Méthode QR

Polytech'Paris-UPMC

Introduction

Décomposition QR

Il existe différents moyens de décomposer une matrice quelconque. L'une des plus utilisée est la décomposition QR.

Théorème *Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$.*
$\exists Q \in \mathcal{M}_{m,m}$ une matrice orthogonale,
$\exists R \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure telles que

$$A = QR$$

Décomposition QR

Il existe différents moyens de décomposer une matrice quelconque. L'une des plus utilisée est la décomposition QR.

Théorème *Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$.*
$\exists Q \in \mathcal{M}_{m,m}$ une matrice orthogonale*,*
$\exists R \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure *telles que*

$$A = QR$$

- On peut utiliser cette décomposition pour résoudre le système linéaire
  $Ax = b$

Décomposition QR

Il existe différents moyens de décomposer une matrice quelconque. L'une des plus utilisée est la décomposition QR.

Théorème *Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$.*
$\exists Q \in \mathcal{M}_{m,m}$ une matrice orthogonale,
$\exists R \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure telles que

$$A = QR$$

- On peut utiliser cette décomposition pour résoudre le système linéaire
  $Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad QRx = b$

Il existe différents moyens de décomposer une matrice quelconque.
L'une des plus utilisée est la décomposition QR.

Théorème *Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$.*
$\exists Q \in \mathcal{M}_{m,m}$ une matrice orthogonale,
$\exists R \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure telles que

$$A = QR$$

- On peut utiliser cette décomposition pour résoudre le système linéaire
  $$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad QRx = b \quad \Leftrightarrow \quad Rx = {}^{t}Qb$$

Il existe différents moyens de décomposer une matrice quelconque. L'une des plus utilisée est la décomposition QR.

Théorème *Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$.*
$\exists Q \in \mathcal{M}_{m,m}$ une matrice orthogonale,
$\exists R \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure telles que

$$A = QR$$

- On peut utiliser cette décomposition pour résoudre le système linéaire
  $$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad QRx = b \quad \Leftrightarrow \quad Rx = {}^{t}Qb$$
- A n'est pas forcement carrée (système surdéterminé).

Décomposition QR

Il existe différents moyens de décomposer une matrice quelconque. L'une des plus utilisée est la décomposition QR.

Théorème *Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$.*
$\exists Q \in \mathcal{M}_{m,m}$ une matrice orthogonale*,*
$\exists R \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure *telles que*

$$A \quad = \quad QR$$

- On peut utiliser cette décomposition pour résoudre le système linéaire
  $$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad QRx = b \quad \Leftrightarrow \quad Rx = {}^{t}Qb$$
- A n'est pas forcement carrée (système surdéterminé).
- La décomposition n'est pas unique.

Définition (Matrice orthogonales) *On appelle* matrice orthogonale *une matrice dont les colonnes sont* orthonormées*. C'est à dire les matrices O telles que :*

$$ {}^{t}OO = I $$

- Les matrices orthogonales sont les matrices de changement de bases orthogonales.
- Si O est orthogonale, $det(O) = \pm 1$.
- Elles ne changent pas la norme associée au produit scalaire : $\forall u \in \mathbb{R}^m$

$$ \|Ou\| = \|u\| $$

- Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale :

$$ {}^{t}(OO')OO' = {}^{t}O'\,{}^{t}OOO' = I $$

Par exemple :

- Matrices de rotation,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin(\theta) \\ \sin\theta & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- Matrices de permutation,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matrices de symétrie.

Intéret

Comme la décomposition LU, cette décomposition transforme une matrice quelconque en produit de matrices plus simples.

$$A = QR$$

Intéret

Comme la décomposition LU, cette décomposition transforme une matrice quelconque en produit de matrices plus simples.

$$A \quad = \quad QR$$

- Une matrice orthogonale est facile à inverser (${}^tQ = Q^{-1}$).
  $\Rightarrow$*cela peut être utilisé pour la résolution d'équations linéaires : au lieu de résoudre $Ax = b$, on résout $Rx = {}^tQb$*

Intéret

Comme la décomposition LU, cette décomposition transforme une matrice quelconque en produit de matrices plus simples.

$$A \quad = \quad QR$$

- Une matrice orthogonale est facile à inverser (${}^{t}Q = Q^{-1}$).
  ⇒*cela peut être utilisé pour la résolution d'équations linéaires : au lieu de résoudre $Ax = b$, on résout $Rx = {}^{t}Qb$*
- Cela fonctionne pour les matrices rectangulaires
  ⇒*résolution d'équations linéaires surdéterminés (avec plus d'équations que d'inconnues)*

Intéret

Comme la décomposition LU, cette décomposition transforme une matrice quelconque en produit de matrices plus simples.

$$A \quad = \quad QR$$

- Une matrice orthogonale est facile à inverser (${}^{t}Q = Q^{-1}$).
  $\Rightarrow$*cela peut être utilisé pour la résolution d'équations linéaires : au lieu de résoudre $Ax = b$, on résout $Rx = {}^{t}Qb$*
- Cela fonctionne pour les matrices rectangulaires
  $\Rightarrow$*résolution d'équations linéaires surdéterminés (avec plus d'équations que d'inconnues)*
- Les matrices orthogonales ont de bonnes propriétés :

Intéret

Comme la décomposition LU, cette décomposition transforme une matrice quelconque en produit de matrices plus simples.

$$A = QR$$

- Une matrice orthogonale est facile à inverser (${}^tQ = Q^{-1}$).
  $\Rightarrow$*cela peut être utilisé pour la résolution d'équations linéaires : au lieu de résoudre $Ax = b$, on résout $Rx = {}^tQb$*
- Cela fonctionne pour les matrices rectangulaires
  $\Rightarrow$*résolution d'équations linéaires surdéterminés (avec plus d'équations que d'inconnues)*
- Les matrices orthogonales ont de bonnes propriétés :
  - le déterminant de A est égale à celui de R ;

Intéret

Comme la décomposition LU, cette décomposition transforme une matrice quelconque en produit de matrices plus simples.

$$A \quad = \quad QR$$

- Une matrice orthogonale est facile à inverser (${}^{\mathrm{t}}Q = Q^{-1}$).
  $\Rightarrow$*cela peut être utilisé pour la résolution d'équations linéaires : au lieu de résoudre $Ax = b$, on résout $Rx = {}^{\mathrm{t}}Qb$*
- Cela fonctionne pour les matrices rectangulaires
  $\Rightarrow$*résolution d'équations linéaires surdéterminés (avec plus d'équations que d'inconnues)*
- Les matrices orthogonales ont de bonnes propriétés :
  - le déterminant de A est égale à celui de R ;
  - multiplier par une matrice orthogonale ne change pas la norme (Problème des moindres carrés) ;

Intéret

Comme la décomposition LU, cette décomposition transforme une matrice quelconque en produit de matrices plus simples.

$$A = QR$$

- Une matrice orthogonale est facile à inverser (${}^{t}Q = Q^{-1}$).
  $\Rightarrow$*cela peut être utilisé pour la résolution d'équations linéaires : au lieu de résoudre* $Ax = b$, *on résout* $Rx = {}^{t}Qb$
- Cela fonctionne pour les matrices rectangulaires
  $\Rightarrow$*résolution d'équations linéaires surdéterminés (avec plus d'équations que d'inconnues)*
- Les matrices orthogonales ont de bonnes propriétés :
  - le déterminant de A est égale à celui de R ;
  - multiplier par une matrice orthogonale ne change pas la norme (Problème des moindres carrés) ;
  - le conditionnement de A est égale à celui de R.

Intéret

Comme la décomposition LU, cette décomposition transforme une matrice quelconque en produit de matrices plus simples.

$$A = QR$$

- Une matrice orthogonale est facile à inverser (${}^tQ = Q^{-1}$).
  $\Rightarrow$*cela peut être utilisé pour la résolution d'équations linéaires : au lieu de résoudre $Ax = b$, on résout $Rx = {}^tQb$*
- Cela fonctionne pour les matrices rectangulaires
  $\Rightarrow$*résolution d'équations linéaires surdéterminés (avec plus d'équations que d'inconnues)*
- Les matrices orthogonales ont de bonnes propriétés :
  - le déterminant de A est égale à celui de R ;
  - multiplier par une matrice orthogonale ne change pas la norme (Problème des moindres carrés) ;
  - le conditionnement de A est égale à celui de R.
- Cette décomposition est aussi utilisée pour le calcul des valeurs propres d'une matrice (voir cours).

Intéret

Comme la décomposition LU, cette décomposition transforme une matrice quelconque en produit de matrices plus simples.

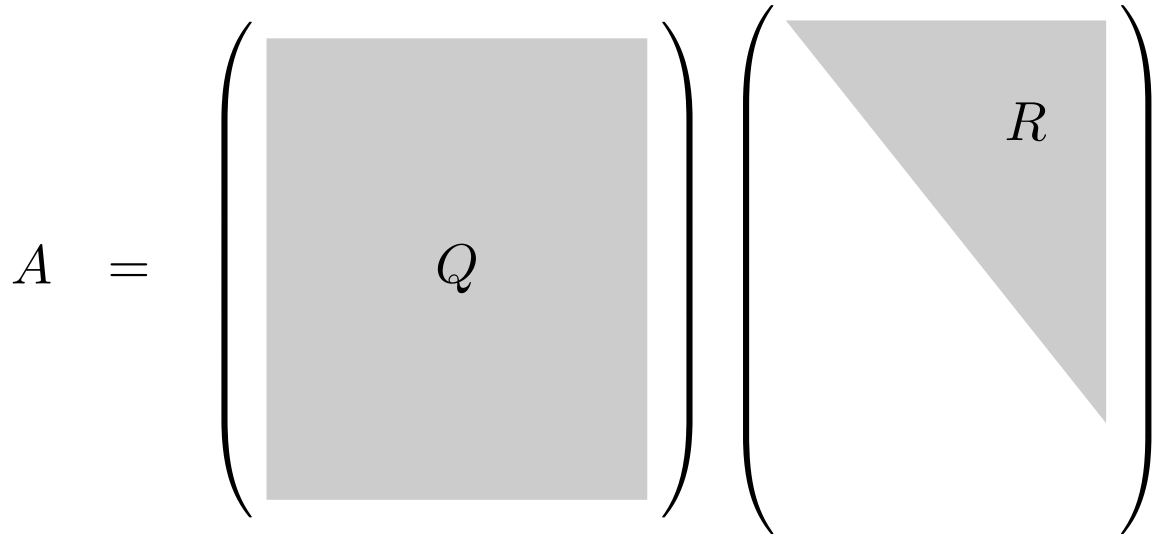
$$A = QR$$

- Une matrice orthogonale est facile à inverser (${}^tQ = Q^{-1}$).
  $\Rightarrow$*cela peut être utilisé pour la résolution d'équations linéaires : au lieu de résoudre $Ax = b$, on résout $Rx = {}^tQb$*
- Cela fonctionne pour les matrices rectangulaires
  $\Rightarrow$*résolution d'équations linéaires surdéterminés (avec plus d'équations que d'inconnues)*
- Les matrices orthogonales ont de bonnes propriétés :
  - le déterminant de A est égale à celui de R ;
  - multiplier par une matrice orthogonale ne change pas la norme (Problème des moindres carrés) ;
  - le conditionnement de A est égale à celui de R.
- Cette décomposition est aussi utilisée pour le calcul des valeurs propres d'une matrice (voir cours).
- ...

Polytech'Paris-UPMC

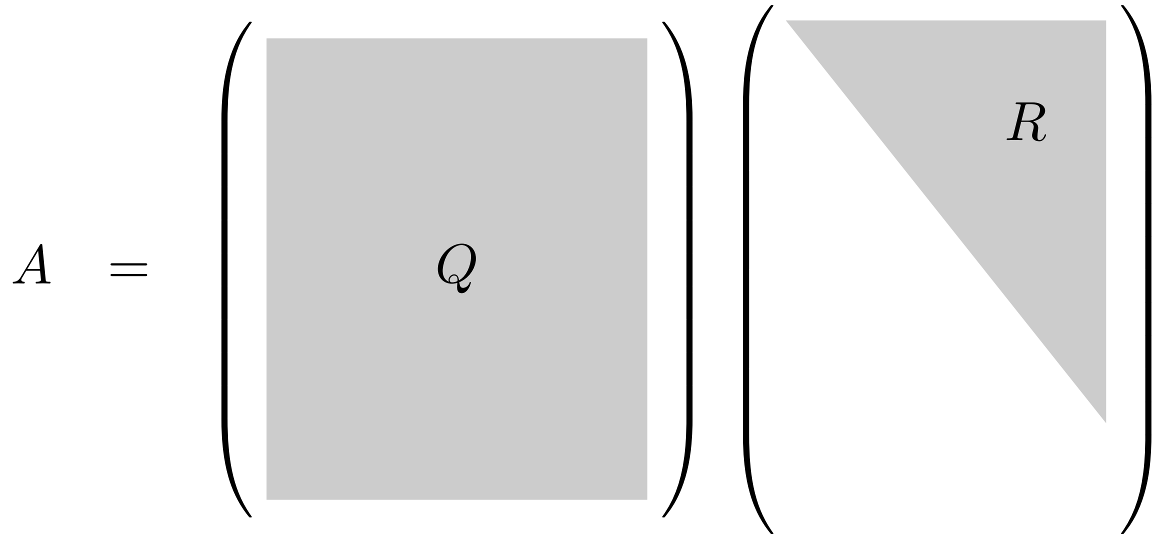
Le problème

On dispose d'une matrice A que l'on veut décomposer en Q orthogonale et R triangulaire supérieure :



Le problème

On dispose d'une matrice A que l'on veut décomposer en Q orthogonale et R triangulaire supérieure :



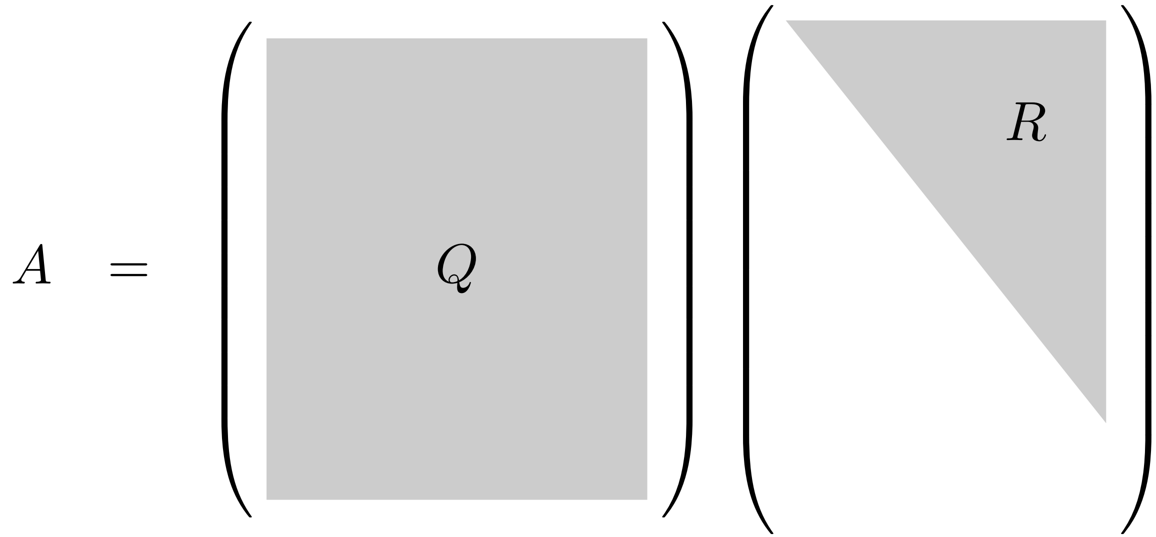
- Le problème est le même que de trouver H orthogonale telle que :

$$HA = R$$

car $Q = {}^{\mathrm{t}}H$

Le problème

On dispose d'une matrice A que l'on veut décomposer en Q orthogonale et R triangulaire supérieure :



- Le problème est le même que de trouver H orthogonale telle que :

$$HA = R$$

car $Q = {}^{\mathrm{t}}H$

- On procède par étapes comme pour le pivot de Gauss

Décomposition $\mathbf{QR}$

Étape de la décomposition

- On procède de la même façon que le pivot de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}.$$

Étape de la décomposition

- On procède de la même façon que le pivot de Gauss

$$H_1 A \quad = \quad \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & & a^2_{ij} \\ & & \end{pmatrix}.$$

Étape de la décomposition

- On procède de la même façon que le pivot de Gauss

$$H_2 H_1 A \quad = \quad \begin{pmatrix} & & \\ & & a_{ij}^3 \\ & & \end{pmatrix}.$$

Étape de la décomposition

- On procède de la même façon que le pivot de GAUSS

$$H_{n-1}\dots H_2 H_1 A \quad = \begin{pmatrix} & & r_{ij} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Étape de la décomposition

- On procède de la même façon que le pivot de Gauss

$$H_{n-1}\dots H_2H_1A = \begin{pmatrix} & & & \\ & & r_{ij} & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

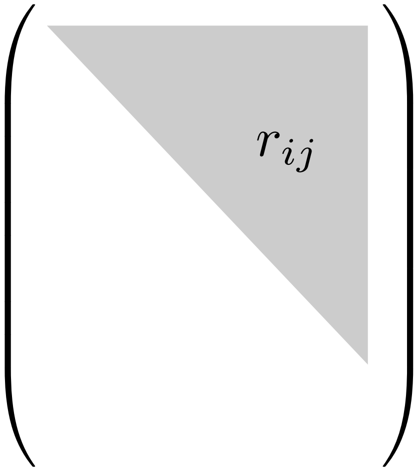
- Mais les matrices H_i sont des matrices orthogonales, donc $H_i^{-1} = {}^{t}H_i$

Polytech'Paris-UPMC

Étape de la décomposition

- On procède de la même façon que le pivot de GAUSS

$$H_{n-1}\dots H_2 H_1 A \quad = $$



.

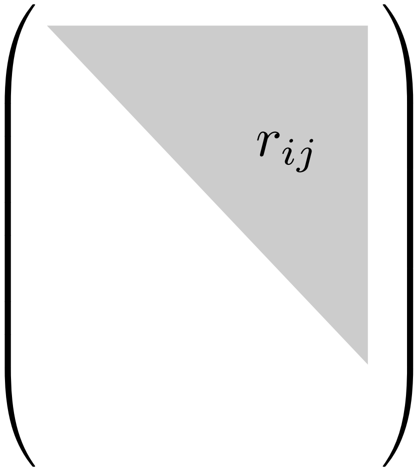
- Mais les matrices H_i sont des matrices orthogonales, donc $H_i^{-1} = {}^{\mathrm{t}}H_i$
- Alors :

$$H_{n-1}\dots H_1 A \quad = \quad R$$

Étape de la décomposition

- On procède de la même façon que le pivot de Gauss

$$H_{n-1} \dots H_2 H_1 A \quad =$$



.

- Mais les matrices H_i sont des matrices orthogonales, donc $H_i^{-1} = {}^{\mathsf{t}}H_i$
- Alors :

$$A \quad = \quad {}^{\mathsf{t}}(H_{n-1} \dots H_1) R$$

Étape de la décomposition

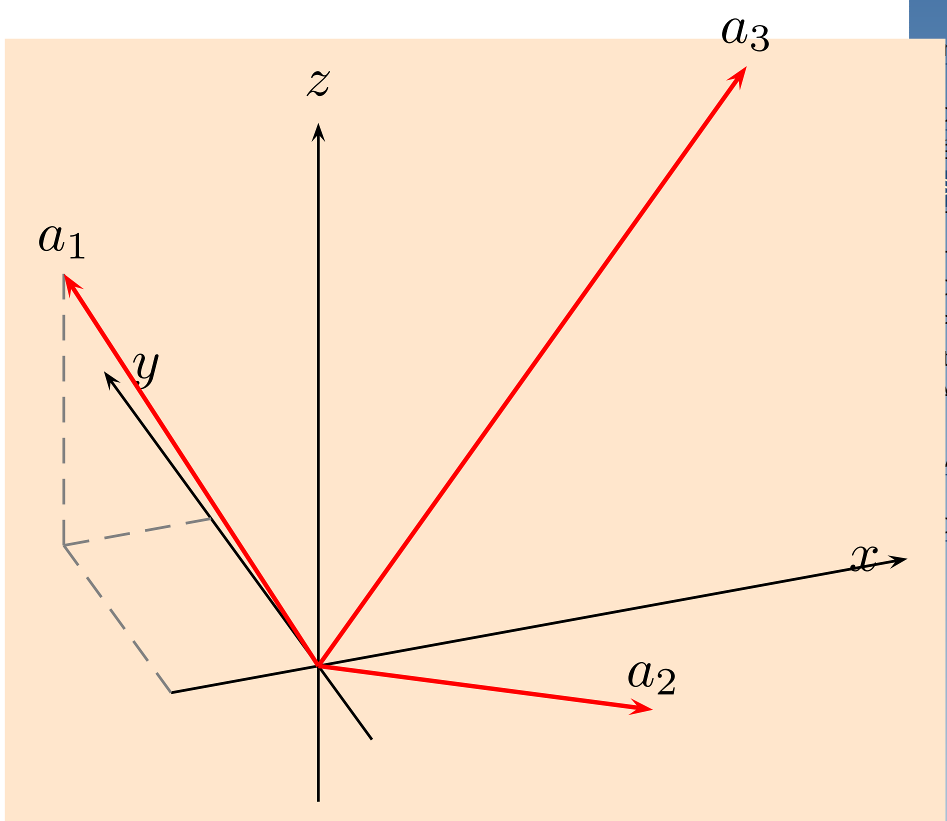
- On procède de la même façon que le pivot de GAUSS

$$H_{n-1} \dots H_2 H_1 A \quad = \quad \begin{pmatrix} & & r_{ij} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

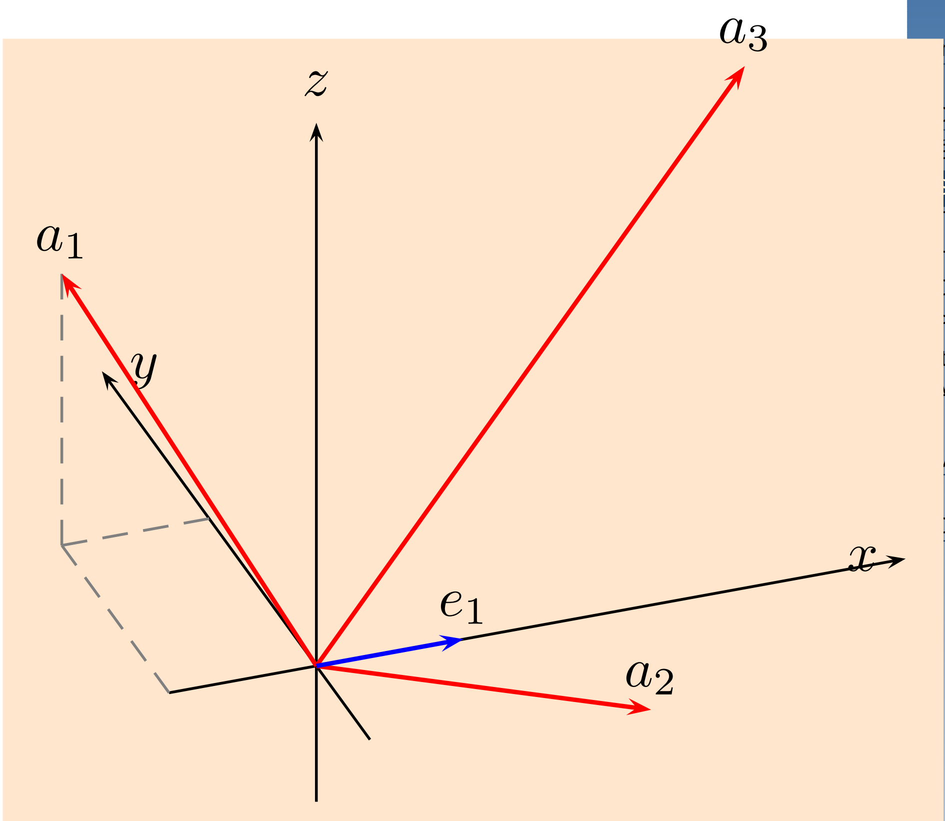
- Mais les matrices H_i sont des matrices orthogonales, donc $H_i^{-1} = {}^{\mathsf{t}}H_i$
- Alors :

$$\begin{aligned} A &= {}^{\mathsf{t}}(H_{n-1} \dots H_1) R \\ Q &= {}^{\mathsf{t}}H_1 {}^{\mathsf{t}}H_2 \dots {}^{\mathsf{t}}H_{n-1} \end{aligned}$$

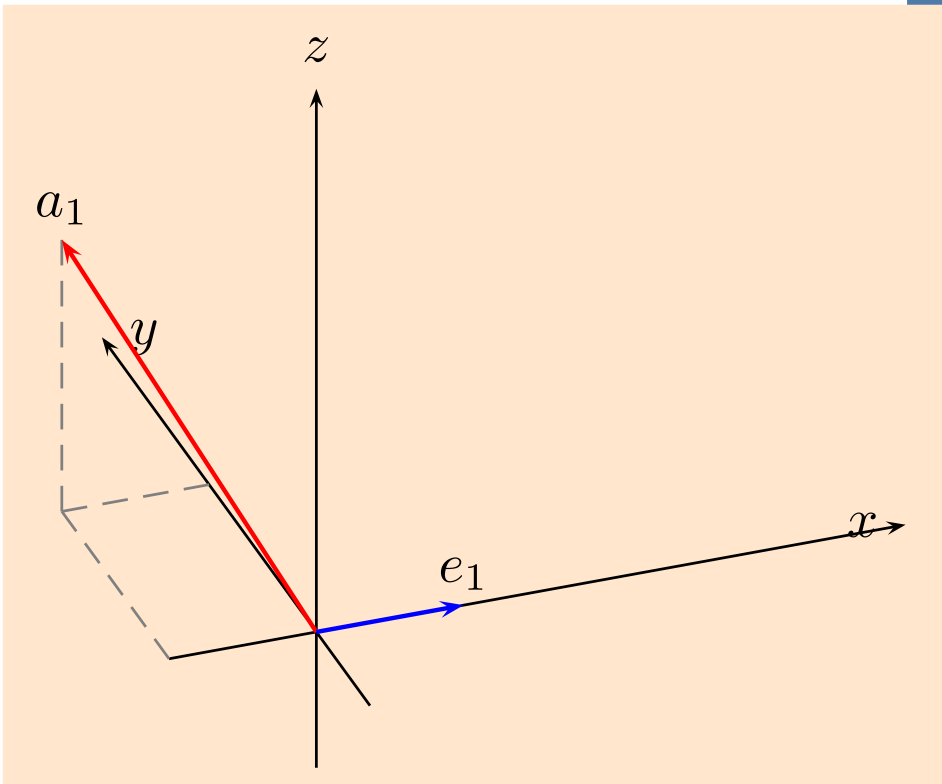
- Soit a_1, a_2,. . ., a_n les vecteurs formés par les colonnes de A.



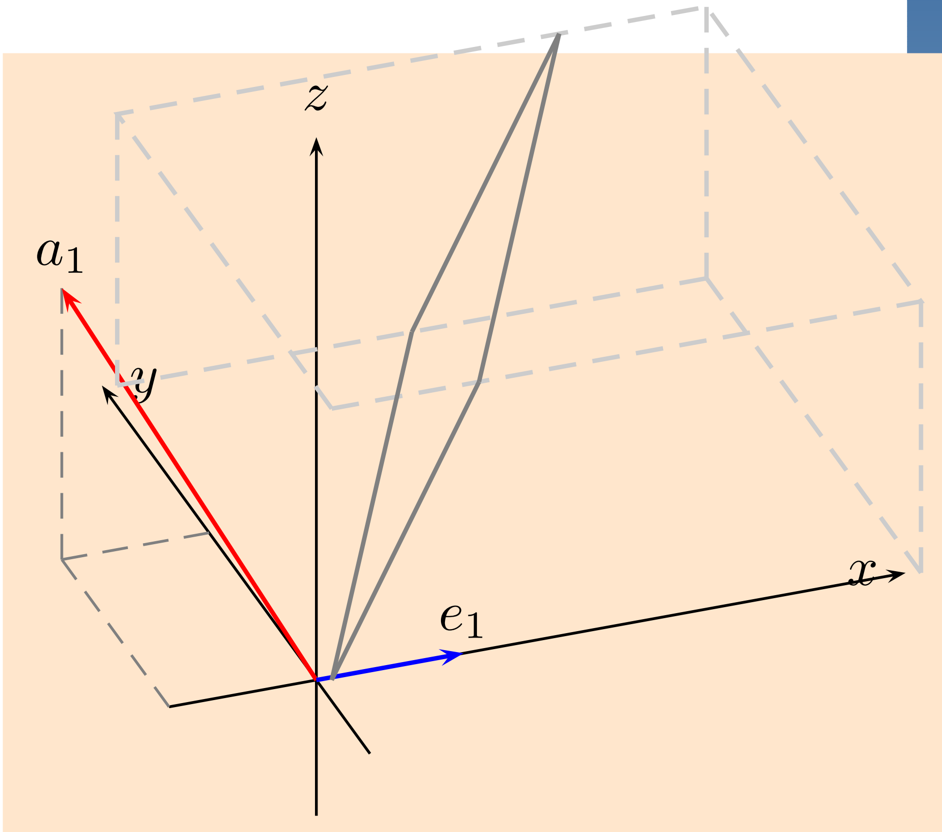
- Soit a_1, a_2,. . ., a_n les vecteurs formés par les colonnes de A.
- La matrice H_1 doit envoyer le vecteur a_1 sur le premier vecteur de la base canonique : e_1



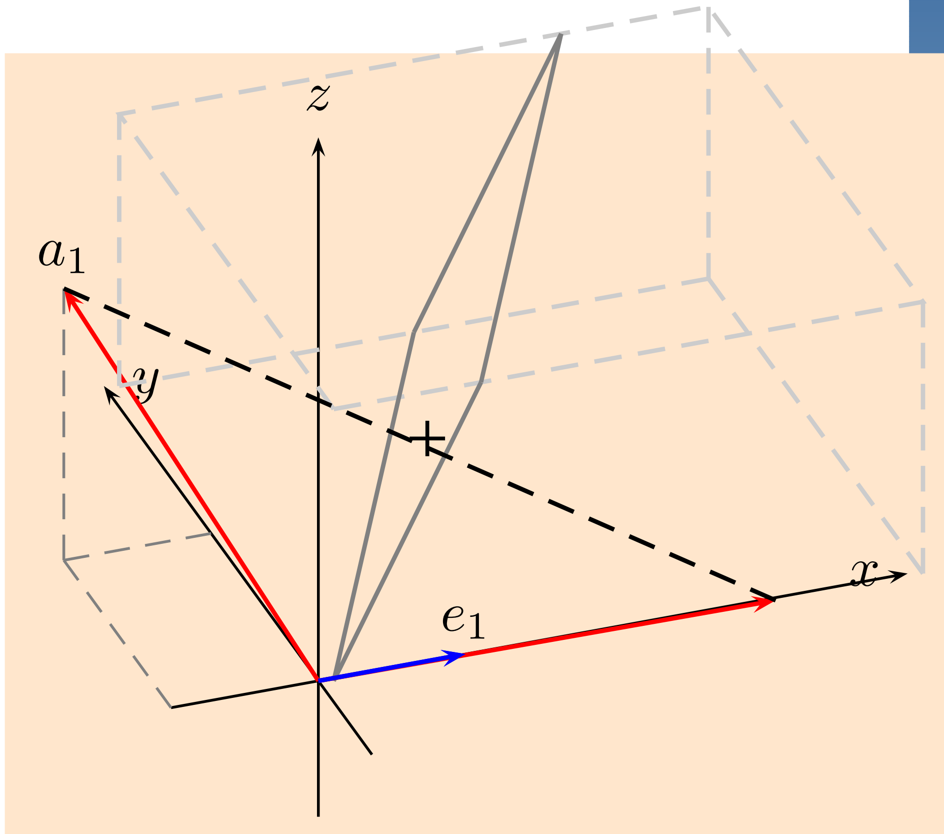
- Soit a_1, a_2,. . ., a_n les vecteurs formés par les colonnes de A.
- La matrice H_1 doit envoyer le vecteur a_1 sur le premier vecteur de la base canonique : e_1
- Pour cela on utilise la symétrie par le plan qui passe entre ces deux vecteurs.



- Soit a_1, a_2,. . ., a_n les vecteurs formés par les colonnes de A.
- La matrice H_1 doit envoyer le vecteur a_1 sur le premier vecteur de la base canonique : e_1
- Pour cela on utilise la symétrie par le plan qui passe entre ces deux vecteurs.



- Soit a_1, a_2,. . ., a_n les vecteurs formés par les colonnes de A.
- La matrice H_1 doit envoyer le vecteur a_1 sur le premier vecteur de la base canonique : e_1
- Pour cela on utilise la symétrie par le plan qui passe entre ces deux vecteurs.



Transformation de HOUSEHOLDER

A quoi ressemble une matrice de symétrie ?

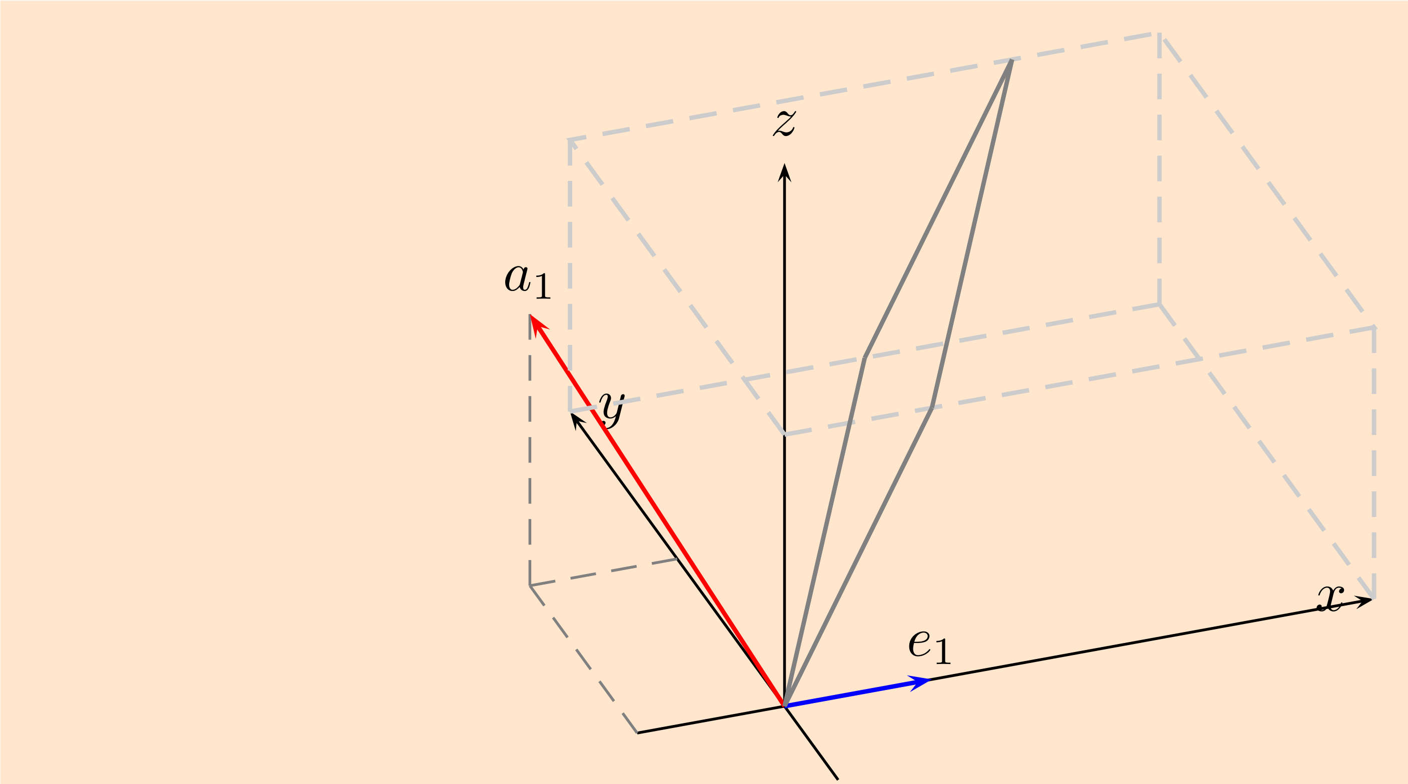
A quoi ressemble une matrice de symétrie ?

Définition (Matrice de HOUSEHOLDER) *On appelle* matrice de HOUSEHOLDER, *une matrice de la forme :*

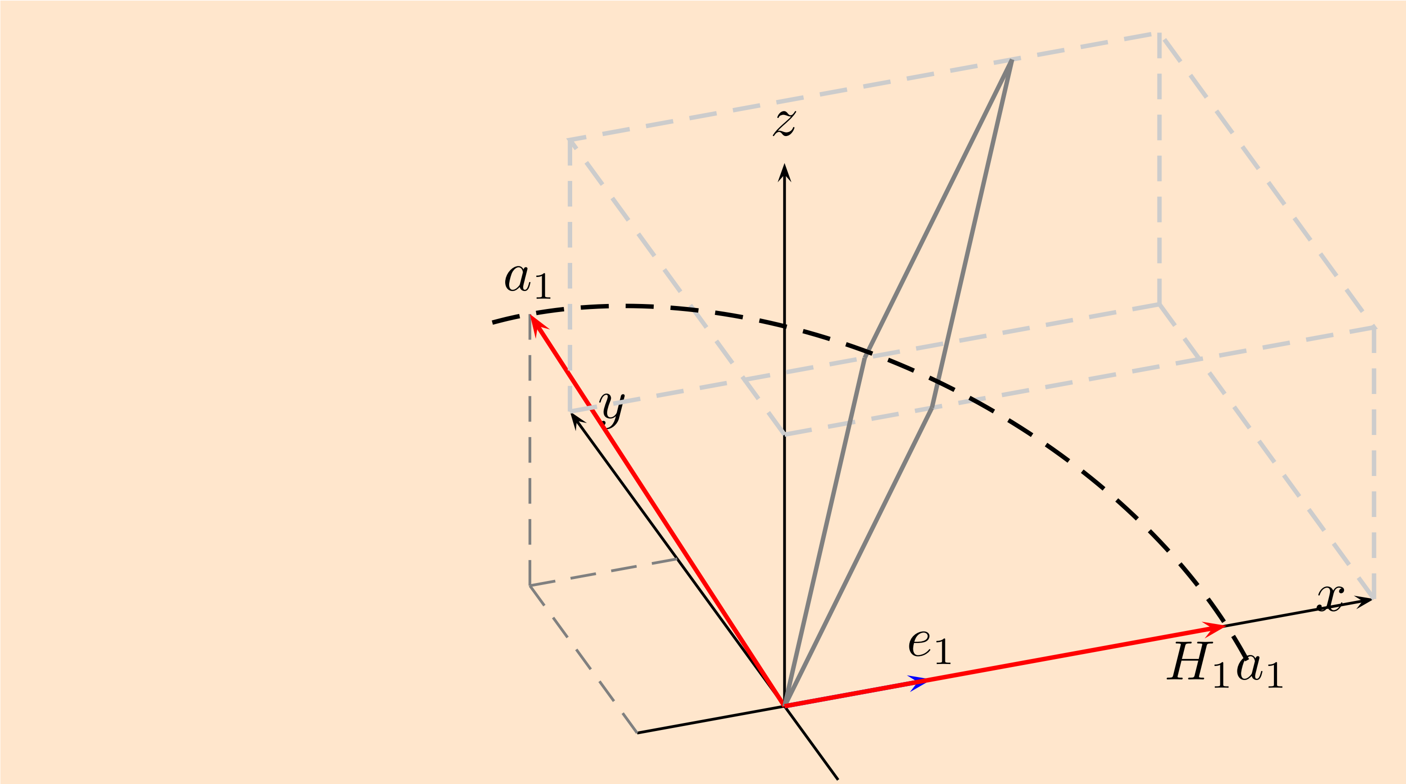
$$H \quad = \quad I - 2u^t u, \text{ où } u \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \|u\| = 1$$

Toute matrice de HOUSEHOLDER est symétrique et orthogonale.
La matrice de HOUSEHOLDER est la matrice de la symétrie par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à u.

Comment trouver u

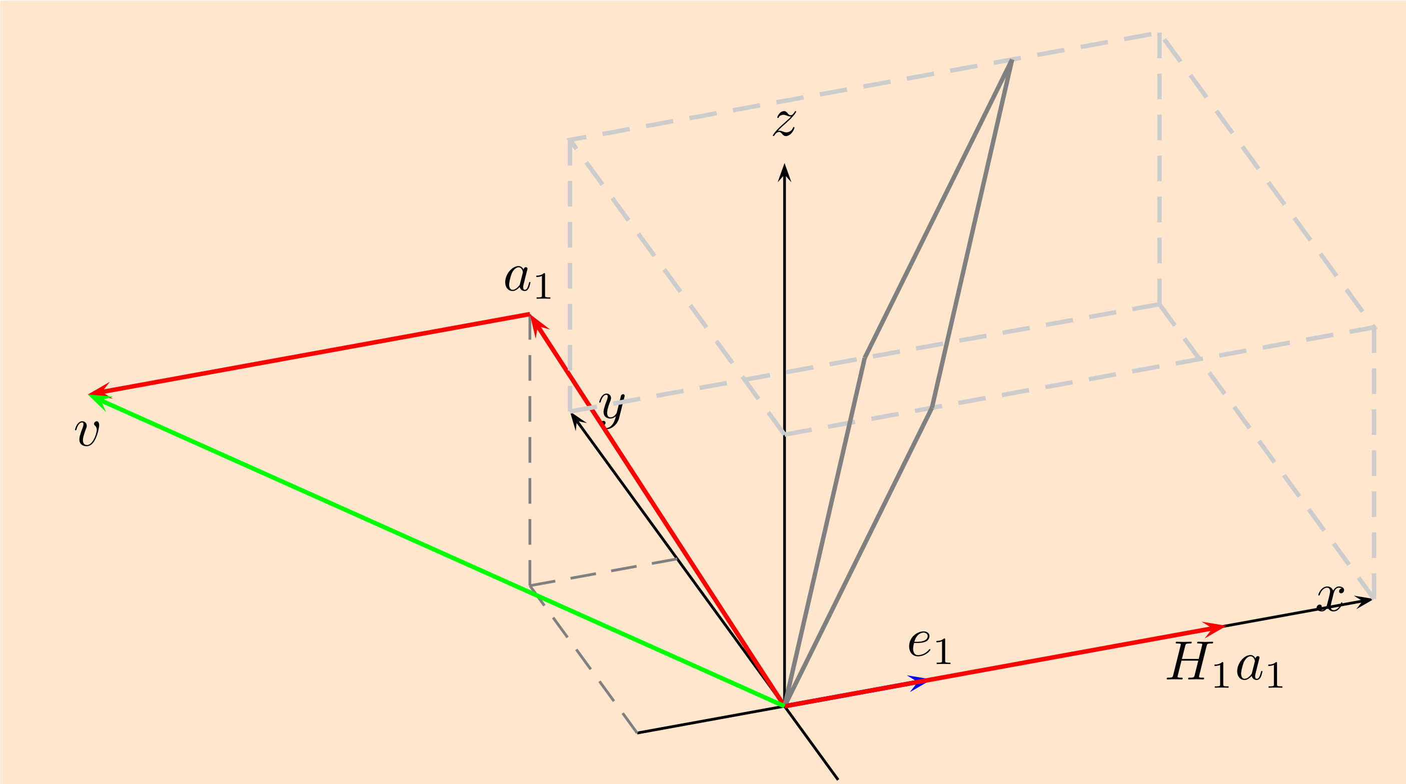


- La symétrie conserve la norme, donc



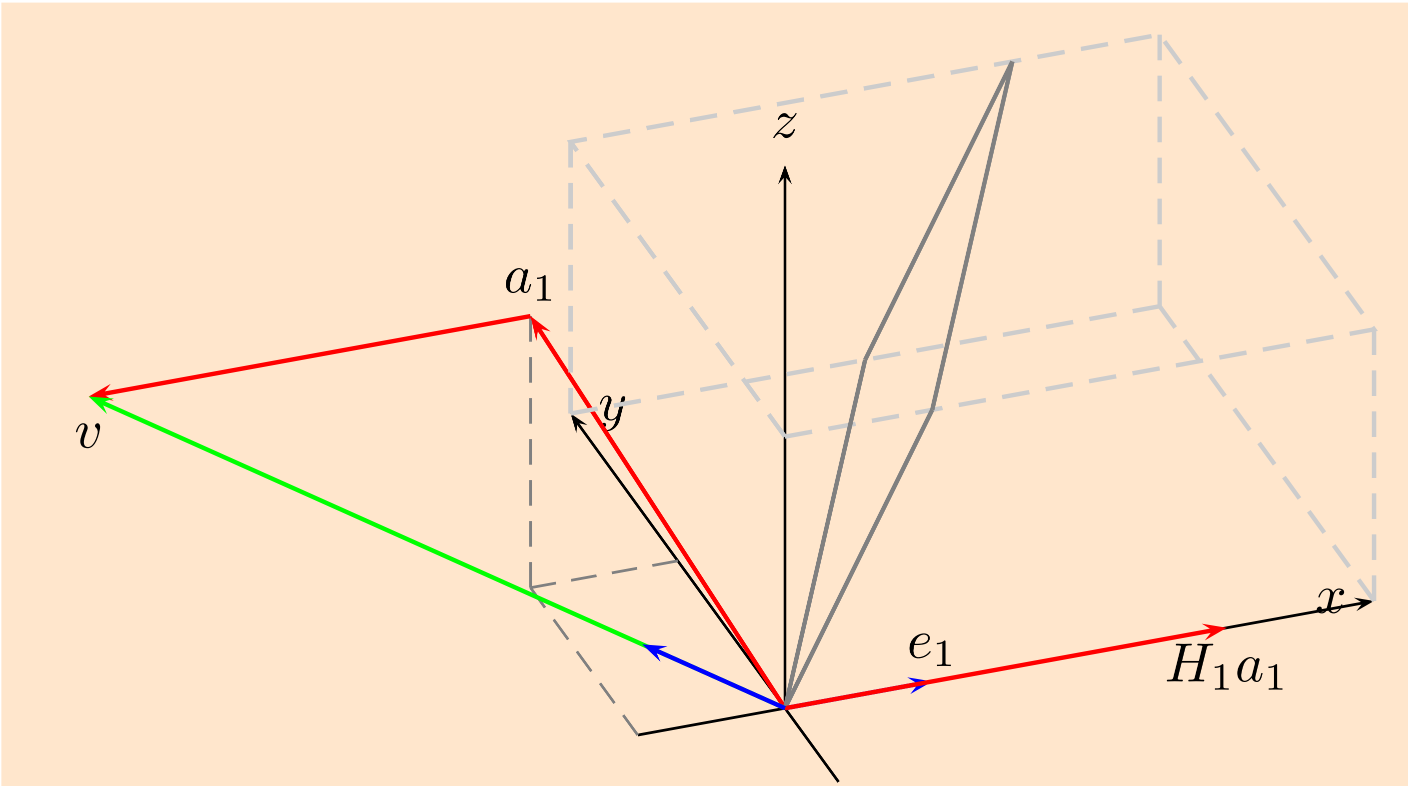
- La symétrie conserve la norme, donc $H_1(a_1) = \|a_1\| \, e_1$

Comment trouver u



- La symétrie conserve la norme, donc $H_1(a_1) = \|a_1\| \, e_1$
- Soit $\alpha = \|a_1\|$, et $v = a_1 - \alpha e_1$, v est perpendiculaire au plan de symétrie.

Comment trouver u



- La symétrie conserve la norme, donc $H_1(a_1) = \|a_1\|\, e_1$
- Soit $\alpha = \|a_1\|$, et $v = a_1 - \alpha e_1$, v est perpendiculaire au plan de symétrie.
- On peut choisir $u = \frac{1}{\|v\|} v$

Première itération

Pour une étape,

- On pose $\alpha = \|a_1\|$ et $v = a - \alpha e_1$
- $$\begin{aligned} \|v\|^2 &= {}^{t}(a - \alpha e_1)(a - \alpha e_1) \\ &= ({}^{t}a - \alpha\, {}^{t}e_1)(a - \alpha e_1) \\ &= {}^{t}a a - \alpha\, {}^{t}e_1 a - \alpha\, {}^{t}a e_1 + \alpha^2\, {}^{t}e_1 e_1 \\ &= 2\alpha^2 - 2\alpha\, {}^{t}a e_1 \end{aligned}$$
- En posant $\beta = \alpha^2 - \alpha\, {}^{t}a e_1 = \frac{\|v\|^2}{2}$

$$\begin{aligned} H_1 &= I - \frac{2}{\|v\|^2} v\, {}^{t}v \\ &= I - \frac{1}{\beta} v\, {}^{t}v \end{aligned}$$

Alors, on pose $A^2 = H_1 A$

Itérations suivantes

Pour continuer le processus,

- On considère la matrice réduite $\tilde{A}^2$ qui est obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de A^2.
- Alors, on peut appliquer le même processus pour trouver H_2 qui envoie la première colonne de $\tilde{A}^2$ sur e_2
- On recommence avec $\tilde{A}^2$, A^3 ... jusqu'à obtenir $R = A^n$.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\quad a_{ij} \quad} \end{pmatrix}.$$

Itérations suivantes

Pour continuer le processus,

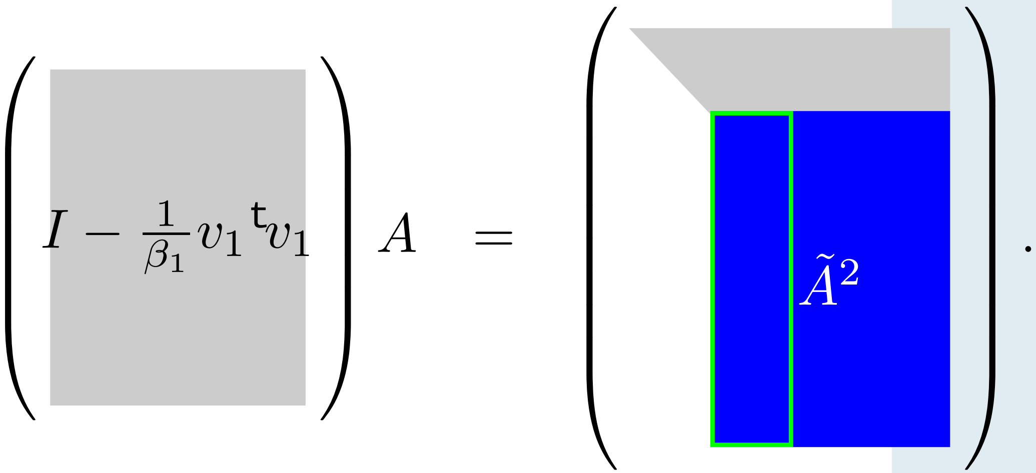
- On considère la matrice réduite $\tilde{A}^2$ qui est obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de A^2.
- Alors, on peut appliquer le même processus pour trouver H_2 qui envoie la première colonne de $\tilde{A}^2$ sur e_2
- On recommence avec $\tilde{A}^2$, A^3 ... jusqu'à obtenir $R = A^n$.

$$\left(I - \frac{1}{\beta_1} v_1 {}^{\mathsf{t}} v_1 \right) A \quad = \quad \left(\quad a_{ij}^2 \quad \right).$$

Itérations suivantes

Pour continuer le processus,

- On considère la matrice réduite $\tilde{A}^2$ qui est obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de A^2.
- Alors, on peut appliquer le même processus pour trouver H_2 qui envoie la première colonne de $\tilde{A}^2$ sur e_2
- On recommence avec $\tilde{A}^2$, A^3 ... jusqu'à obtenir $R = A^n$.



Itérations suivantes

Pour continuer le processus,

- On considère la matrice réduite $\tilde{A}^2$ qui est obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de A^2.
- Alors, on peut appliquer le même processus pour trouver H_2 qui envoie la première colonne de $\tilde{A}^2$ sur e_2
- On recommence avec $\tilde{A}^2$, A^3 ... jusqu'à obtenir $R = A^n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & h_2 \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \frac{1}{\beta_1} v_1 {}^t v_1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} & a_{ij}^3 \end{pmatrix}.$$

Itérations suivantes

Pour continuer le processus,

- On considère la matrice réduite $\tilde{A}^2$ qui est obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de A^2.
- Alors, on peut appliquer le même processus pour trouver H_2 qui envoie la première colonne de $\tilde{A}^2$ sur e_2
- On recommence avec $\tilde{A}^2$, A^3 ... jusqu'à obtenir $R = A^n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & h_{n-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & h_2 \\ 0 & \end{pmatrix} \left(I - \frac{1}{\beta_1} v_1 {}^{t}v_1 \right) A \quad = \begin{pmatrix} & r_{ij} \\ & \end{pmatrix}.$$

Algorithme

Données : A

début

$H \leftarrow I$

pour *k=1,. . ., n-1* **faire**

$$\alpha \leftarrow \sqrt{\sum_{i=k}^{m} A_{ik}^2}$$

$\beta \leftarrow \alpha^2 - \alpha A_{kk}$

// construction du vecteur v

$v_k \leftarrow A_{kk} - \alpha$

pour *i=k+1,. . ., m* **faire**

$v_i \leftarrow A_{ik}$

pour *j=k,. . ., n* **faire**

// Construction de A^{k+1}

$$c \leftarrow \frac{1}{\beta} \sum_{i=k}^{m} v_i A_{ij}$$

pour *i=k,. . ., m* **faire**

$A_{ij} \leftarrow A_{ij} - c v_i$

pour *j=1,. . ., m* **faire**

// Construction de $H = H_k \cdots H_2 H_1$

$$c \leftarrow \frac{1}{\beta} \sum_{i=k}^{m} v_i H_{ij}$$

pour *i=k,. . ., m* **faire**

$H_{ij} \leftarrow H_{ij} - c v_i$

$Q \leftarrow {}^{\mathrm{t}}H$

fin

retourner *Q, R = A*

Matrices semblables

Valeurs propres de matrices semblables

Définition *On dit que deux matrices A et $B \in \mathcal{M}_{nn}(R)$ sont semblables si $\exists P \in \mathcal{M}_{nn}(R)$ une matrice inversible telle que :*

$$B = P^{-1}AP$$

Valeurs propres de matrices semblables

Définition *On dit que deux matrices A et $B \in \mathcal{M}_{nn}(R)$ sont semblables si $\exists P \in \mathcal{M}_{nn}(R)$ une matrice inversible telle que :*

$$B = P^{-1}AP$$

Théorème *Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres*

Valeurs propres de matrices semblables

Définition *On dit que deux matrices A et $B \in \mathcal{M}_{nn}(R)$ sont semblables si $\exists P \in \mathcal{M}_{nn}(R)$ une matrice inversible telle que :*

$$B = P^{-1}AP$$

Théorème *Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres*

En effet,

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad A\overrightarrow{v} &= \lambda\overrightarrow{v} \\ BP^{-1}\overrightarrow{v} &= P^{-1}APP^{-1}\overrightarrow{v} \\ &= P^{-1}A\overrightarrow{v} \\ &= \lambda P^{-1}\overrightarrow{v} \end{aligned}$$

Valeurs propres de matrices semblables

Définition *On dit que deux matrices A et $B \in \mathcal{M}_{nn}(R)$ sont semblables si $\exists P \in \mathcal{M}_{nn}(R)$ une matrice inversible telle que :*

$$B = P^{-1}AP$$

Théorème *Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres*

En effet,

$$\begin{aligned}
\text{Si} \qquad A\overrightarrow{v} &= \lambda\overrightarrow{v} \\
BP^{-1}\overrightarrow{v} &= P^{-1}APP^{-1}\overrightarrow{v} \\
&= P^{-1}A\overrightarrow{v} \\
&= \lambda P^{-1}\overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$*Si on construit une suite de matrices semblables qui tend vers une matrice triangulaire on obtient toutes les valeurs propres*

Pour construire cette suite on utilise la décomposition QR.

- Si $A = QR$ avec Q matrice orthogonale et R matrice triangulaire, alors

$$
\begin{aligned}
A' &= RQ \text{ est semblable à } A \text{ car} \\
{}^{t}QAQ &= {}^{t}QQRQ \\
&= RQ \\
&= A'
\end{aligned}
$$

Pour construire cette suite on utilise la décomposition QR.

- Si $A = QR$ avec Q matrice orthogonale et R matrice triangulaire, alors

$$\begin{aligned} A' &= RQ \text{ est semblable à } A \text{ car} \\ {}^{t}QAQ &= {}^{t}QQRQ \\ &= RQ \\ &= A' \end{aligned}$$

- On peut donc construire la suite :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A_0 & = & A \\ Q_k, R_k & \text{tel que} & A_k = Q_k R_k \\ A_{k+1} & = & R_k Q_k \end{array} \right.$$

Pour construire cette suite on utilise la décomposition QR.

- Si $A = QR$ avec Q matrice orthogonale et R matrice triangulaire, alors

$$\begin{aligned} A' &= RQ \text{ est semblable à } A \text{ car} \\ {}^{t}QAQ &= {}^{t}QQRQ \\ &= RQ \\ &= A' \end{aligned}$$

- On peut donc construire la suite :

$$\begin{cases} A_0 & = & A \\ Q_k, R_k & \text{tel que} & A_k = Q_k R_k \\ A_{k+1} & = & R_k Q_k \end{cases}$$

- Cette suite tend vers une matrice triangulaire ayant les mêmes valeurs propres que A

Convergence

Théorème *Si A est une matrice inversible de valeurs propres réelles différentes, la suite de matrice A_k converge vers une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est constituée des valeurs propres de A*

Théorème *Si A est une matrice inversible de valeurs propres réelles différentes, la suite de matrice A_k converge vers une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est constituée des valeurs propres de A*

Idée de la démonstration

- Si A_∞ est triangulaire, ses valeurs propres sont sur sa diagonale (preuve par le polynôme caractéristique).

Convergence

Théorème *Si A est une matrice inversible de valeurs propres réelles différentes, la suite de matrice A_k converge vers une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est constituée des valeurs propres de A*

Idée de la démonstration

- Si A_∞ est triangulaire, ses valeurs propres sont sur sa diagonale (preuve par le polynôme caractéristique).
- La suite A_k est une suite de matrices semblables à A donc A_k a les mêmes valeurs propres que A et par continuité, A_∞ aussi.

Convergence

Théorème *Si A est une matrice inversible de valeurs propres réelles différentes, la suite de matrice A_k converge vers une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est constituée des valeurs propres de A*

Idée de la démonstration

- Si A_∞ est triangulaire, ses valeurs propres sont sur sa diagonale (preuve par le polynôme caractéristique).
- La suite A_k est une suite de matrices semblables à A donc A_k a les mêmes valeurs propres que A et par continuité, A_∞ aussi.
- On peut montrer par récurrence que

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= ({}^t Q_k \dots {}^t Q_1) A (Q_1 \dots Q_k) \\ \text{et} \quad A^k &= (Q_1 \dots Q_k)(R_k \dots R_1) \end{aligned}$$

Cette méthode revient à appliquer l'algorithme de la puissance simultanément sur l'espace $\mathbb{R}^n$, $E_{\lambda_n}^\perp$, $\left(E_{\lambda_n} \oplus E_{\lambda_{n-1}}\right)^\perp \dots$

- La convergence de la méthode QR est basée sur celle de la méthode de la puissance

Résumé

- La convergence de la méthode QR est basée sur celle de la méthode de la puissance
  - Cela fonctionne si la matrice de départ A a des valeurs propres de modules différents $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$.

Résumé

- La convergence de la méthode QR est basée sur celle de la méthode de la puissance
  - Cela fonctionne si la matrice de départ A a des valeurs propres de modules différents $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$.
  - La vitesse de convergence dépend du rapport entre deux valeurs propres successives $\frac{|\lambda_k|}{|\lambda_{k+1}|}$

Résumé

- La convergence de la méthode QR est basée sur celle de la méthode de la puissance
  - Cela fonctionne si la matrice de départ A a des valeurs propres de modules différents $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$.
  - La vitesse de convergence dépend du rapport entre deux valeurs propres successives $\frac{|\lambda_k|}{|\lambda_{k+1}|}$
  - Si deux valeurs propres ont des modules proches, il est possible de les obtenir dans le désordre.

- La convergence de la méthode QR est basée sur celle de la méthode de la puissance
  - Cela fonctionne si la matrice de départ A a des valeurs propres de modules différents $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$.
  - La vitesse de convergence dépend du rapport entre deux valeurs propres successives $\frac{|\lambda_k|}{|\lambda_{k+1}|}$
  - Si deux valeurs propres ont des modules proches, il est possible de les obtenir dans le désordre.
- Elle ne calcule pas directement les vecteurs propres

- La convergence de la méthode QR est basée sur celle de la méthode de la puissance
  - Cela fonctionne si la matrice de départ A a des valeurs propres de modules différents $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$.
  - La vitesse de convergence dépend du rapport entre deux valeurs propres successives $\frac{|\lambda_k|}{|\lambda_{k+1}|}$
  - Si deux valeurs propres ont des modules proches, il est possible de les obtenir dans le désordre.
- Elle ne calcule pas directement les vecteurs propres
- On peut la modifier pour calculer seulement les m premières valeurs propres $\Rightarrow$ *méthode d'itération du sous-espace*.

Résumé

- La convergence de la méthode QR est basée sur celle de la méthode de la puissance
  - Cela fonctionne si la matrice de départ A a des valeurs propres de modules différents $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$.
  - La vitesse de convergence dépend du rapport entre deux valeurs propres successives $\frac{|\lambda_k|}{|\lambda_{k+1}|}$
  - Si deux valeurs propres ont des modules proches, il est possible de les obtenir dans le désordre.
- Elle ne calcule pas directement les vecteurs propres
- On peut la modifier pour calculer seulement les m premières valeurs propres $\Rightarrow$ *méthode d'itération du sous-espace*.
- La convergence est lente mais peut être accélérée, en réduisant A en une matrice plus simple

Résumé

- La convergence de la méthode QR est basée sur celle de la méthode de la puissance
  - Cela fonctionne si la matrice de départ A a des valeurs propres de modules différents $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$.
  - La vitesse de convergence dépend du rapport entre deux valeurs propres successives $\frac{|\lambda_k|}{|\lambda_{k+1}|}$
  - Si deux valeurs propres ont des modules proches, il est possible de les obtenir dans le désordre.
- Elle ne calcule pas directement les vecteurs propres
- On peut la modifier pour calculer seulement les m premières valeurs propres $\Rightarrow$ *méthode d'itération du sous-espace*.
- La convergence est lente mais peut être accélérée, en réduisant A en une matrice plus simple
  - pour les matrices quelconques, forme de HESSENBERG (quasi triangulaire)

Résumé

- La convergence de la méthode QR est basée sur celle de la méthode de la puissance
  - Cela fonctionne si la matrice de départ A a des valeurs propres de modules différents $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$.
  - La vitesse de convergence dépend du rapport entre deux valeurs propres successives $\frac{|\lambda_k|}{|\lambda_{k+1}|}$
  - Si deux valeurs propres ont des modules proches, il est possible de les obtenir dans le désordre.
- Elle ne calcule pas directement les vecteurs propres
- On peut la modifier pour calculer seulement les m premières valeurs propres $\Rightarrow$ *méthode d'itération du sous-espace*.
- La convergence est lente mais peut être accélérée, en réduisant A en une matrice plus simple
  - pour les matrices quelconques, forme de HESSENBERG (quasi triangulaire)
  - pour les matrices symétriques, forme tri-diagonale.

Conclusion

- Utilisation des matrices de HOUSEHOLDER
  - \+ Calculs rapides.
  - \- Stabilité

  On peut aussi utiliser des matrices de rotations.
- La décomposition QR est très utilisée
  - Résolution de systèmes surdéterminés.
  - Calcul de valeurs propres.
  - Moindres carrés, χ^2.
- **Méthode QR**

Conclusion

- Utilisation des matrices de HOUSEHOLDER

  \+ Calculs rapides.

  \- Stabilité

  On peut aussi utiliser des matrices de rotations.

- La décomposition QR est très utilisée
  - Résolution de systèmes surdéterminés.
  - Calcul de valeurs propres.
  - Moindres carrés, χ^2.
- **Méthode QR**
  - Avantage :

Conclusion

- Utilisation des matrices de HOUSEHOLDER

  \+ Calculs rapides.

  \- Stabilité

  On peut aussi utiliser des matrices de rotations.

- La décomposition QR est très utilisée
  - Résolution de systèmes surdéterminés.
  - Calcul de valeurs propres.
  - Moindres carrés, χ^2.
- **Méthode QR**
  - Avantage :
    - calcul de toutes les valeurs propres.

- Utilisation des matrices de HOUSEHOLDER

  \+ Calculs rapides.

  \- Stabilité

  On peut aussi utiliser des matrices de rotations.

- La décomposition QR est très utilisée
  - Résolution de systèmes surdéterminés.
  - Calcul de valeurs propres.
  - Moindres carrés, χ^2.
- **Méthode QR**
  - Avantage :
    - calcul de toutes les valeurs propres.
  - Inconvénients :

Conclusion

- Utilisation des matrices de HOUSEHOLDER

  \+ Calculs rapides.

  \- Stabilité

  On peut aussi utiliser des matrices de rotations.

- La décomposition QR est très utilisée
  - Résolution de systèmes surdéterminés.
  - Calcul de valeurs propres.
  - Moindres carrés, χ^2.
- **Méthode QR**
  - Avantage :
    - calcul de toutes les valeurs propres.
  - Inconvénients :
    - convergence lente,

Conclusion

- Utilisation des matrices de HOUSEHOLDER

  \+ Calculs rapides.

  \- Stabilité

  On peut aussi utiliser des matrices de rotations.

- La décomposition QR est très utilisée
  - Résolution de systèmes surdéterminés.
  - Calcul de valeurs propres.
  - Moindres carrés, χ^2.
- **Méthode QR**
  - Avantage :
    - calcul de toutes les valeurs propres.
  - Inconvénients :
    - convergence lente,
    - chaque itération demande une décomposition QR.