1} &= y_k + h \times \left(\frac{1-30x_k}{2\sqrt{x_k}} + 15 y_k \right) \end{cases}$$

Cela signifie qu'on approche $z'(x_k)$ par la valeur

$$\frac{1-30x_k}{2\sqrt{x_k}} + 15y_k \quad = \quad \frac{1}{2\sqrt{x_k}} + 15(y_k - \sqrt{x_k})$$

Idéalement, $y_k = \sqrt{x_k}$, la valeur précédante se simplifie et donne $z'(x_k) = \frac{1}{2\sqrt{x_k}}$ dont la solution est bien $\sqrt{x}$.
Malheureusement, comme y_1 n'est qu'une approximation de $\sqrt{x_1}$, cette petite erreur fait dévier la suite vers une autre solution de la forme $z(x) = \sqrt{x} + \lambda e^{15x}$

Amélioration

On peut tenter d'améliorer la méthode en améliorant l'approximation de $z(x_n + h) = z(x_{n+1})$. Par exemple, au lieu d'utiliser

$$z(x_{k+1}) \quad \simeq \quad z(x_k) + h \times z'(x_k)$$

On peut tenter d'améliorer la méthode en améliorant l'approximation de $z(x_n + h) = z(x_{n+1})$. Par exemple, au lieu d'utiliser

$$z(x_{k+1}) \simeq z(x_k) + h \times z'(x_k)$$

on peut utiliser l'approximation au point milieu :

$$z(x_{k+1}) \simeq z(x_k) + h \times z'(x_k + \frac{h}{2})$$

qui est exacte si z est un polynôme de degré 2.

On peut tenter d'améliorer la méthode en améliorant l'approximation de $z(x_n + h) = z(x_{n+1})$. Par exemple, au lieu d'utiliser

$$z(x_{k+1}) \quad \simeq \quad z(x_k) + h \times z'(x_k)$$

on peut utiliser l'approximation au point milieu :

$$z(x_{k+1}) \quad \simeq \quad z(x_k) + h \times z'(x_k + \frac{h}{2})$$

qui est exacte si z est un polynôme de degré 2.
Pour calculer $z'(x_k + \frac{h}{2})$ on utilise la méthode précédente :

$$z'(x_k + \frac{h}{2}) \quad \simeq \quad f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k))$$

Méthodes d’intégration à pas séparés

Méthodes d’intégration à pas séparés

De manière générale, on considère la double suite :

$$\begin{cases} x_0, y_0 \text{ donnés} \\ x_{k+1} = x_k + h \\ y_{k+1} = y_k + h \times \varphi(x_k, y_k, h) \end{cases}$$

Les méthodes utilisant des suites de cette forme sont appelées *méthodes d’intégration à pas séparés*

De manière générale, on considère la double suite :

$$\begin{cases} x_0, y_0 \text{ donnés} \\ x_{k+1} = x_k + h \\ y_{k+1} = y_k + h \times \varphi(x_k, y_k, h) \end{cases}$$

Les méthodes utilisant des suites de cette forme sont appelées *méthodes d'intégration à pas séparés*

- Dans quel cas cela va-t-il fonctionner ?

De manière générale, on considère la double suite :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0, y_0 \text{ donnés} & & \\ x_{k+1} & = & x_k + h \\ y_{k+1} & = & y_k + h \times \varphi(x_k, y_k, h) \end{array}\right.$$

Les méthodes utilisant des suites de cette forme sont appelées *méthodes d'intégration à pas séparés*

- Dans quel cas cela va-t-il fonctionner ?
- Qu'est-ce qu'on appelle fonctionner ?

Méthodes d'intégration à pas séparés

De manière générale, on considère la double suite :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0, y_0 \text{ donnés} & & \\ x_{k+1} & = & x_k + h \\ y_{k+1} & = & y_k + h \times \varphi(x_k, y_k, h) \end{array}\right.$$

Les méthodes utilisant des suites de cette forme sont appelées *méthodes d'intégration à pas séparés*

- Dans quel cas cela va-t-il fonctionner ?
- Qu'est-ce qu'on appelle fonctionner ?

! *Dans cette suite le terme x_k a pour expression*

$$x_k = x_0 + kh$$

On ne considère dans la suite que les valeurs de k telles que $x_k \in [a, b]$

Convergence

Définition *Une méthode d'intégration à pas séparés définie par :*

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(x_k, y_k, h)$$

est dite convergente *pour l'équation*

$$z'(x) = f(x, z(x)) \qquad x \in [a, b]$$

avec la condition $z(x_0) = y_0$*,* $x_0 \in [a, b]$ *et vérifiant les conditions du théorème de* CAUCHY-LIPSCHITZ *si*

$$\lim_{h \to 0} \max_{k \ t.q.\ x_k \in [a,b]} |y_k - z(x_k)| = 0$$

où $z(x)$ *est l'unique solution*

Conditions de convergence

Conditions de convergence

Pour que cela fonctionne il faut que l'itération utilisée ait un sens et que la solution obtenue tende vers z si h tend vers 0.

Conditions de convergence

Pour que cela fonctionne il faut que l'itération utilisée ait un sens et que la solution obtenue tende vers z si h tend vers 0.

- l'équation $z'(x) = \varphi(x, z(x), h)$ doit avoir une solution donc $\exists L$ tel que $\forall (x, y, z, h) \in [a, b] \times \mathbb{R}^3$

$$|\varphi(x, y, h) - \varphi(x, z, h)| \quad \leq \quad L\,|y - z|$$

Conditions de convergence

Pour que cela fonctionne il faut que l'itération utilisée ait un sens et que la solution obtenue tende vers z si h tend vers 0.

- l'équation $z'(x) = \varphi(x, z(x), h)$ doit avoir une solution donc $\exists L$ tel que $\forall (x, y, z, h) \in [a, b] \times \mathbb{R}^3$

$$|\varphi(x, y, h) - \varphi(x, z, h)| \quad \leq \quad L\,|y - z|$$

- La solution précédente doit tendre vers z si $h \to 0$ donc il faut que :

Conditions de convergence

Pour que cela fonctionne il faut que l'itération utilisée ait un sens et que la solution obtenue tende vers z si h tend vers 0.

- l'équation $z'(x) = \varphi(x, z(x), h)$ doit avoir une solution donc $\exists L$ tel que $\forall (x, y, z, h) \in [a, b] \times \mathbb{R}^3$

$$|\varphi(x, y, h) - \varphi(x, z, h)| \leq L\,|y - z|$$

- La solution précédente doit tendre vers z si $h \to 0$ donc il faut que :
  - $\forall (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$,

$$\varphi(x, y, 0) = f(x, y)$$

Conditions de convergence

Pour que cela fonctionne il faut que l'itération utilisée ait un sens et que la solution obtenue tende vers z si h tend vers 0.

- l'équation $z'(x) = \varphi(x, z(x), h)$ doit avoir une solution donc $\exists L$ tel que $\forall (x, y, z, h) \in [a, b] \times \mathbb{R}^3$

$$|\varphi(x, y, h) - \varphi(x, z, h)| \leq L\,|y - z|$$

- La solution précédente doit tendre vers z si $h \to 0$ donc il faut que :
  - $\forall (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$,

$$\varphi(x, y, 0) = f(x, y)$$

  - $\varphi(x, y, h)$ soit continue par rapport à (x, y, h)

Définitions

Définition (Consistance) *Une méthode d'intégration à pas séparés définie par :*

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(x_k, y_k, h)$$

est dite consistante *pour l'équation* $z'(x) = f(x, z(x)) \qquad x \in [a, b]$ *si* φ *est continue par rapport à* (x, y, h) *et si*

$$\forall (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \qquad \varphi(x, y, 0) = f(x, y)$$

Définitions

Définition (Consistance) *Une méthode d'intégration à pas séparés définie par :*

$$y_{k+1} \quad = \quad y_k + h\varphi(x_k, y_k, h)$$

est dite consistante *pour l'équation* $z'(x) = f(x, z(x)) \qquad x \in [a, b]$ *si* φ *est continue par rapport à* (x, y, h) *et si*

$$\forall (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \qquad \varphi(x, y, 0) \quad = \quad f(x, y)$$

Définition (Stabilité) *Une méthode d'intégration à pas séparés définie par :*

$$y_{k+1} \quad = \quad y_k + h\varphi(x_k, y_k, h)$$

est dite stable *pour l'équation* $z'(x) = f(x, z(x)) \qquad$ *avec* $x \in [a, b]$ *si* $\forall H$, $\exists L$ *tel que* $\forall (x, y, z, h) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 \times [0, H]$

$$|\varphi(x, y, h) - \varphi(x, z, h)| \quad \leq \quad L\,|y - z|$$

Théorème

Une méthode d'intégration à pas séparés qui est consistante et stable est convergente.

Lemme *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs et soient* (A, B, h, r) *quatre réels strictement positifs tels que :*
$\forall n, \quad u_n \leq (1+Ah)u_{n-1} + Bh^{r+1}$
Alors

$$\forall n, \qquad u_n \quad \leq \quad (1+Ah)^n u_0 + \frac{B\left((1+Ah)^n - 1\right)}{A} h^r$$

Lemme *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs et soient* (A, B, h, r) *quatre réels strictement positifs tels que :*
$\forall n, \quad u_n \leq (1 + Ah)u_{n-1} + Bh^{r+1}$
Alors

$$\forall n, \qquad u_n \quad \leq \quad (1 + Ah)^n u_0 + \frac{B\left((1 + Ah)^n - 1\right)}{A} h^r$$

La preuve se fait par récurrence sur n. Le lemme est vrai pour $n = 0$, de plus

Preuve

Lemme *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs et soient* (A, B, h, r) *quatre réels strictement positifs tels que :*
$\forall n, \quad u_n \le (1 + Ah)u_{n-1} + Bh^{r+1}$
Alors

$$\forall n, \qquad u_n \quad \le \quad (1 + Ah)^n u_0 + \frac{B\left((1 + Ah)^n - 1\right)}{A} h^r$$

La preuve se fait par récurrence sur n. Le lemme est vrai pour $n = 0$, de plus

$$u_{n+1} \quad \le \quad (1 + Ah)u_n + Bh^{r+1}$$

Preuve

Lemme *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs et soient* (A, B, h, r) *quatre réels strictement positifs tels que :*
$\forall n, \quad u_n \leq (1 + Ah)u_{n-1} + Bh^{r+1}$
Alors

$$\forall n, \qquad u_n \quad \leq \quad (1 + Ah)^n u_0 + \frac{B\left((1 + Ah)^n - 1\right)}{A} h^r$$

La preuve se fait par récurrence sur n. Le lemme est vrai pour $n = 0$, de plus

$$\begin{aligned} u_{n+1} \quad &\leq \quad (1 + Ah)u_n + Bh^{r+1} \\ &\leq \quad (1 + Ah)^{n+1}u_0 + \frac{B\left((1+Ah)^{n+1} - 1 - Ah\right)}{A} h^r \end{aligned}$$

Lemme *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et soient (A, B, h, r) quatre réels strictement positifs tels que :*
$\forall n, \quad u_n \leq (1 + Ah)u_{n-1} + Bh^{r+1}$
Alors

$$\forall n, \qquad u_n \quad \leq \quad (1 + Ah)^n u_0 + \frac{B\left((1 + Ah)^n - 1\right)}{A} h^r$$

La preuve se fait par récurrence sur n. Le lemme est vrai pour $n = 0$, de plus

$$\begin{aligned} u_{n+1} \quad &\leq \quad (1 + Ah)u_n + Bh^{r+1} \\ &\leq \quad (1 + Ah)^{n+1}u_0 + \frac{B\left((1+Ah)^{n+1} - 1 - Ah\right)}{A} h^r + B\frac{Ah}{A}h^r \end{aligned}$$

Lemme *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs et soient* (A, B, h, r) *quatre réels strictement positifs tels que :*
$\forall n, \quad u_n \leq (1 + Ah)u_{n-1} + Bh^{r+1}$
Alors

$$\forall n, \qquad u_n \quad \leq \quad (1 + Ah)^n u_0 + \frac{B\left((1 + Ah)^n - 1\right)}{A} h^r$$

La preuve se fait par récurrence sur n. Le lemme est vrai pour $n = 0$, de plus

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq (1 + Ah)u_n + Bh^{r+1} \\ &\leq (1 + Ah)^{n+1} u_0 + \frac{B\big((1+Ah)^{n+1} - 1 - Ah\big)}{A} h^r + B\frac{Ah}{A} h^r \\ &\leq (1 + Ah)^{n+1} u_0 + \frac{B\left((1 + Ah)^{n+1} - 1\right)}{A} h^r \end{aligned}$$

Preuve du théorème - I

Pour utiliser le lemme, on majore $|y_{k+1} - z(x_{k+1})|$ en fonction de $|y_k - z(x_k)|$

Preuve du théorème - I

Pour utiliser le lemme, on majore $|y_{k+1} - z(x_{k+1})|$ en fonction de $|y_k - z(x_k)|$

$$|y_{k+1} - z(x_{k+1})| \quad = \quad |y_k + h\varphi(x_k, y_k, h) - z(x_{k+1})|$$

Preuve du théorème - I

Pour utiliser le lemme, on majore $|y_{k+1} - z(x_{k+1})|$ en fonction de $|y_k - z(x_k)|$

$$
\begin{aligned}
|y_{k+1} - z(x_{k+1})| &= |y_k + h\varphi(x_k, y_k, h) - z(x_{k+1})| \\
&\leq |y_k - z(x_k)| + |z(x_{k+1}) - z(x_k) + hf(x_k, z(x_k))| \\
&\quad + h\,|f(x_k, z(x_k)) - \varphi(x_k, z(x_k), h)| \\
&\quad + h\,|\varphi(x_k, z(x_k), h) - \varphi(x_k, y_k, h)|
\end{aligned}
$$

Pour utiliser le lemme, on majore $|y_{k+1} - z(x_{k+1})|$ en fonction de $|y_k - z(x_k)|$

$$
\begin{aligned}
|y_{k+1} - z(x_{k+1})| \quad &= \quad |y_k + h\varphi(x_k, y_k, h) - z(x_{k+1})| \\
&\leq \quad |y_k - z(x_k)| + |z(x_{k+1}) - z(x_k) + hf(x_k, z(x_k))| \\
&\qquad + h\,|f(x_k, z(x_k)) - \varphi(x_k, z(x_k), h)| \\
&\qquad + h\,|\varphi(x_k, z(x_k), h) - \varphi(x_k, y_k, h)|
\end{aligned}
$$

Comme z est dérivable et f est continue,

Preuve du théorème - I

Pour utiliser le lemme, on majore $|y_{k+1} - z(x_{k+1})|$ en fonction de $|y_k - z(x_k)|$

$$\begin{aligned}
|y_{k+1} - z(x_{k+1})| &= |y_k + h\varphi(x_k, y_k, h) - z(x_{k+1})| \\
&\leq |y_k - z(x_k)| + |z(x_{k+1}) - z(x_k) + hf(x_k, z(x_k))| \\
&\quad + h\,|f(x_k, z(x_k)) - \varphi(x_k, z(x_k), h)| \\
&\quad + h\,|\varphi(x_k, z(x_k), h) - \varphi(x_k, y_k, h)|
\end{aligned}$$

Comme z est dérivable et f est continue,
$\forall \varepsilon, \exists \alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0, b], \forall h \in [0, \alpha] \qquad |z(x_{k+1}) - z(x_k) + hf(x_k, z(x_k))| \leq h\varepsilon$$

Preuve du théorème - I

Pour utiliser le lemme, on majore $|y_{k+1} - z(x_{k+1})|$ en fonction de $|y_k - z(x_k)|$

$$
\begin{aligned}
|y_{k+1} - z(x_{k+1})| &= |y_k + h\varphi(x_k, y_k, h) - z(x_{k+1})| \\
&\leq |y_k - z(x_k)| + |z(x_{k+1}) - z(x_k) + hf(x_k, z(x_k))| \\
&\quad + h\,|f(x_k, z(x_k)) - \varphi(x_k, z(x_k), h)| \\
&\quad + h\,|\varphi(x_k, z(x_k), h) - \varphi(x_k, y_k, h)|
\end{aligned}
$$

Comme z est dérivable et f est continue,
$\forall \varepsilon, \exists \alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0, b], \forall h \in [0, \alpha] \qquad |z(x_{k+1}) - z(x_k) + hf(x_k, z(x_k))| \quad \leq \quad h\varepsilon$$

Comme f et φ sont continues et que $\varphi(x, y, 0) = f(x, y)$ (hyp. de consistance)

Preuve du théorème - I

Pour utiliser le lemme, on majore $|y_{k+1} - z(x_{k+1})|$ en fonction de $|y_k - z(x_k)|$

$$\begin{aligned}
|y_{k+1} - z(x_{k+1})| &= |y_k + h\varphi(x_k, y_k, h) - z(x_{k+1})| \\
&\leq |y_k - z(x_k)| + |z(x_{k+1}) - z(x_k) + hf(x_k, z(x_k))| \\
&\quad + h\,|f(x_k, z(x_k)) - \varphi(x_k, z(x_k), h)| \\
&\quad + h\,|\varphi(x_k, z(x_k), h) - \varphi(x_k, y_k, h)|
\end{aligned}$$

Comme z est dérivable et f est continue,
$\forall\varepsilon, \exists\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0, b], \forall h \in [0, \alpha] \qquad |z(x_{k+1}) - z(x_k) + hf(x_k, z(x_k))| \leq h\varepsilon$$

Comme f et φ sont continues et que $\varphi(x, y, 0) = f(x, y)$ (hyp. de consistance)
$\forall\varepsilon, \exists\beta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0, b], \forall h \in [0, \beta] \qquad |f(x_k, z(x_k)) - \varphi(x_k, z(x_k), h)| \leq \varepsilon$$

Preuve du théorème - II

Il nous faut encore majorer le terme $h\,|\varphi(x_k, z(x_k), h) - \varphi(x_k, y_k, h)|$

Il nous faut encore majorer le terme $h\,|\varphi(x_k, z(x_k), h) - \varphi(x_k, y_k, h)|$
L'hypothèse de stabilité nous dit que :
$\exists A > 0$ tel que

$$\forall (x,y,z,h) \in [x_0,b] \times \mathrm{I\!R}^2 \times [0,1] \qquad |\varphi(x,y,h) - \varphi(x,z,h)| \quad \leq \quad A\,|y-z|$$

d'où

$$h\,|\varphi(x_k, z(x_k), h) - \varphi(x_k, y_k, h)| \quad \leq \quad Ah\,|y_k - z(x_k)|$$

Preuve du théorème - II

Il nous faut encore majorer le terme $h\,|\varphi(x_k, z(x_k), h) - \varphi(x_k, y_k, h)|$
L'hypothèse de stabilité nous dit que :
$\exists A > 0$ tel que

$$\forall (x, y, z, h) \in [x_0, b] \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \qquad |\varphi(x, y, h) - \varphi(x, z, h)| \quad \leq \quad A\,|y - z|$$

d'où

$$h\,|\varphi(x_k, z(x_k), h) - \varphi(x_k, y_k, h)| \quad \leq \quad Ah\,|y_k - z(x_k)|$$

Donc en prenant $\gamma = \min(\alpha, \beta, 1)$, on obtient :
$\forall \varepsilon, \exists \gamma > 0$ tel que $\forall h \leq \gamma$:

$$|y_{k+1} - z(x_{k+1})| \quad \leq \quad (1 + Ah)\,|y_k - z(x_k)| + 2\varepsilon h$$

Preuve du théorème - II

Il nous faut encore majorer le terme $h\,|\varphi(x_k, z(x_k), h) - \varphi(x_k, y_k, h)|$
L'hypothèse de stabilité nous dit que :
$\exists A > 0$ tel que

$$\forall (x, y, z, h) \in [x_0, b] \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \qquad |\varphi(x, y, h) - \varphi(x, z, h)| \leq A\,|y - z|$$

d'où

$$h\,|\varphi(x_k, z(x_k), h) - \varphi(x_k, y_k, h)| \leq Ah\,|y_k - z(x_k)|$$

Donc en prenant $\gamma = \min(\alpha, \beta, 1)$, on obtient :
$\forall \varepsilon, \exists \gamma > 0$ tel que $\forall h \leq \gamma$:

$$|y_{k+1} - z(x_{k+1})| \leq (1 + Ah)\,|y_k - z(x_k)| + 2\varepsilon h$$

En utilisant le lemme

$$|y_{k+1} - z(x_{k+1})| \leq \frac{2\varepsilon\left((1 + Ah)^{k+1} - 1\right)}{A}$$

Preuve du théorème - III

$(1 + Ah)^{k+1}$

Preuve du théorème - III

$(1 + Ah)^{k+1}$ dépend de k mais il peut être majoré si $h \leq 1$

$$\left|(1 + Ah)^{k+1} - 1\right| \quad \leq \quad e^{Ah(k+1)} - 1$$

Preuve du théorème - III

$(1 + Ah)^{k+1}$ dépend de k mais il peut être majoré si $h \leq 1$

$$\left|(1 + Ah)^{k+1} - 1\right| \quad \leq \quad e^{Ah(k+1)} - 1 \quad \leq \quad e^{A(b-x_0+1)} - 1$$

Preuve du théorème - III

$(1+Ah)^{k+1}$ dépend de k mais il peut être majoré si $h \leq 1$

$$\left|(1+Ah)^{k+1}-1\right| \quad \leq \quad e^{Ah(k+1)}-1 \quad \leq \quad e^{A(b-x_0+1)}-1$$

Finalement, si on pose $M = \dfrac{2}{A}\left(e^{A(b-x_0+1)}-1\right)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \gamma > 0$ tel que :

$$\forall h \in [0,\gamma], \qquad \max_{k\ t.q.\ x_0+kh \in [a,b]} |y_k - z(x_k)| \quad \leq \quad M\varepsilon$$

Preuve du théorème - III

$(1 + Ah)^{k+1}$ dépend de k mais il peut être majoré si $h \leq 1$

$$\left|(1 + Ah)^{k+1} - 1\right| \quad \leq \quad e^{Ah(k+1)} - 1 \quad \leq \quad e^{A(b-x_0+1)} - 1$$

Finalement, si on pose $M = \dfrac{2}{A}\left(e^{A(b-x_0+1)} - 1\right)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \gamma > 0$ tel que :

$$\forall h \in [0, \gamma], \qquad \max_{k \ t.q. \ x_0+kh \in [a,b]} |y_k - z(x_k)| \quad \leq \quad M\varepsilon$$

C.Q.F.D.

Ordre d'une méthode

Pourquoi généraliser ?

Ordre d'une méthode

Pourquoi généraliser ?

- La preuve convient pour la première méthode proposée $\varphi(x, y, h) = f(x, y)$

Ordre d'une méthode

Pourquoi généraliser ?

- La preuve convient pour la première méthode proposée $\varphi(x, y, h) = f(x, y)$
- φ peut être construit de manière à minimiser le terme d'erreur :

$$|z(x_{k+1}) - z(x_k) - h\varphi(x_k, z(x_k), h)|$$

Ordre d'une méthode

Pourquoi généraliser ?

- La preuve convient pour la première méthode proposée $\varphi(x,y,h) = f(x,y)$
- φ peut être construit de manière à minimiser le terme d'erreur :

$$|z(x_{k+1}) - z(x_k) - h\varphi(x_k, z(x_k), h)|$$

Définition *Une méthode d'intégration à pas séparés caractérisée par φ est d'ordre r si il existe une constante L indépendante de h telle que :*

$$\max_{k\ t.q.\ x_k = x_0 + kh \in [a,b]} \left| \frac{z(x_{k+1}) - z(x_k)}{h} - \varphi(x_k, y_k, h) \right| \leq Lh^r$$

Ordre d'une méthode

Pourquoi généraliser ?

- La preuve convient pour la première méthode proposée $\varphi(x, y, h) = f(x, y)$
- φ peut être construit de manière à minimiser le terme d'erreur :

$$|z(x_{k+1}) - z(x_k) - h\varphi(x_k, z(x_k), h)|$$

Définition *Une méthode d'intégration à pas séparés caractérisée par φ est d'ordre r si il existe une constante L indépendante de h telle que :*

$$\max_{k\ t.q.\ x_k = x_0 + kh \in [a,b]} \left| \frac{z(x_{k+1}) - z(x_k)}{h} - \varphi(x_k, y_k, h) \right| \quad \leq \quad Lh^r$$

Alors, si une méthode est d'ordre r alors il existe une constante K indépendante de h telle que :

$$\max_{k t.q. x_k \in [a,b]} |y_k - z(x_k)| \quad \leq \quad Kh^r$$

La preuve est la même que la précédente.

Les méthodes

Méthode d'EULER

C'est la méthode la plus simple :

$$\varphi(x, y, h) \quad = \quad f(x, y)$$

Méthode d'EULER

C'est la méthode la plus simple :

$$\varphi(x, y, h) \quad = \quad f(x, y)$$

Par définition la méthode est

- Consistante

C'est la méthode la plus simple :

$$\varphi(x, y, h) \quad = \quad f(x, y)$$

Par définition la méthode est

- Consistante
  - φ est continue car f est continue,
  - $\varphi(x, y, 0) = f(x, y)$
- Stable

Méthode d'EULER

C'est la méthode la plus simple :

$$\varphi(x, y, h) = f(x, y)$$

Par définition la méthode est

- Consistante
  - φ est continue car f est continue,
  - $\varphi(x, y, 0) = f(x, y)$
- Stable
  - car f est lipschitzienne.

Méthode d'EULER

C'est la méthode la plus simple :

$$\varphi(x, y, h) \quad = \quad f(x, y)$$

Par définition la méthode est

- Consistante
  - φ est continue car f est continue,
  - $\varphi(x, y, 0) = f(x, y)$
- Stable
  - car f est lipschitzienne.

$\Rightarrow$*La méthode est convergente*

Ordre de la méthode

Si f est C^1, la méthode est d'ordre

Ordre de la méthode

Si f est C^1, la méthode est d'ordre 1

Ordre de la méthode

Si f est C^1, la méthode est d'ordre 1

En effet, si f est C^1 la solution z est C^2

Ordre de la méthode

Si f est C^1, la méthode est d'ordre 1
En effet, si f est C^1 la solution z est C^2
Si on fait un développement à l'ordre 1 de z :

$$z(x_{n+1}) - z(x_n) = z(x_n + h) - z(x_n) = hf(x_n, z(x_n)) + \frac{h^2}{2} z''(c)$$

avec $c \in [a, b]$.

Polytech'Paris-UPMC

Ordre de la méthode

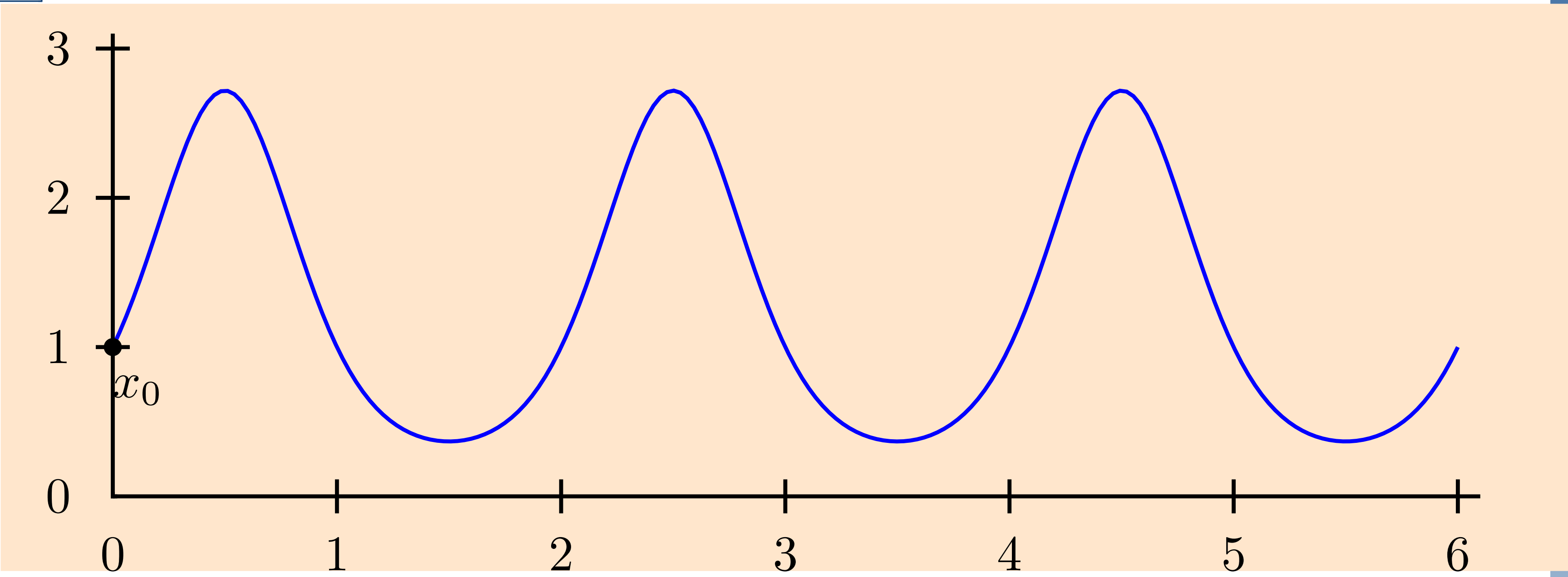
Si f est C^1, la méthode est d'ordre 1
En effet, si f est C^1 la solution z est C^2
Si on fait un développement à l'ordre 1 de z :

$$z(x_{n+1}) - z(x_n) = z(x_n + h) - z(x_n) = hf(x_n, z(x_n)) + \frac{h^2}{2} z''(c)$$

avec $c \in [a, b]$.
il existe $M \in \mathbb{R}$, $m = \max_{x \in [a,b]} |z''(x)|$ et

$$\left| \frac{z(x_{n+1}) - z(x_n)}{h} - f(x_n, z(x_n)) \right| \leq \frac{M}{2} h$$

Exemple

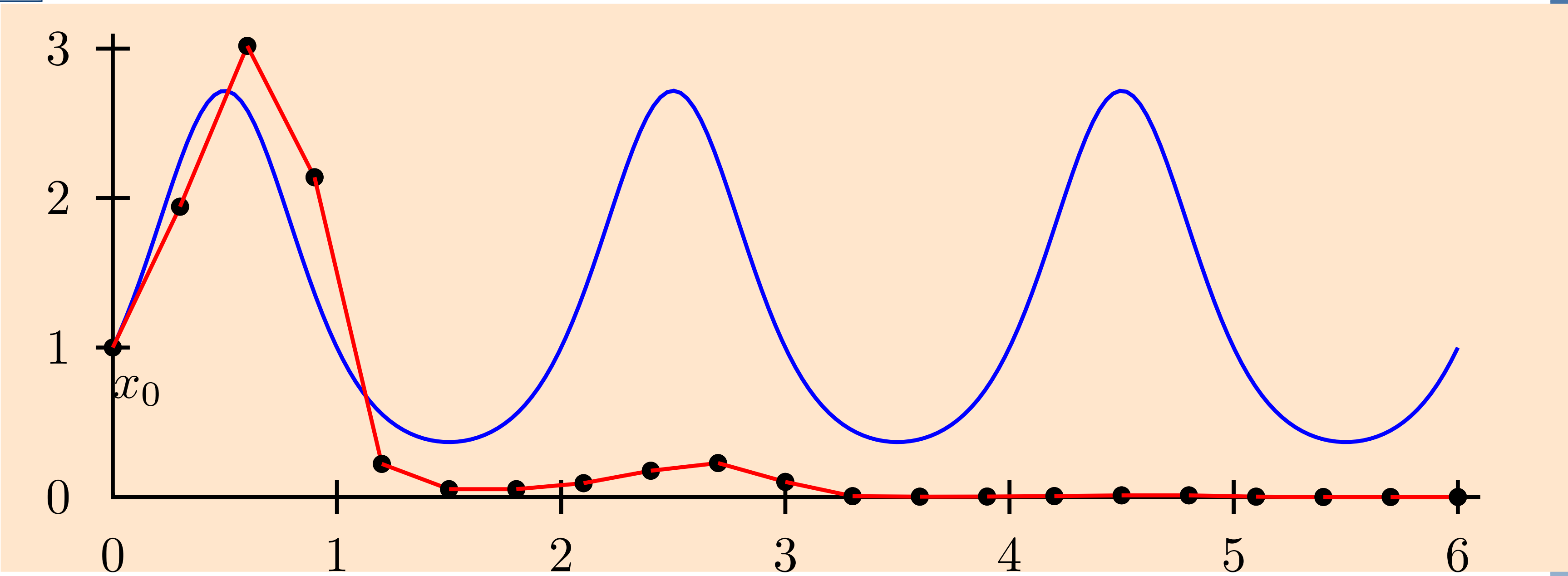


Fonction $e^{\sin(\pi x)}$

solution de $\left\{ \begin{array}{rcl} z(0) & = & 0 \\ z'(x) & = & \pi \cos(\pi x) z(x) \end{array} \right.$

Avec un pas de

Exemple

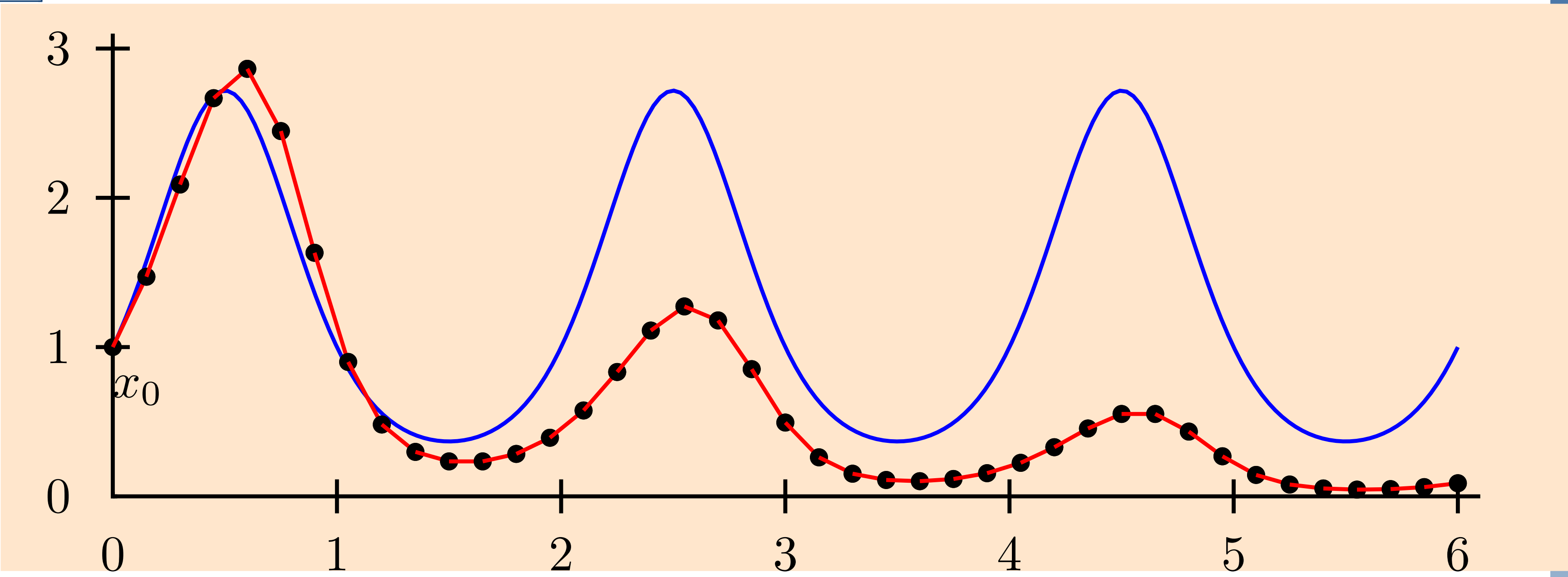


Fonction $e^{\sin(\pi x)}$

solution de $\left\{ \begin{array}{rcl} z(0) & = & 0 \\ z'(x) & = & \pi \cos(\pi x) z(x) \end{array} \right.$

Avec un pas de 0.3

Exemple

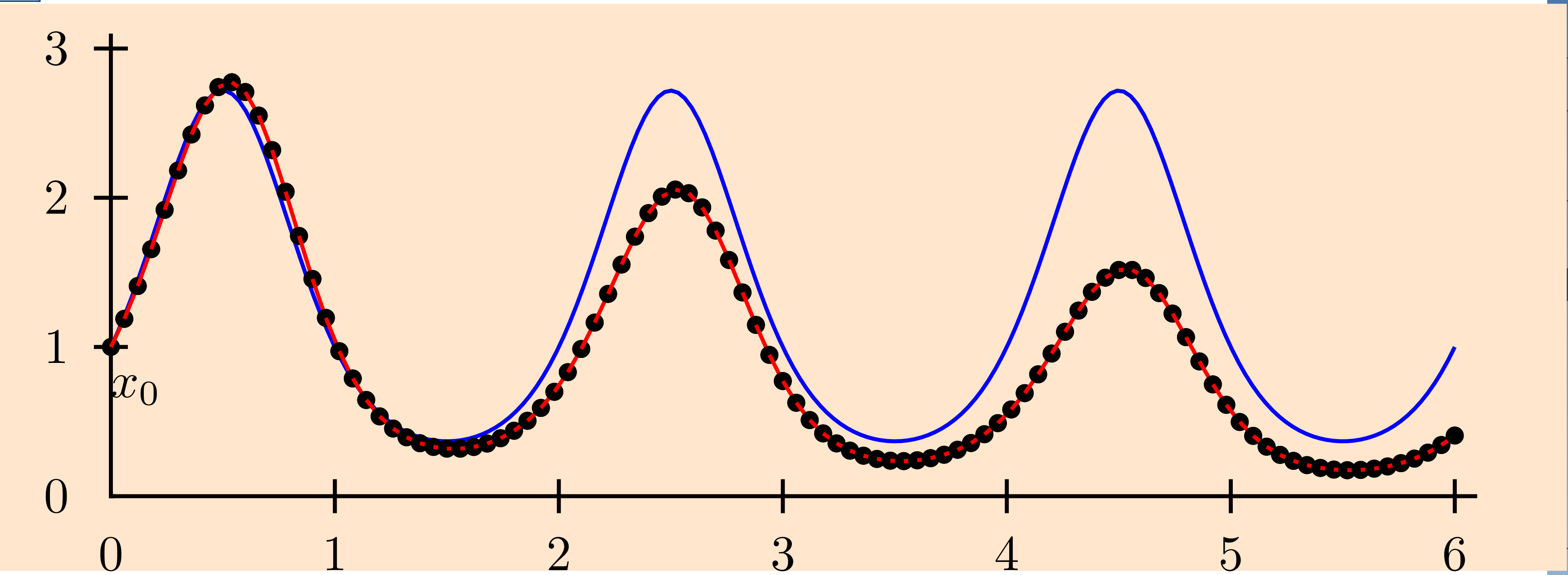


Fonction $e^{\sin(\pi x)}$

solution de $\begin{cases} z(0) = 0 \\ z'(x) = \pi\cos(\pi x) z(x) \end{cases}$

Avec un pas de 0.15

Exemple



Fonction $e^{\sin(\pi x)}$

solution de $\begin{cases} z(0) = 0 \\ z'(x) = \pi\cos(\pi x) z(x) \end{cases}$

Avec un pas de 0.06

Méthode de HEUN

On complique un peu :

$$\varphi(x,y,h) \quad = \quad f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\right)$$

Méthode de HEUN

On complique un peu :

$$\varphi(x,y,h) \quad = \quad f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\right)$$

La méthode est

- Consistante

Méthode de HEUN

On complique un peu :

$$\varphi(x,y,h) \quad = \quad f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\right)$$

La méthode est

- Consistante
  - φ est continue car f est continue,

On complique un peu :

$$\varphi(x,y,h) \quad = \quad f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\right)$$

La méthode est

- Consistante
  - φ est continue car f est continue,
  - $\varphi(x,y,0) = f(x+0, y+0)$

- Stable

- Stable

$$
|\varphi(x,y,h)-\varphi(x,z,h)| \quad = \quad \left| \begin{array}{r} f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\right) \\ -f\left(x+\frac{h}{2}, z+\frac{h}{2}f(x,z)\right) \end{array} \right|
$$

- Stable
  si f est lipschitzienne

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x,y,h)-\varphi(x,z,h)| &= \left| \begin{array}{r} f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\right) \\ -f\left(x+\frac{h}{2}, z+\frac{h}{2}f(x,z)\right) \end{array} \right| \\
&\leq L\left| y+\frac{h}{2}f(x,y)-z-\frac{h}{2}f(x,z)\right|
\end{aligned}
$$

- Stable
  si f est lipschitzienne

$$\begin{aligned}
|\varphi(x,y,h)-\varphi(x,z,h)| &= \left| \begin{array}{r} f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\right) \\ -f\left(x+\frac{h}{2}, z+\frac{h}{2}f(x,z)\right) \end{array} \right| \\
&\le L\left|y+\frac{h}{2}f(x,y)-z-\frac{h}{2}f(x,z)\right| \\
&\le L\left|y-z+\frac{h}{2}f(x,y)-\frac{h}{2}f(x,z)\right|
\end{aligned}$$

- Stable
  si f est lipschitzienne

$$\begin{aligned}
|\varphi(x,y,h)-\varphi(x,z,h)| &= \left|\begin{array}{r} f\left(x+\frac{h}{2},y+\frac{h}{2}f(x,y)\right) \\ -f\left(x+\frac{h}{2},z+\frac{h}{2}f(x,z)\right)\end{array}\right| \\
&\leq L\left|y+\frac{h}{2}f(x,y)-z-\frac{h}{2}f(x,z)\right| \\
&\leq L\left|y-z+\frac{h}{2}f(x,y)-\frac{h}{2}f(x,z)\right| \\
&\leq L\left|y-z\right|+L\left|\frac{h}{2}f(x,y)-\frac{h}{2}f(x,z)\right|
\end{aligned}$$

- Stable
  si f est lipschitzienne

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x,y,h)-\varphi(x,z,h)| &= \left| \begin{array}{r} f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\right) \\ -f\left(x+\frac{h}{2}, z+\frac{h}{2}f(x,z)\right) \end{array} \right| \\
&\leq L\left|y+\frac{h}{2}f(x,y)-z-\frac{h}{2}f(x,z)\right| \\
&\leq L\left|y-z+\frac{h}{2}f(x,y)-\frac{h}{2}f(x,z)\right| \\
&\leq L\,|y-z| + L\left|\frac{h}{2}f(x,y)-\frac{h}{2}f(x,z)\right| \\
&\leq L\left(1+L\frac{h}{2}\right)|y-z|
\end{aligned}
$$

- Stable
  si f est lipschitzienne

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x,y,h)-\varphi(x,z,h)| &= \left| \begin{array}{r} f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\right) \\ -f\left(x+\frac{h}{2}, z+\frac{h}{2}f(x,z)\right) \end{array} \right| \\
&\leq L\left|y+\frac{h}{2}f(x,y)-z-\frac{h}{2}f(x,z)\right| \\
&\leq L\left|y-z+\frac{h}{2}f(x,y)-\frac{h}{2}f(x,z)\right| \\
&\leq L\,|y-z|+L\left|\frac{h}{2}f(x,y)-\frac{h}{2}f(x,z)\right| \\
&\leq L\left(1+L\frac{h}{2}\right)|y-z|
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$*La méthode est convergente*

Ordre de la méthode

Si f est C^2, la méthode de HEUN est d'ordre

Ordre de la méthode

Si f est C^2, la méthode de HEUN est d'ordre 2

Ordre de la méthode

Si f est C^2, la méthode de HEUN est d'ordre 2
Si f est C^2 alors la solution z est C^3 et $\varphi(x, y, h)$ est C^2.

Ordre de la méthode

Si f est C^2, la méthode de HEUN est d'ordre 2
Si f est C^2 alors la solution z est C^3 et $\varphi(x, y, h)$ est C^2.
En développant z à l'ordre 3,

$$\frac{z(x+h) - z(x)}{h} = z'(x) + \frac{h}{2} z''(x) + \frac{h^2}{6} z'''(c_1)$$

avec $c_1 \in [a, b]$.

Ordre de la méthode

Si f est C^2, la méthode de HEUN est d'ordre 2
Si f est C^2 alors la solution z est C^3 et $\varphi(x, y, h)$ est C^2.
En développant z à l'ordre 3,

$$\frac{z(x+h) - z(x)}{h} = z'(x) + \frac{h}{2} z''(x) + \frac{h^2}{6} z'''(c_1)$$

avec $c_1 \in [a, b]$. De plus comme $z'(x) = f(x, z(x))$, alors :

$$\begin{aligned} z''(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, z(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, z(x)) z'(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, z(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, z(x)) f(x, z(x)) \end{aligned}$$

Si f est C^2, la méthode de HEUN est d'ordre 2
Si f est C^2 alors la solution z est C^3 et $\varphi(x,y,h)$ est C^2.
En développant z à l'ordre 3,

$$\frac{z(x+h)-z(x)}{h} = z'(x) + \frac{h}{2}z''(x) + \frac{h^2}{6}z'''(c_1)$$

avec $c_1 \in [a,b]$. De plus comme $z'(x) = f(x,z(x))$, alors :

$$\begin{aligned} z''(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,z(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,z(x))z'(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,z(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,z(x))f(x,z(x)) \end{aligned}$$

Donc $$\begin{aligned} \frac{z(x+h)-z(x)}{h} &= z'(x) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x,z(x)) + \\ &\quad \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x,z(x))f(x,z(x)) + \frac{h^2}{6}z'''(c_1) \end{aligned}$$

Ordre de convergence (suite)

En faisant le développement de TAYLOR de $\varphi(x,y,h)$ à l'ordre 2 en $h \longrightarrow 0$, on obtient :

$$\varphi(x,y,h) = \varphi(x,y,0) + h\varphi'(x,y,0) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x,y,c_2)$$

avec $c_2 \in [0,1]$.

Ordre de convergence (suite)

En faisant le développement de TAYLOR de $\varphi(x, y, h)$ à l'ordre 2 en $h \to 0$, on obtient :

$$\varphi(x,y,h) \quad = \quad \varphi(x,y,0) + h\varphi'(x,y,0) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x,y,c_2)$$

avec $c_2 \in [0,1]$. Or,

$$\varphi'(x,y,h) \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(x,y)\right) + \frac{f(x,y)}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(x,y)\right)$$

Ordre de convergence (suite)

En faisant le développement de TAYLOR de $\varphi(x,y,h)$ à l'ordre 2 en $h \to 0$, on obtient :

$$\varphi(x,y,h) \quad = \quad \varphi(x,y,0) + h\varphi'(x,y,0) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x,y,c_2)$$

avec $c_2 \in [0,1]$. Or,

$$\varphi'(x,y,h) \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\right) + \frac{f(x,y)}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\right)$$

Donc

$$\varphi(x,y,h) \quad = \quad f(x,y) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)f(x,y) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x,y,c_2)$$

Ordre de convergence (fin)

Donc : $$\begin{aligned}\varphi(x,z(x),h) &= z'(x)+\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x,z(x))+\\ &\quad \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x,z(x))f(x,z(x))+\frac{h^2}{2}\varphi''(x,z(x),c_2)\end{aligned}$$

Ordre de convergence (fin)

$$\text{Donc : } \varphi(x, z(x), h) = z'(x) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x, z(x)) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x, z(x)) f(x, z(x)) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x, z(x), c_2)$$

Donc comme $x_{k+1} = x_k + h$:

$$\left| \frac{z(x_k + h) - z(x_k)}{h} - \varphi(x_k, z(x_k), h) \right| \leq$$

Polytech'Paris-UPMC

Ordre de convergence (fin)

Donc : $$\varphi(x,z(x),h) = z'(x) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x,z(x)) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x,z(x))f(x,z(x)) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x,z(x),c_2)$$

Donc comme $x_{k+1} = x_k + h$:

$$\left|\frac{z(x_k+h) - z(x_k)}{h} - \varphi(x_k, z(x_k), h)\right| \leq \frac{h^2}{6}z'''(c_1) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x_k, z(x_k), c_2)$$

Ordre de convergence (fin)

Donc : $$\varphi(x, z(x), h) = z'(x) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x, z(x)) + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x, z(x))f(x, z(x)) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x, z(x), c_2)$$

Donc comme $x_{k+1} = x_k + h$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{z(x_k+h) - z(x_k)}{h} - \varphi(x_k, z(x_k), h)\right| &\leq \frac{h^2}{6}z'''(c_1) + \frac{h^2}{2}\varphi''(x_k, z(x_k), c_2) \\ &\leq h^2\left(\frac{1}{6}z'''(c_1) + \frac{1}{2}\varphi''(x_k, z(x_k), c_2)\right)\end{aligned}$$

Ordre de convergence (fin)

Donc :
$$\begin{aligned}\varphi(x,z(x),h) &= z'(x)+\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(x,z(x))+\\ &\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x,z(x))f(x,z(x))+\frac{h^2}{2}\varphi''(x,z(x),c_2)\end{aligned}$$

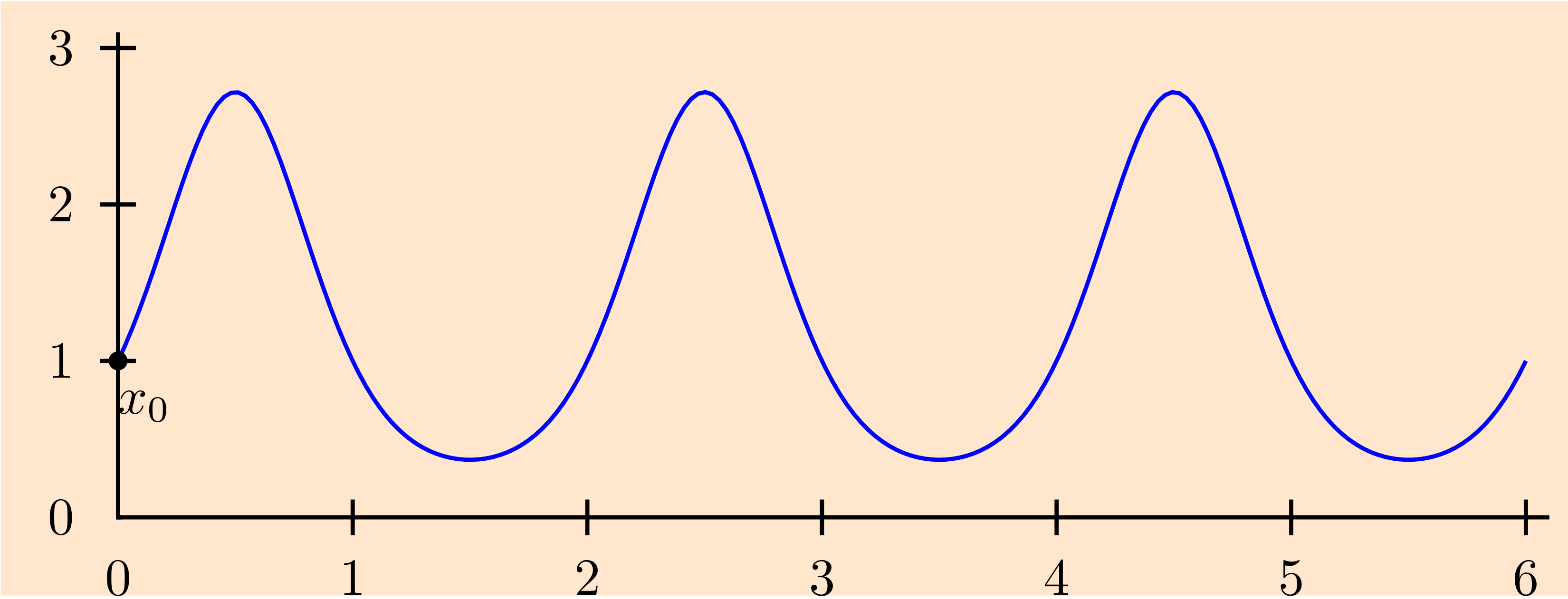
Donc comme $x_{k+1}=x_k+h$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{z(x_k+h)-z(x_k)}{h}-\varphi(x_k,z(x_k),h)\right| &\leq \frac{h^2}{6}z'''(c_1)+\frac{h^2}{2}\varphi''(x_k,z(x_k),c_2)\\ &\leq h^2\left(\frac{1}{6}z'''(c_1)+\frac{1}{2}\varphi''(x_k,z(x_k),c_2)\right)\end{aligned}$$

Comme z est C^3 et φ est C^2, on peut majorer $z'''(c_1)$ et $\varphi''(x,y,c_2)$ donc il existe K tel que

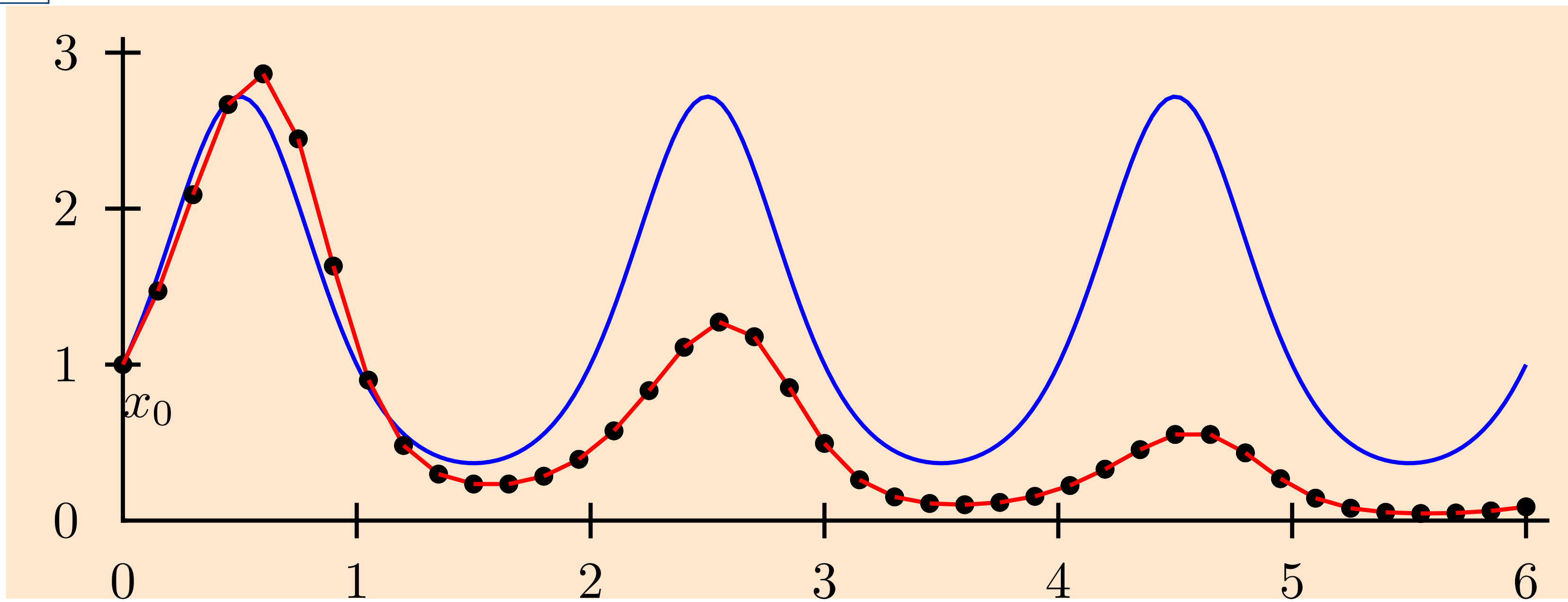
$$\left|\frac{z(x_{k+1})-z(x_k)}{h}-\varphi(x_k,z(x_k),h)\right| \leq Kh^2$$

Exemple



$$\text{Fonction} \quad e^{\sin(\pi x)}$$

$$\text{solution de} \quad \begin{cases} z(0) & = & 0 \\ z'(x) & = & \pi \cos(\pi x) z(x) \end{cases}$$

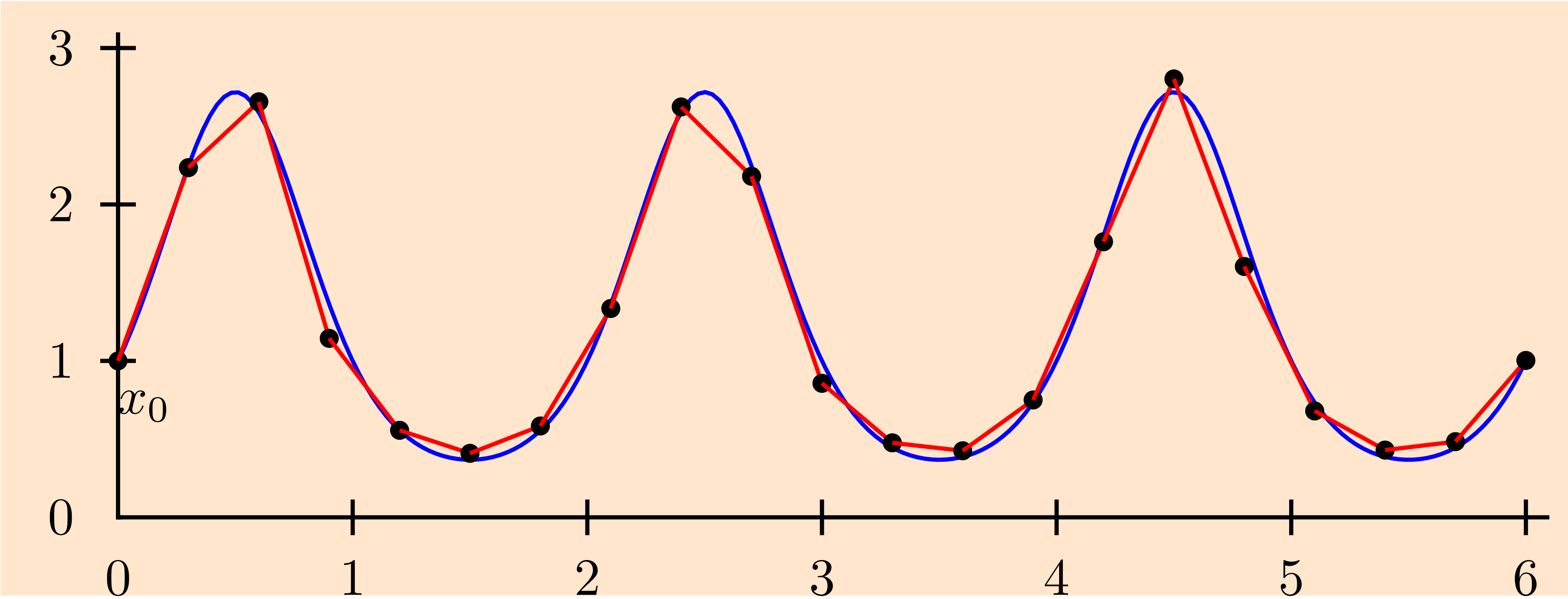


Fonction $e^{\sin(\pi x)}$

solution de $\left\{ \begin{array}{rcl} z(0) & = & 0 \\ z'(x) & = & \pi \cos(\pi x) z(x) \end{array} \right.$

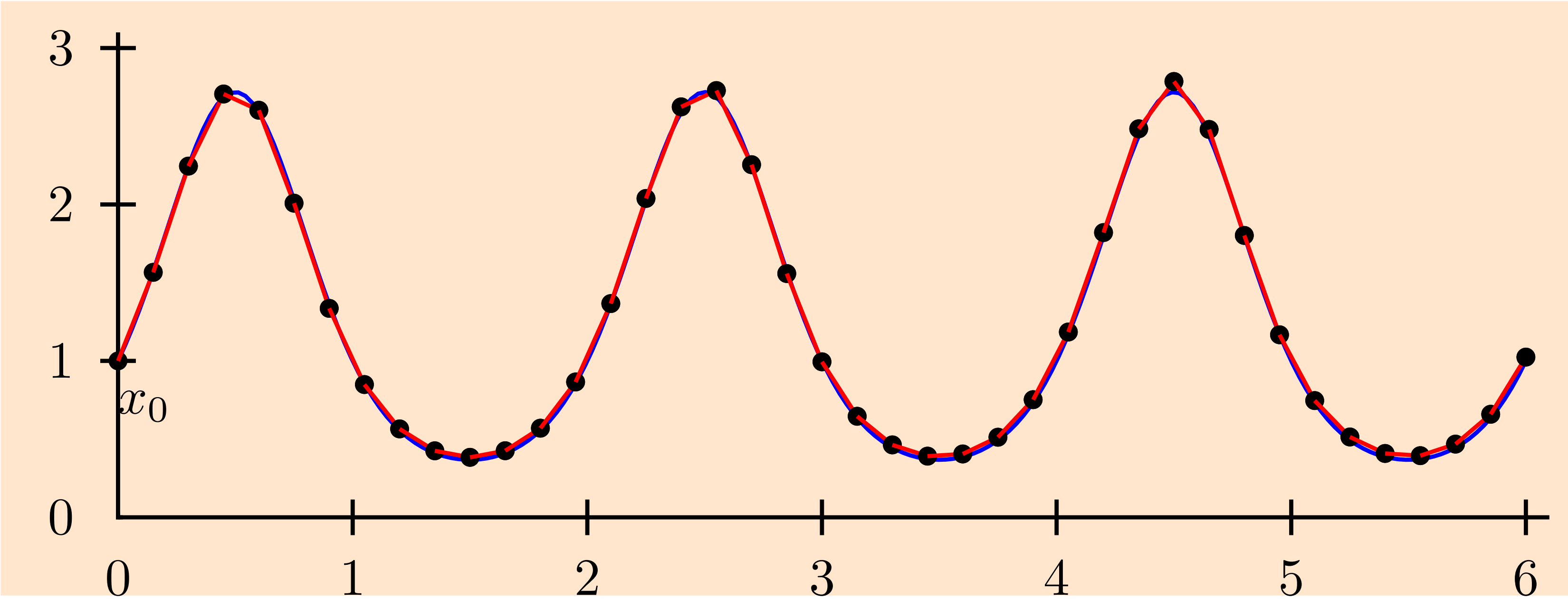
EULER avec un pas de 0.15

Exemple



Fonction	$e^{\sin(\pi x)}$
solution de	$\left\{ \begin{array}{rcl} z(0) & = & 0 \\ z'(x) & = & \pi \cos(\pi x) z(x) \end{array} \right.$
HEUN avec un pas de	0.3

Exemple



Fonction $e^{\sin(\pi x)}$

solution de $\begin{cases} z(0) = 0 \\ z'(x) = \pi\cos(\pi x) z(x) \end{cases}$

HEUN avec un pas de 0.15

méthodes de RUNGE-KUTTA

Schéma de Taylor

Le principe des méthodes à pas séparés est de calculer

$$y_{k+1} \quad = \quad y_k + \varphi(x_k, y_k, h)$$

en choisissant φ de manière à ce que y_k soit le plus proche possible de $z(x_k)$.

Schéma de Taylor

Le principe des méthodes à pas séparés est de calculer

$$y_{k+1} = y_k + \varphi(x_k, y_k, h)$$

en choisissant φ de manière à ce que y_k soit le plus proche possible de $z(x_k)$.
Comme $x_{k+1} = x_k + h$ une bonne méthode est de choisir φ afin d'annuler le plus de termes possibles dans le développement de TAYLOR de $z(x+h)$

$$z(x+h) = z(x) + hz'(x) + \frac{h^2}{2} z''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} z^{(n)}(x) + O(h^{n+1})$$

Schéma de Taylor

Le principe des méthodes à pas séparés est de calculer

$$y_{k+1} = y_k + \varphi(x_k, y_k, h)$$

en choisissant φ de manière à ce que y_k soit le plus proche possible de $z(x_k)$.
Comme $x_{k+1} = x_k + h$ une bonne méthode est de choisir φ afin d'annuler le plus de termes possibles dans le développement de TAYLOR de $z(x+h)$

$$z(x+h) = z(x) + hz'(x) + \frac{h^2}{2} z''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} z^{(n)}(x) + O(h^{n+1})$$

C'est possible puisque

$$\begin{aligned} z'(x) &= f(x, z(x)) \\ z''(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, z(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, z(x)) f(x, z(x)) \\ &\dots \end{aligned}$$

On peut par exemple choisir :

$$y_{n+1} \quad = \quad y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) f(x_n, y_n)\right)$$

Qui est d'ordre .

On peut par exemple choisir :

$$y_{n+1} \quad = \quad y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) f(x_n, y_n)\right)$$

Qui est d'ordre 2.

On peut par exemple choisir :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) f(x_n, y_n)\right)$$

Qui est d'ordre 2.
Mais cela oblige à calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

On peut par exemple choisir :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) f(x_n, y_n)\right)$$

Qui est d'ordre 2.
Mais cela oblige à calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Pour éviter de calculer ces dérivées partielles, on peut utiliser une approximation :

On peut par exemple choisir :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) f(x_n, y_n)\right)$$

Qui est d'ordre 2.
Mais cela oblige à calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Pour éviter de calculer ces dérivées partielles, on peut utiliser une approximation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) \simeq \frac{f(x_n + h, y_n) - f(x_n, y_n)}{h}$$

On peut par exemple choisir :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) f(x_n, y_n)\right)$$

Qui est d'ordre 2.
Mais cela oblige à calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Pour éviter de calculer ces dérivées partielles, on peut utiliser une approximation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) \simeq \frac{f(x_n + h, y_n) - f(x_n, y_n)}{h}$$

Au final, φ sera de la forme :

$$\varphi(x, y, h) = a_1 f(x, y) + a_2 f(x + a_3 h, y + a_4 h)$$

L'idée de RUNGE-KUTTA est d'utiliser le développement de TAYLOR de $f(x + a_3 h, z(x) + a_4 h)$ pour identifier les valeurs des coefficients a_1, a_2, a_3 et a_4.

L'idée de RUNGE-KUTTA est d'utiliser le développement de TAYLOR de $f(x + a_3 h, z(x) + a_4 h)$ pour identifier les valeurs des coefficients a_1, a_2, a_3 et a_4.

$$\begin{aligned} f(x + a_3 h, z(x) + a_4 h) &= f(x, z(x)) + a_3 h \frac{\partial f}{\partial x}(x, z(x)) + a_4 h \frac{\partial f}{\partial y}(x, z(x)) \\ &\quad + O(h^2) \end{aligned}$$

Méthodes de RUNGE-KUTTA

L'idée de RUNGE-KUTTA est d'utiliser le développement de TAYLOR de $f(x + a_3 h, z(x) + a_4 h)$ pour identifier les valeurs des coefficients a_1, a_2, a_3 et a_4.

$$\begin{aligned} f(x + a_3 h, z(x) + a_4 h) &= f(x, z(x)) + a_3 h \frac{\partial f}{\partial x}(x, z(x)) + a_4 h \frac{\partial f}{\partial y}(x, z(x)) \\ &\quad + O(h^2) \end{aligned}$$

en remplaçant x par x_n et $z(x)$ par $z(x_n)$ cela donne

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + (a_1 + a_2) h f(x_n, y_n) + a_2 a_3 h^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) \\ &\quad + a_2 a_4 h^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Méthodes de RUNGE-KUTTA

L'idée de RUNGE-KUTTA est d'utiliser le développement de TAYLOR de $f(x + a_3 h, z(x) + a_4 h)$ pour identifier les valeurs des coefficients a_1, a_2, a_3 et a_4.

$$\begin{aligned} f(x + a_3 h, z(x) + a_4 h) &= f(x, z(x)) + a_3 h \frac{\partial f}{\partial x}(x, z(x)) + a_4 h \frac{\partial f}{\partial y}(x, z(x)) \\ &\quad + O(h^2) \end{aligned}$$

en remplaçant x par x_n et $z(x)$ par $z(x_n)$ cela donne

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + (a_1 + a_2) h f(x_n, y_n) + a_2 a_3 h^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) \\ &\quad + a_2 a_4 h^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Qu'il faut comparer à

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + \frac{f(x_n, y_n) h^2}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)$$

Méthodes de RUNGE-KUTTA (suite)

En identifiant terme à terme les deux itérations :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 & = & 1 \\ a_2 a_3 & = & \frac{1}{2} \\ a_2 a_4 & = & \frac{f(x_n, y_n)}{2} \end{cases}$$

Méthodes de RUNGE-KUTTA (suite)

En identifiant terme à terme les deux itérations :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 & = & 1 \\ a_2 a_3 & = & \frac{1}{2} \\ a_2 a_4 & = & \frac{f(x_n, y_n)}{2} \end{cases}$$

on peut choisir :

- $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$ et $a_4 = f(x_n, y_n)$.
  C'est la méthode d'EULER modifiée

$$\varphi(x, y, h) = \frac{f(x, y)}{2} + \frac{1}{2} f\left(x + h, y + h f(x_n, y_n)\right)$$

Méthodes de RUNGE-KUTTA (suite)

En identifiant terme à terme les deux itérations :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 a_3 &= \frac{1}{2} \\ a_2 a_4 &= \frac{f(x_n, y_n)}{2} \end{cases}$$

on peut choisir :

- $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$ et $a_4 = f(x_n, y_n)$.
  C'est la méthode d'EULER modifiée

$$\varphi(x, y, h) = \frac{f(x, y)}{2} + \frac{1}{2} f\left(x + h, y + h f(x_n, y_n)\right)$$

- $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$ et $a_4 = \frac{f(x_n, y_n)}{2}$.
  C'est la méthode de HEUN

$$\varphi(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right)$$

En identifiant terme à terme les deux itérations :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 & = & 1 \\ a_2 a_3 & = & \frac{1}{2} \\ a_2 a_4 & = & \frac{f(x_n, y_n)}{2} \end{cases}$$

on peut choisir :

- $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$ et $a_4 = f(x_n, y_n)$.
  C'est la méthode d'EULER modifiée

$$\varphi(x, y, h) = \frac{f(x, y)}{2} + \frac{1}{2} f\left(x + h, y + h f(x_n, y_n)\right)$$

- $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$ et $a_4 = \frac{f(x_n, y_n)}{2}$.
  C'est la méthode de HEUN

$$\varphi(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right)$$

Par définition ces méthodes sont d'ordre

Méthodes de RUNGE-KUTTA (suite)

En identifiant terme à terme les deux itérations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 & = & 1 \\ a_2 a_3 & = & \frac{1}{2} \\ a_2 a_4 & = & \frac{f(x_n, y_n)}{2} \end{array}\right.$$

on peut choisir :

- $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$ et $a_4 = f(x_n, y_n)$.
  C'est la méthode d'EULER modifiée

$$\varphi(x, y, h) = \frac{f(x, y)}{2} + \frac{1}{2} f\left(x + h, y + h f(x_n, y_n)\right)$$

- $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$ et $a_4 = \frac{f(x_n, y_n)}{2}$.
  C'est la méthode de HEUN

$$\varphi(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right)$$

Par définition ces méthodes sont d'ordre 2

Méthode de RUNGE-KUTTA

En poursuivant le même raisonnement à partir du développement de TAYLOR, d'ordre 5 on obtient la méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre

En poursuivant le même raisonnement à partir du développement de TAYLOR, d'ordre 5 on obtient la méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n + h \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{array} \right.$$

Méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4

En poursuivant le même raisonnement à partir du développement de TAYLOR, d'ordre 5 on obtient la méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + h \\ k_1 & = & hf(x_n, y_n) \end{array} \right.$$

Polytech'Paris-UPMC

Méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4

En poursuivant le même raisonnement à partir du développement de TAYLOR, d'ordre 5 on obtient la méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + h \\ k_1 & = & hf(x_n, y_n) \\ k_2 & = & hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \end{array}\right.$$

Méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4

En poursuivant le même raisonnement à partir du développement de TAYLOR, d'ordre 5 on obtient la méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + h \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \end{cases}$$

Méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4

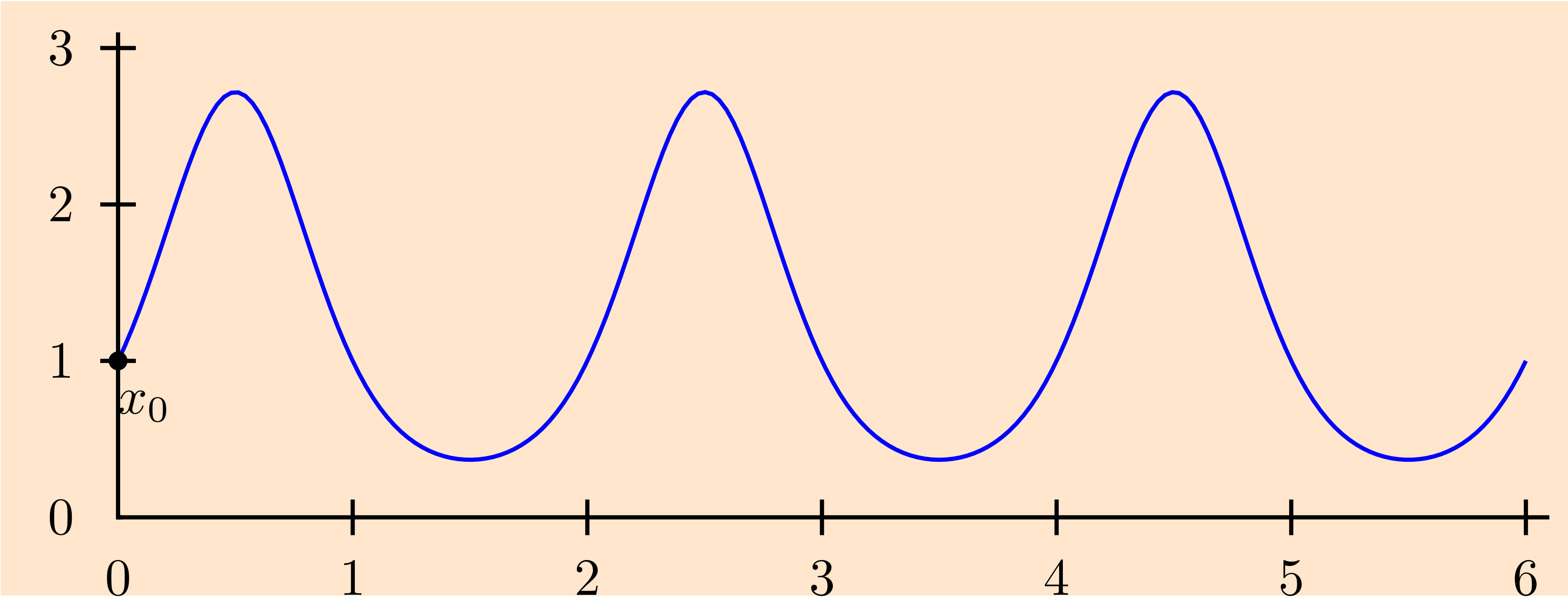
En poursuivant le même raisonnement à partir du développement de TAYLOR, d'ordre 5 on obtient la méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + h \\ k_1 & = & hf(x_n, y_n) \\ k_2 & = & hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 & = & hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 & = & hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{array}\right.$$

Méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4

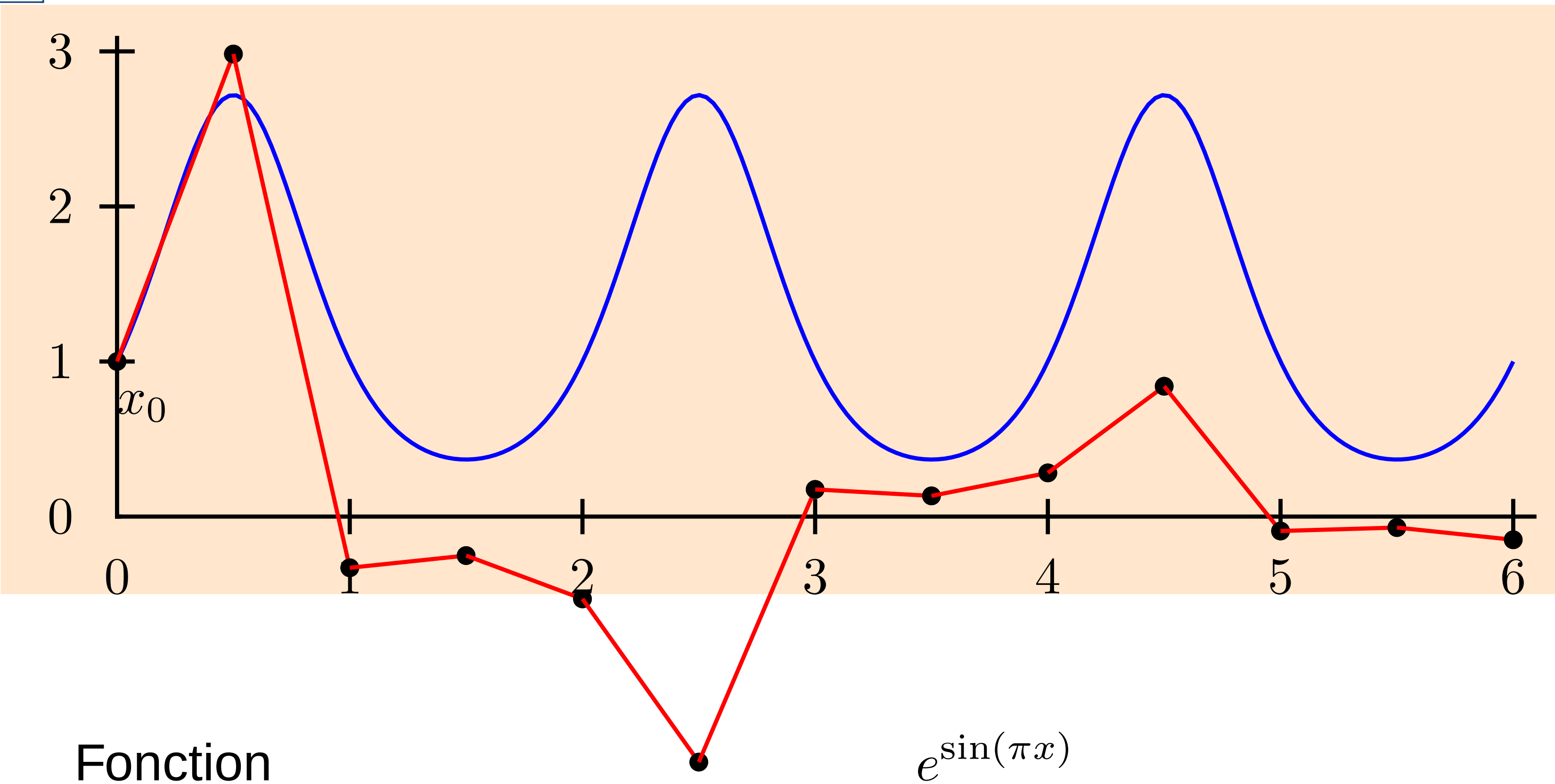
En poursuivant le même raisonnement à partir du développement de TAYLOR, d'ordre 5 on obtient la méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + h \\ k_1 & = & hf(x_n, y_n) \\ k_2 & = & hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 & = & hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 & = & hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} & = & y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{array}\right.$$



Fonction $e^{\sin(\pi x)}$

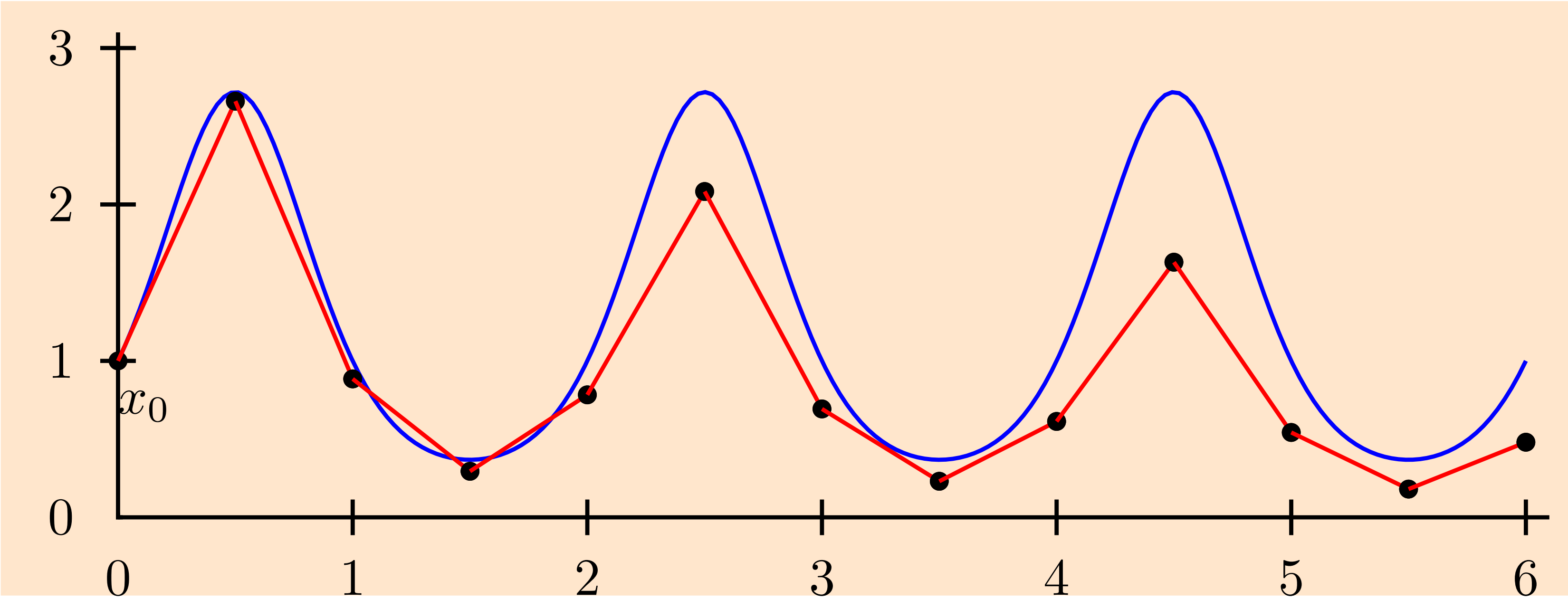
solution de $\begin{cases} z(0) = 0 \\ z'(x) = \pi\cos(\pi x) z(x) \end{cases}$



Fonction $e^{\sin(\pi x)}$

solution de
$$\begin{cases} z(0) & = & 0 \\ z'(x) & = & \pi \cos(\pi x) z(x) \end{cases}$$

HEUN avec un pas de 0.5

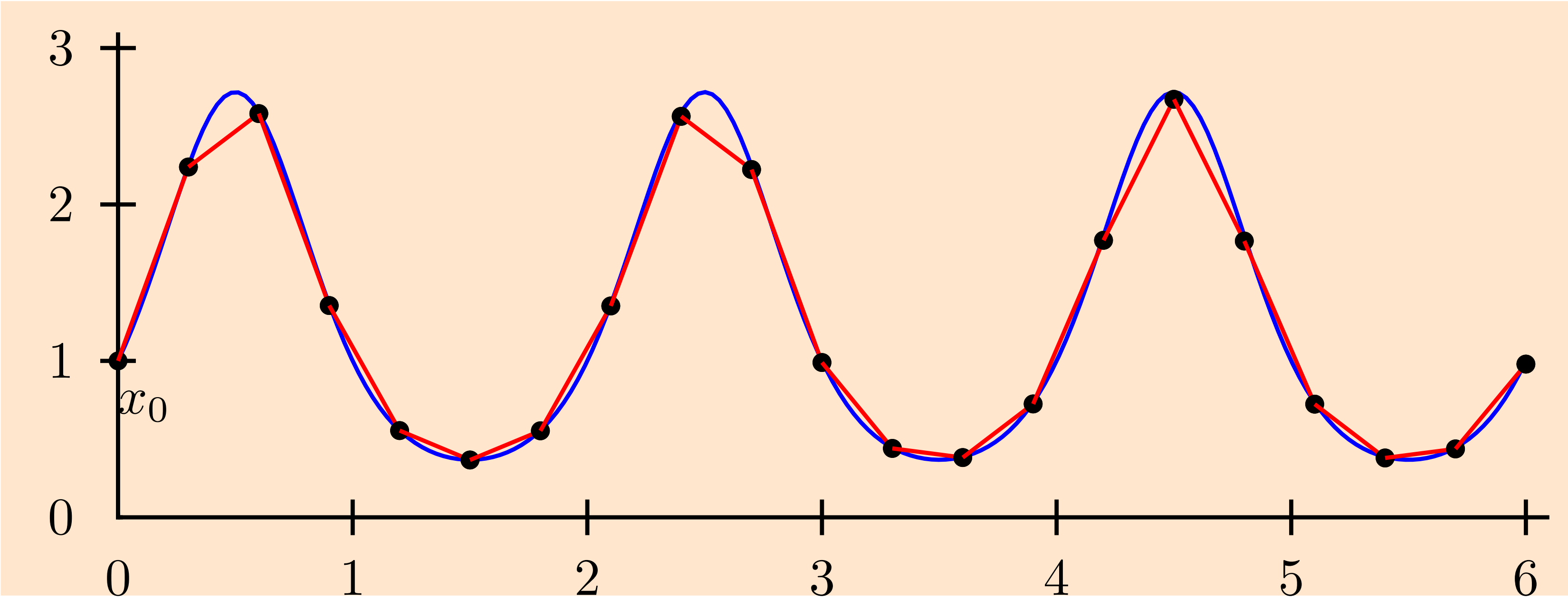


Fonction $e^{\sin(\pi x)}$

solution de $\begin{cases} z(0) = 0 \\ z'(x) = \pi\cos(\pi x) z(x) \end{cases}$

RUNGE-KUTTA avec un pas de 0.5

Exemple



Fonction $e^{\sin(\pi x)}$

solution de
$$\left\{ \begin{array}{rcl} z(0) & = & 0 \\ z'(x) & = & \pi\cos(\pi x) z(x) \end{array} \right.$$

RUNGE-KUTTA avec un pas de 0.3

Conclusion

Pour calculer la solution d'une équation différentielle :

- On discrétise le problème en choisissant un pas h.
- On calcule une suite de points proches de la solution.
- Entre ces points, on peut faire une interpolation.

Il y a d'autres méthodes d'intégration

- À pas multiples
- Qui utilisent des suites récurrentes d'ordre > 1
  - ADAMS-BASHFORTH, ADAMS-MOULTON
  - Cela permet d'éviter de calculer f plusieurs fois