

# Analyse Multiéchelles et Ondelettes

## Chapitre 3 : espaces d'échelles non linéaires

Dominique Béréziat

Master Informatique, spécialité IMA,  
Université Pierre et Marie Curie

15 janvier 2014

# Plan du chapitre

**Diffusion non linéaire**

**Diffusion anisotrope**

**Généralisation**

**Applications**

# Introduction

- ▶ Les représentations en espace d'échelles ont beaucoup de propriétés très intéressantes MAIS ...

# Introduction

- ▶ Les représentations en espace d'échelles ont beaucoup de propriétés très intéressantes MAIS ... leur capacité à sélectionner des échelles de représentation ont comme inconvénient d'éliminer des détails importants comme les contours.
- ▶ Pour certaines applications, cela peut poser problème :
  - ▶ La restauration/débruitage ...
  - ▶ La segmentation ...
  - ▶ La régularisation ...

# Introduction

- ▶ Les représentations en espace d'échelles ont beaucoup de propriétés très intéressantes MAIS ... leur capacité à sélectionner des échelles de représentation ont comme inconvénient d'éliminer des détails importants comme les contours.
- ▶ Pour certaines applications, cela peut poser problème :
  - ▶ La restauration/débruitage ...
  - ▶ La segmentation ...
  - ▶ La régularisation ...
- ▶ L'idée des espaces d'échelles non linéaires : trouver des représentations qui respectent le principe de causalité ET qui préservent les discontinuités de l'image (= ne lisse pas les contours).

# Introduction

- ▶ Autre façon de voir : le comportement dépend de l'image. Hors des zones de contours, on aura un comportement d'espace d'échelle linéaire (lissage). Sur les zones de contours, l'image est préservée.
- ▶ On a vu l'équivalence espace d'échelle linéaire  $\Leftrightarrow$  équation de diffusion linéaire.
- ▶ On s'intéresse donc aux procédés de diffusion non linéaires (i.e. l'EDP n'est plus linéaire en la fonction à résoudre) pour bâtir ces nouveaux espaces d'échelles.

## Diffusion non linéaire

Diffusion de Perona & Malik

Diffusion de Perona & Malik régularisée

Diffusion anisotropique

Généralisation

Applications

# Diffusion de Perona et Malik

- ▶ L'article [Perona and Malik, 1990] est le travail fondateur des espaces d'échelles non linéaire.
- ▶ "Space scale and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion".
- ▶ Le problème est posé sous les termes :
  - ▶ principe de causalité,
  - ▶ localisation immédiate des contours pour toutes échelles,
  - ▶ les zones hors contours sont lissées.
- ▶ Utilisation d'une diffusion dont les caractéristiques dépendent de la position spatiale, de l'orientation du gradient, ...
- ▶ Conséquence : l'EDP peut ne plus être linéaire.

# Diffusion non linéaire

- ▶ Soit l'EDP suivante :

$$\frac{\partial I}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div}(c(\mathbf{x}, t)\nabla I(\mathbf{x}, t)) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (1)$$

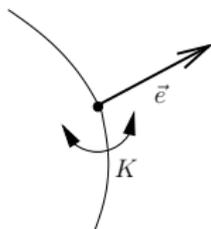
- ▶ On peut développer le terme de droite :

$$\frac{\partial I}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = c(\mathbf{x}, t)\nabla^2 I(\mathbf{x}, t) + \nabla c(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla I(\mathbf{x}, t)$$

- ▶ Et retrouver l'équation de la chaleur dans le cas particulier où  $c(\mathbf{x}, t) = c$  et donc  $\nabla c(\mathbf{x}, t) = 0$ .
- ▶ La diffusivité  $c$  conditionne le comportement de la diffusion :
  - ▶  $c \simeq 0$  : pas de diffusion, image préservée.
  - ▶  $c \simeq \text{constante}$  : diffusion linéaire (lissage).

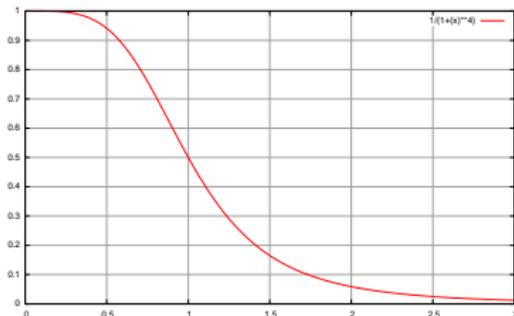
## Choix de la fonction de diffusibilité

- ▶ L'idée simple de Perona et Malik, c'est de choisir une fonction  $c$  telle que :
  - ▶  $c(\mathbf{x}, t) = 1$  dans les régions homogènes : lissage fort.
  - ▶  $c(\mathbf{x}, t) = 0$  dans les zones de contour : pas de lissage.
- ▶ Soit  $E(\mathbf{x}, t)$  une carte des contours à l'échelle  $t$ .
- ▶ 
$$E(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in \text{région} \\ K\vec{e}(\mathbf{x}, t) \end{cases}$$
  - ▶  $\vec{e}$  vecteur normal au contour,
  - ▶  $K$  terme de contraste marquant la différence de n.d.g. entre les régions adjacentes au contour.



## Choix de la fonction de diffusibilité

- ▶ Si  $E$  est calculable, on prendra typiquement  $c(\mathbf{x}, t) = g(\|E(\mathbf{x}, t)\|)$
- ▶ Il s'agit alors d'un terme isotropique : le comportement ne dépend pas de la direction du gradient.
- ▶  $E$  va dépendre de  $I$  : l'équation (1) n'est plus linéaire.
- ▶  $g$  est une fonction continue à décroissance rapide, typiquement :



- ▶ Choix de Perona & Malik pour la carte de contours :  
 $E(\mathbf{x}, t) = \nabla I(\mathbf{x}, t)$  (image filtrée à l'échelle  $t$ ).

## Choix pour $g$

- ▶ Les solutions de (1) vérifient le principe de causalité (c'est un résultat général qui concerne les EDP paraboliques, lire le papier de P&M pour la preuve).
- ▶ Renforcement des contours avec les échelles croissantes :
  - ▶ Calculons  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} I \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} I \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( c \frac{\partial}{\partial x} I \right)$
  - ▶ Prenons  $c = g(I_x)$  et notons  $\phi(I_x) = g(I_x)I_x$  avec  $I_x = \frac{\partial}{\partial x} I$ .  $\phi$  est appelé "flux".
  - ▶ On a :  $\frac{\partial}{\partial t} I_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(I_x) = \phi''(I_x)I_{xx} + \phi'(I_x)I_{xxx}$
  - ▶ Soit un contour tel que  $I_x > 0$  : alors on a  $I_{xx} = 0$  et  $I_{xxx} < 0$ .
  - ▶ Donc, au point de contour, on a  $\frac{\partial}{\partial t} I_x = \phi'(I_x)I_{xxx}$ .
  - ▶ Selon le comportement de  $\phi'$ , nous avons :
    - ▶  $\phi'(I_x) > 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} I_x < 0$  : la pente diminue avec l'échelle, on a une atténuation des contours.
    - ▶  $\phi'(I_x) < 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} I_x > 0$  : la pente augmente avec l'échelle.
  - ▶ La pente augmente mais pas en-deçà d'un seuil (sinon on viole le principe de causalité) : les contours sont mieux localisés.

# Choix pour $g$

## Suite

- ▶ Le comportement de  $\phi'$  guide notre choix de  $g$  pour obtenir un renforcement des contours ( $\phi(x) = xg(x)$ ).



**Figure:** Fonction de flux

- ▶ Un choix pour  $\phi$  qui renforce les contours : décroissance de  $\phi$  au-delà d'un seuil  $K$ .
  - ▶ si  $|I_x| > K \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} I_x > 0$  : renforcement des contours,
  - ▶ si  $|I_x| < K$  : diminution des contours.

# Choix pour $g$

## Suite

- ▶ Conductivité de Tukey :

$$g(x) = e^{-\left(\frac{x}{K}\right)^2}$$

- ▶ Conductivité de Lorentz :

$$g(x) = \frac{c}{1 + \left(\frac{x}{K}\right)^{1+\alpha}} \quad \alpha > 0$$

- ▶ Fonction proche de 1 au voisinage de 0 et à décroissance rapide. Point d'inflexion en  $x = K$ .
- ▶ Ainsi  $\phi(x) = xg(x) \sim x$  au voisinage de 0 puis décroît au-delà de  $K$ .
- ▶ D'autres choix sont possibles.

## Discretisation de l'EDP

- ▶ On note  $u(x_0 + i, y_0 + j, k\Delta t) = u_{i,j}^k$ , idem pour  $g$  soit un pas de discrétisation en espace de 1 : cela correspond aux pixels de l'image.
- ▶  $\frac{\partial}{\partial t} u \simeq \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t}$
- ▶  $\operatorname{div}(g\nabla u) = \nabla g \cdot \nabla u + g\nabla^2 u$
- ▶  $\nabla g$  et  $\nabla u$  sont discrétisés par différences avant.
- ▶  $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$  est discrétisé par point central .
- ▶  $g(x, y, t) = g(\|\nabla I(x, y, t)\|)$  :  $g$  est réévaluée à chaque itération de  $k$ .

# Discrétisation

## Suite

- Le terme de droite est donc :

$$\begin{aligned} & g_{i,j}^k(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k - 4u_{i,j}^k) \\ & + (g_{i+1,j}^k - g_{i,j}^k)(u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k) + (g_{i,j+1}^k - g_{i,j}^k)(u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k) \\ & = g_{i,j}^k(u_{i-1,j}^k - u_{i,j}^k) + g_{i,j}^k(u_{i,j-1}^k - u_{i,j}^k) \\ & g_{i+1,j}^k(u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k) + g_{i,j+1}^k(u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k) \end{aligned}$$

- Le schéma numérique est donc (notations de P&M) :

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \Delta t [C_N \cdot \nabla_N u + C_S \cdot \nabla_S u + C_E \cdot \nabla_E u + C_W \cdot \nabla_W u]_{i,j}^k$$

- avec :

$$\begin{aligned} [\nabla_N u]_{i,j}^k &= u_{i-1,j}^k - u_{i,j}^k & [\nabla_E u]_{i,j}^k &= u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k \\ [\nabla_S u]_{i,j}^k &= u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k & [\nabla_W u]_{i,j}^k &= u_{i,j-1}^k - u_{i,j}^k \\ [C_N]_{i,j}^k &= g_{i,j}^k & [C_E]_{i,j}^k &= g_{i,j+1}^k & [C_S]_{i,j}^k &= g_{i+1,j}^k & [C_W]_{i,j}^k &= g_{i,j}^k \end{aligned}$$

## Grille duale & simplification

- ▶ La fonction  $g$  dépend des contours (passage par zéro du laplacien) : on peut localiser les contours sur la grille *duale* (entre deux pixels adjacents).
- ▶ On utilise donc plutôt (par interpolation linéaire) :

$$\begin{aligned} C_N &= g(\|\nabla u_{i+\frac{1}{2},j}^k\|) & C_E &= g(\|\nabla u_{i,j+\frac{1}{2}}^k\|) \\ C_S &= g(\|\nabla u_{i-\frac{1}{2},j}^k\|) & C_W &= g(\|\nabla u_{i,j-\frac{1}{2}}^k\|) \end{aligned}$$

- ▶ P&M simplifient en utilisant :

$$C_N = g(\|\nabla_N u_{i,j}^k\|) \quad C_S = g(\|\nabla_S u_{i,j}^k\|)$$

etc ...

- ▶ Cette discrétisation est différente. Toutefois, les auteurs montrent que le principe de causalité reste respecté.

# Résultat



**Figure:** Image originale (cameraman).

## Résultats (conductivité de Lorentz)



**Figure:** 10 itérations,  $K = 20$ .

# Résultats



**Figure:** 30 itérations,  $K = 20$ .

# Résultats



**Figure:** 100 itérations,  $K = 20$ .

## Importance du paramètre $K$



**Figure:** 100 itérations,  $K = 10$ .

## Importance du paramètre $K$



**Figure:** 100 itérations,  $K = 5$ .

## Importance du paramètre $K$



**Figure:** 100 itérations,  $K = 30$ .

## Instabilité du schéma



**Figure:** 100 itérations,  $K = 20$ ,  $\Delta t = 0.5$ .

## Instabilité du schéma



**Figure:** 10 itérations,  $K = 20$ ,  $\Delta t = 4$ .

# Conclusion

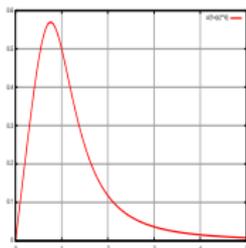
- ▶ Le schéma discret de P&M n'est pas stable pour certains jeux de paramètres (discrétisation temporelle).

# Diffusion régularisée de Perona & Malik

- Soit l'EDP suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div} (g(\|\nabla_{\sigma} u\|^2) \nabla u) \quad x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \quad x \in \Omega\end{aligned}\quad (2)$$

- On note  $\nabla_{\sigma} u = \nabla (G_{\sigma} \star u)$ ,  $G_{\sigma}$  noyau gaussien de variance  $\sigma^2$  : c'est une dérivée "lissée" de  $u$  et fait office de détecteur de contours "multi-échelle".
- Choix de  $g$ , tel que  $s \mapsto sg(s^2)$  :



- est décroissant pour  $|s| > \lambda$
- croissant sinon

## Schéma stabilisé

- ▶ Exemple de fonction  $g : g_\lambda(s) = 1 - e^{-\frac{c}{(s/\lambda)^2}} \mathbb{1}_{s>0}$  pour le débruitage.
- ▶ La décroissance de  $s \mapsto sg(s^2)$  est requise pour la convergence.

### **Théorème 1 ([Catté et al., 1992])**

*L'équation (2) possède une solution continue unique.*

### **Théorème 2 ([Catté et al., 1992])**

*Le schéma itératif suivant :*

$$u^{n+1}(\mathbf{x}) = u^n(\mathbf{x}) + \Delta t \operatorname{div} (g(\|\nabla_\sigma u^n(\mathbf{x})\|) \nabla u^{n+1}(\mathbf{x}))$$

*converge vers la solution de (2).*

- ▶ On consultera [Catté et al., 1992] pour la preuve (beaucoup de maths).
- ▶ En complément : [Kačur and Mikula, 1995].

## Discrétisation

- ▶ L'espace et le temps sont discrétisés sur la grille  $(ih, jh, n\Delta t)$ .
- ▶ On note  $u_{i,j}^n = u(ih, jh, \Delta tn)$  et  $\alpha_{i,j}^n = g(\|\nabla_\sigma u_{i,j}^n\|^2)$
- ▶ Discrétisation de  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_{i,j}^n \frac{\partial}{\partial x} u^{n+1} \right)$  :

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \alpha_{i,j}^n \frac{\partial}{\partial x} u^{n+1}}_A + \underbrace{\alpha_{i,j}^n \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^{n+1}}_B \\ A &= \frac{\alpha_{i+1,j}^n - \alpha_{i-1,j}^n}{2h} \frac{\partial}{\partial x} u_{i,j}^{n+1} \\ &= \frac{1}{2h} \left[ \alpha_{i+1,j}^n \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial x} - \alpha_{i-1,j}^n \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial x} \right] \\ &= \frac{1}{2h} \left[ \alpha_{i+1,j}^n \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h} - \alpha_{i-1,j}^n \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{h} \right] \end{aligned}$$

## Discrétisation (suite)

$$\begin{aligned} B &= \alpha_{i,j}^n \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2h} (u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}) \right] \\ &= \frac{\alpha_{i,j}^n}{2h} \left[ \frac{\partial}{\partial x} u_{i+1,j}^{n+1} - \frac{\partial}{\partial x} u_{i-1,j}^{n+1} \right] \\ &= \frac{\alpha_{i,j}^n}{2h} \left[ u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1} - (u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}) \right] \\ &= \frac{\alpha_{i,j}^n}{2h} \left[ u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{2h^2} \left[ (\alpha_{i+1,j}^n + \alpha_{i,j}^n) u_{i+1,j}^{n+1} - \right. \\ &\quad \left. (\alpha_{i+1,j}^n + 2\alpha_{i,j}^n + \alpha_{i-1,j}^n) u_{i,j}^{n+1} + (\alpha_{i-1,j}^n + \alpha_{i,j}^n) u_{i-1,j}^{n+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{2h^2} \left[ (\alpha_{i+1,j}^n + \alpha_{i,j}^n) (u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}) + \right. \\ &\quad \left. (\alpha_{i-1,j}^n + \alpha_{i,j}^n) (u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}) \right] \end{aligned}$$

## Discrétisation (suite)

- ▶ On fait le même calcul pour  $\frac{\partial}{\partial y}$  ...
- ▶ Le schéma itératif est donc :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2h^2} \sum_{\substack{k \in \{-1,1\} \\ l \in \{-1,1\}}} (\alpha_{i-k,j-l}^n + \alpha_{i,j}^n) (u_{i-k,j-l}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1})$$

- ▶ Matriciellement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (U^{n+1} - U^n) &= A(h, U^n) U^{n+1} \\ (Id + \Delta t A) U^{n+1} &= U^n \end{aligned}$$

- ▶ On doit donc inverser  $(Id + \Delta t A)$  à chaque itération car  $A$  dépend de  $U^n$ .

## Diffusion non linéaire

### **Diffusion anisotropique**

Principes physique de la diffusion

Tenseur de diffusion

Diffusion “Edge Enhancing”

Diffusion “Coherence Enhancing”

## Généralisation

## Applications

# Diffusion anisotropique

- ▶ Jusqu'à présent, on a vu la diffusion isotropique (linéaire ou non linéaire) : la matière/l'énergie se diffuse uniformément dans toutes les directions de l'espace.
- ▶ On souhaite maintenant privilégier la diffusion dans certaines directions qui dépendra, typiquement, des structures rencontrées dans l'image (diffusion non isotropique).

# Principes physique de la diffusion

- ▶ C'est le même principe physique qui gouverne la diffusion de la chaleur (transport de l'énergie) et la diffusion d'espèces chimiques (transport de matière).
- ▶ Ce principe a été formulé empiriquement au XIX-ième siècle (Fourier et d'autres).
- ▶ Il a été prouvé au XX-ième siècle (Einstein et d'autres).
- ▶ Principe : les particules dans les zones à forte concentration migrent vers les zones à faible concentration.

# Principes physique

suite

## Théorème 3 (Première loi de Fick)

*La direction du transport de la matière, appelé flux, est donnée par*

$$j = -D\nabla u \quad (3)$$

- ▶  *$U$  est une température ou une concentration d'espèce chimique.*
- ▶  *$D$  est un tenseur (c.a.d. une matrice de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  symétrique et définie positive).*

Cette loi signifie que le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration.

# Principes physique

suite

## Théorème 4 (Seconde loi de Fick)

*La variation d'espèce chimique est égale au bilan des flux entrant et sortant (en supposant qu'il n'y a pas d'adjonction de matière).*

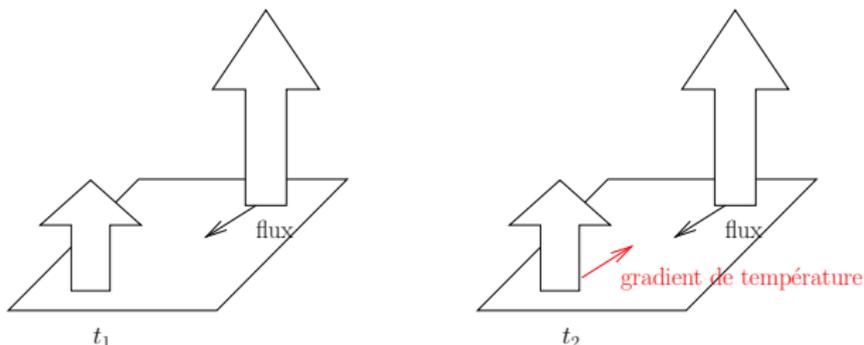
*C'est-à-dire :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(j) \quad (4)$$

- ▶ Finalement, on a  $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D\nabla u)$
- ▶ Rappel sur l'opérateur divergence :
  - ▶ Si  $j : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$   $\operatorname{div} j = \nabla \cdot j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial j_i}{\partial x_i}$ ,
  - ▶ Si  $j : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$   $\operatorname{div} j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial j}{\partial x_i}$ .

# Principes physique

suite



- ▶ Cette formulation est bien une généralisation du cas isotropique.
- ▶ Si  $D = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  alors  $D\nabla u = c\nabla u$
- ▶ et  $\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(c\nabla u) = c \text{div} \nabla u$
- ▶ Il est facile de vérifier que  $\text{div} \nabla = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ .
- ▶ Finalement  $\frac{\partial u}{\partial t} = c\nabla^2 u$

# Formulation

- ▶ Autre écriture :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla \cdot (D \nabla u) \\ &= \left( \nabla^T D \nabla \right) u\end{aligned}$$

- ▶ L'opérateur  $\nabla^T D \nabla$  est bien du type Laplacien ( $\nabla^T \nabla$ ) : c'est un laplacien "orienté" selon  $D$ .

## Le tenseur de diffusion (dans $\mathbb{R}^2$ )

- $D$  est une matrice symétrique définie positive, ce qui veut dire que l'on a :

$$D = R^T \Lambda R \quad \text{avec} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- $R$  est une matrice orthogonale de changement de base : base canonique vers la base formée des vecteurs propres  $(v_1, v_2)$  de  $D$ .
- Autre façon de voir :  $R$  est la rotation qui envoie le vecteur propre  $\vec{v}_1$  (associé à  $\lambda_1$ ) vers  $\vec{i}$  et  $\vec{v}_2$  vers  $\vec{j}$

## Action de $D$

- ▶ Écrivons la transformation de  $\vec{v}_1$  au travers de  $D$  :

$$\begin{aligned} D\vec{v}_1 &= R^T \Lambda R \vec{v}_1 = R^T \Lambda \vec{i} \\ &= R^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 R^T \vec{i} \\ &= \lambda_1 \vec{v}_1 \end{aligned}$$

car  $R^T$  est l'application réciproque de  $R$ .

- ▶ On a de même :  $D\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$ 
  - ▶ Les vecteurs orientés selon  $\vec{v}_1$  subissent le facteur d'échelle  $\lambda_1$
  - ▶ Les vecteurs orientés selon  $\vec{v}_2$  subissent le facteur d'échelle  $\lambda_2$
- ▶ Un vecteur quelconque  $\vec{u}$  s'écrit :  $\vec{u} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$  et donc  $D\vec{u} = \lambda_1 c_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 c_2 \vec{v}_2$

## Première idée de valeur effective pour $D$

- ▶ Prendre comme matrice  $R$  :

$$R = \frac{1}{\|\nabla u\|} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire une rotation d'angle l'orientation de  $\nabla u$

- ▶ On agit sur les vecteurs alignés avec  $\nabla u$  :

$$D\nabla u = R^T \Lambda R \nabla u = R^T \Lambda \vec{i} = \lambda_1 \nabla u$$

et donc  $\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_1 \nabla^2 u$

- ▶ On retombe évidemment sur la diffusion isotropique.

# Première valeur pour $D$

suite

- ▶ Autre façon de voir (en développant  $D$ ) :

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{\|\nabla u\|^2} \begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\nabla u\|^2} \begin{pmatrix} \lambda_1(u_x)^2 + \lambda_2(u_y)^2 & (\lambda_1 - \lambda_2)u_x u_y \\ (\lambda_1 - \lambda_2)u_x u_y & \lambda_2(u_x)^2 + \lambda_1(u_y)^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|\nabla u\|^2} \left( \lambda_1 \begin{pmatrix} u_x^2 & u_x u_y \\ u_x u_y & u_y^2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} u_y^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & u_x^2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\|\nabla u\|^2} \left( \lambda_1 \underbrace{\nabla u \nabla u^T}_{\text{orientation selon } \nabla u} + \lambda_2 \underbrace{\nabla^\perp u \nabla^\perp u^T}_{\dots \text{ selon } \nabla^\perp u} \right) \end{aligned}$$

- ▶ avec  $\nabla^\perp I = (-I_y \ I_x)^T$ . Mais évidemment ce tenseur appliqué à  $\nabla u$  est nul :  $\nabla^\perp u^T \nabla u = 0$ .
- ▶ Conclusion : il ne faut pas orienter sur  $\nabla u$ .

## Diffusion “Edge Enhancing” [Weickert, 1998]

- Au lieu de considérer  $\nabla u$ , utilisons  $\nabla_\sigma u$  (gradient de  $u$  à l'échelle  $\sigma > 0$ ) : ainsi  $\nabla_\sigma^\perp u^T \nabla u \neq 0$

$$D_\sigma = R_\sigma^T \Lambda R_\sigma$$
$$R_\sigma = \frac{1}{\|\nabla_\sigma u\|} \begin{pmatrix} u_x^\sigma & u_y^\sigma \\ -u_y^\sigma & u_x^\sigma \end{pmatrix}$$

avec  $u^\sigma = u \star \frac{\partial G_\sigma}{\partial t}$

- Calculons maintenant  $D_\sigma \nabla u$  :

$$D_\sigma = \frac{1}{\|\nabla_\sigma u\|^2} \begin{pmatrix} \lambda_1 (u_x^\sigma)^2 + \lambda_2 (u_y^\sigma)^2 & (\lambda_1 - \lambda_2) u_x^\sigma u_y^\sigma \\ (\lambda_1 - \lambda_2) u_x^\sigma u_y^\sigma & \lambda_2 (u_x^\sigma)^2 + \lambda_1 (u_y^\sigma)^2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\|\nabla_\sigma u\|^2} \left( \lambda_1 \nabla_\sigma u \nabla_\sigma u^T + \lambda_2 \nabla_\sigma^\perp u \nabla_\sigma^\perp u^T \right)$$

## Diffusion “Edge Enhancing”

- ▶ Les vecteurs propres de  $D_\sigma$  sont  $\vec{v}_1 = \frac{\nabla_\sigma u}{\|\nabla_\sigma u\|}$  et  $\vec{v}_2 = \vec{v}_1^\perp$
- ▶ Décomposons  $\nabla u$  sur la base des v.p. de  $D_\sigma$  :

$$\nabla u = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$$

- ▶ Il est clair que  $\vec{v}_1 \cdot \nabla u = c_1$  et que  $\vec{v}_2 \cdot \nabla u = c_2$ .

- ▶ Donc  $R_\sigma \nabla u = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \end{pmatrix} \nabla u = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

- ▶  $\Lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1 \\ c_2 \lambda_2 \end{pmatrix}$  et  $R_\sigma^T \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1 \\ c_2 \lambda_2 \end{pmatrix} = (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} c_1 \lambda_1 \\ c_2 \lambda_2 \end{pmatrix}$

- ▶ On a donc :

$$D_\sigma \nabla u = c_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2 \vec{v}_2$$

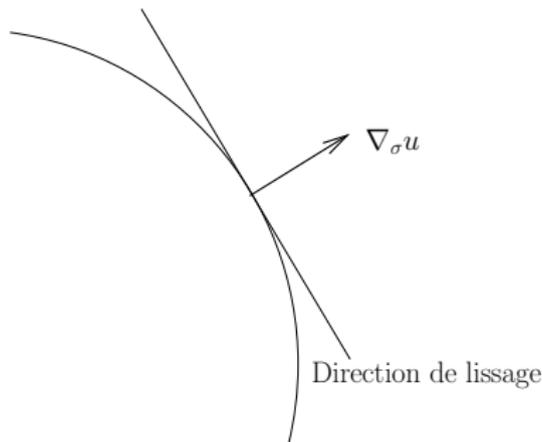
## Diffusion “Edge Enhancing”

- ▶ Les paramètres  $(c_1, c_2)$  caractérisent  $\nabla u$ .
- ▶ Les paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2)$  caractérisent  $D$  :
  1. Si  $\sigma$  est petit, alors  $\nabla_\sigma u \rightarrow \nabla u$  et donc  $c_1 \rightarrow 1$  et  $c_2 \rightarrow 0$ .  
On se rapproche d'un comportement isotropique dont la diffusivité est réglée par le terme  $\lambda_1$ .
  2. Si  $\sigma$  est grand, *a priori*  $\nabla_\sigma u$  n'est pas aligné avec  $\nabla u$  et donc  $c_2 \gg 0$ . Le comportement de la diffusion dépend de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .
  3. Si  $\lambda_1 = \lambda_2$ , alors  $D\nabla u = \lambda_1(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = \lambda_1\nabla u$  c'est donc encore de la diffusion isotropique !
  4. Si  $\nabla_\sigma u$  n'est pas aligné avec  $\nabla u$  : au pire ils sont orthogonaux et  $c_1 = 0$ . La diffusion n'est plus du tout isotropique : le flux est orienté le long des courbes d'iso-valeur de la norme du gradient (à l'échelle  $\sigma$ ) de  $u$  et seul le paramètre  $\lambda_2$  agit.

## Diffusion “Edge Enhancing” (suite)

- ▶ En résumé :
    - ▶  $\lambda_1$  règle la diffusivité dans la direction de  $\nabla_{\sigma} u$ .
    - ▶  $\lambda_2$  règle la diffusivité dans la direction orthogonale à  $\nabla_{\sigma} u$ .
    - ▶ Si  $\lambda_1 > \lambda_2$  : le comportement est proche de la diffusion isotropique.
    - ▶ Si  $\lambda_1 < \lambda_2$  : le comportement est proche de la diffusion anisotropique.
  - ▶ Choix possible pour  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  :
    - ▶  $\lambda_2 = e^{-\frac{\|\nabla_{\sigma} u\|^2}{k^2}}$
    - ▶  $\lambda_1 = \frac{1}{5}\lambda_2 \ll \lambda_2$
- ⇒ On a une diffusion forte le long des points de contours.
- ▶ En plus d'être anisotropique, la diffusion est non linéaire.

## Diffusion "Edge Enhancing" (suite)



- ▶ On lisse le long des lignes de contours ( $\lambda_2$  y est élevé) ...
- ▶ ... et peu dans la direction  $\nabla_{\sigma} u$  ( $\lambda_1 \ll \lambda_2$ ).
- ▶ Hors des zones de contours :  $\lambda_2 \simeq 0$  et par conséquent  $\lambda_1 \simeq 0$  : il n'y a pas de diffusion, l'image est préservée.

## Exercice : discrétisation

- On pose  $D = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  :

$$\begin{aligned} u_t &= \nabla \cdot (D \nabla u) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( b \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

- Il faut trouver un schéma numériquement stable.
- Les termes  $\frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  et  $\frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  ont déjà été discrétisés (schéma de P&M).
- Termes croisés :
- $b \frac{\partial u}{\partial y} \simeq b_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} = f_{i,j}$
  - $\frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \simeq \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{2} = \frac{1}{4} (b_{i+1,j} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) - b_{i-1,j} (u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1}))$
  - Même chose pour le second terme croisé.

## Discrétisation (suite)

- Après factorisation selon les termes  $u$ , on trouve le schéma suivant :

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \Delta t \left[ -\frac{b_{i-1,j} + b_{i,j+1}}{4} u_{i-1,j+1}^k + \frac{c_{i,j+1} + c_{i,j}}{2} u_{i,j+1}^k \right. \\ + \frac{b_{i+1,j} + b_{i,j+1}}{4} u_{i+1,j+1}^k + \frac{a_{i-1,j} + a_{i,j}}{2} u_{i-1,j}^k \\ - \frac{a_{i-1,j} + 2a_{i,j} + a_{i+1,j} + c_{i,j-1} + 2c_{i,j} + c_{i,j+1}}{2} u_{i,j}^k \\ + \frac{a_{i+1,j} + a_{i,j}}{2} u_{i+1,j}^k + \frac{b_{i-1,j} + b_{i,j-1}}{4} u_{i-1,j}^k \\ \left. + \frac{c_{i,j-1} + c_{i,j}}{2} u_{i,j-1}^k - \frac{b_{i+1,j} + b_{i,j-1}}{4} u_{i+1,j-1}^k \right]$$

# Résultats

- On applique donc ce schéma numérique au tenseur  $D_\sigma$  :

$$D_\sigma = R_\sigma^T \Lambda R_\sigma$$

$$D_\sigma = \frac{1}{\|\nabla_\sigma u\|^2} \begin{pmatrix} \lambda_1(u_x^\sigma)^2 + \lambda_2(u_y^\sigma)^2 & (\lambda_1 - \lambda_2)u_x^\sigma u_y^\sigma \\ (\lambda_1 - \lambda_2)u_x^\sigma u_y^\sigma & \lambda_2(u_x^\sigma)^2 + \lambda_1(u_y^\sigma)^2 \end{pmatrix}$$

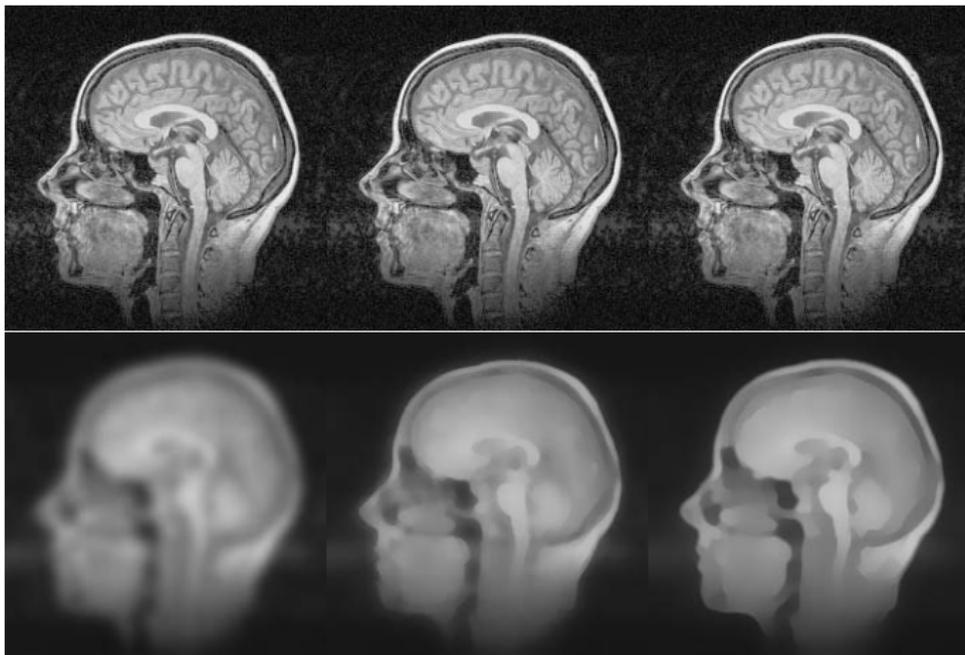
et donc on choisit :

$$a = (\lambda_1(u_x^\sigma)^2 + \lambda_2(u_y^\sigma)^2) / \|\nabla u^\sigma\|^2$$

$$b = (\lambda_1 - \lambda_2)u_x^\sigma u_y^\sigma / \|\nabla u^\sigma\|^2$$

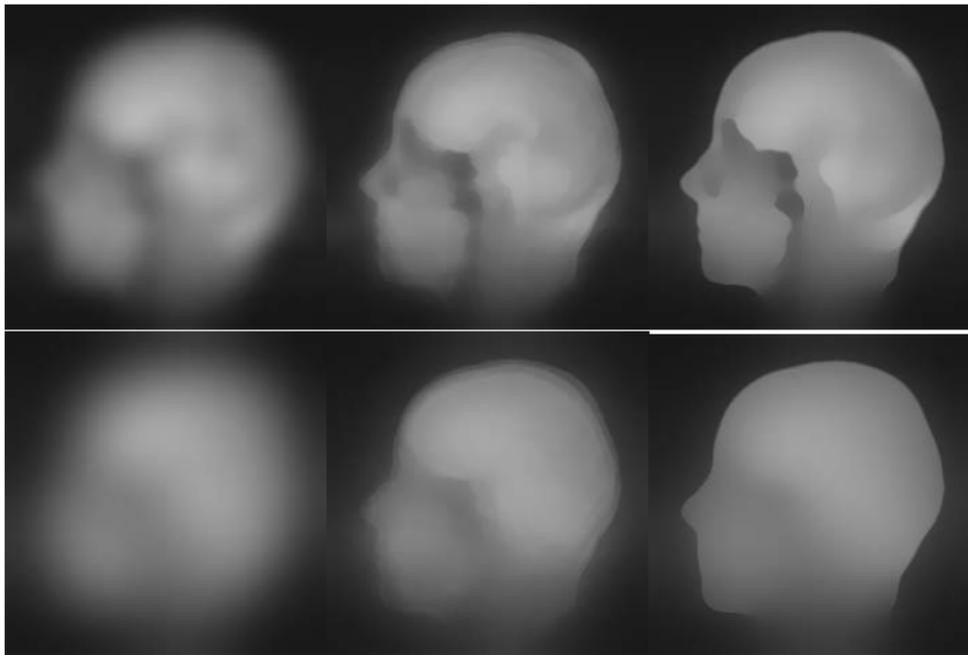
$$c = (\lambda_2(u_x^\sigma)^2 + \lambda_1(u_y^\sigma)^2) / \|\nabla u^\sigma\|^2$$

# Résultats



**Figure:** Comparaison Linéaire/Isotropique/Anisotropique

# Résultats

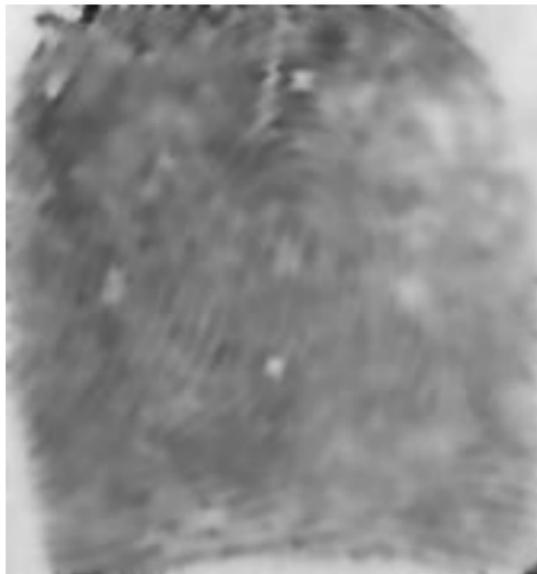


**Figure:** Comparaison Linéaire/Isotropique/Anisotropique

# Échec de la diffusion "Edge Enhancing"



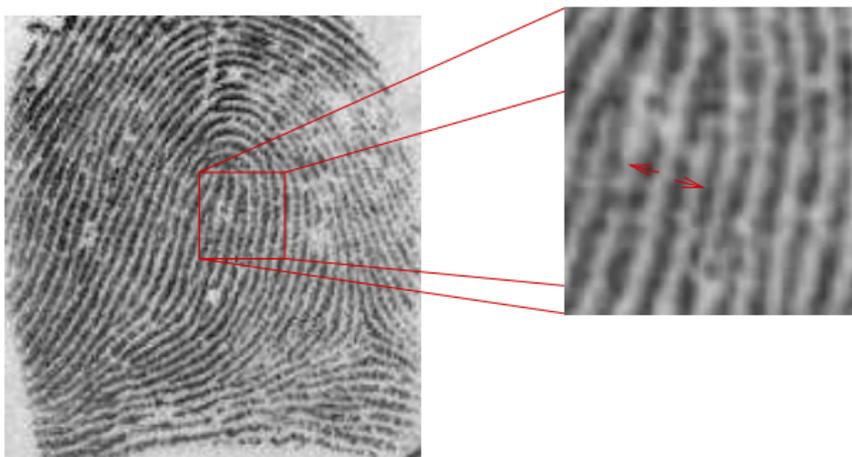
(a) Image originale



(b) Diffusion "Edge Enhancing"

## Pourquoi ?

- ▶ Comment sont orientés les gradients ?



- ▶ Si l'image est trop bruitée, on a des orientations non significantes.
- ▶ Dans un voisinage (=à cause du lissage) les gradients sont opposés : ils se compensent !
- ▶ Que faut-il faire ?

## Diffusion “Coherence Enhancing”

- ▶ Il faut orienter par rapport au contour (et pas au gradient) ; le contour est “non orienté” .
- ▶ Diffusion Coherence Enhancing [Weickert, 1999].
- ▶ Calculer la direction (non orientée) d'un contour.
- ▶ Soit le tenseur “orientation locale” :

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x^s u_x^s \star G^\sigma & u_x^s u_y^s \star G^\sigma \\ u_x^s u_y^s \star G^\sigma & u_y^s u_y^s \star G^\sigma \end{pmatrix}$$

- ▶ On peut vérifier que ce tenseur ne dépend pas de l'orientation : pour  $\nabla u$  et  $-\nabla u$ , le signe disparaît, on a bien :

$$\begin{pmatrix} u_x^s u_x^s \star G^\sigma & u_x^s u_y^s \star G^\sigma \\ u_x^s u_y^s \star G^\sigma & u_y^s u_y^s \star G^\sigma \end{pmatrix}$$

- ▶ les coefficients de conductivité  $c_1$  et  $c_2$  vont régler le comportement isotropique/anisotropique de la diffusion.

## Diffusion par cohérence (suite)

- ▶ Le tenseur de diffusion  $D$  est alors donné par :

$$D = R^T \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} R$$

$R$  : matrice rotation dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres de  $S$ .

- ▶ Les valeurs propres de  $S$  sont :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(s_{11} + s_{22} + \alpha)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(s_{11} + s_{22} - \alpha)$$

$$\alpha = \sqrt{(s_{11} - s_{22})^2 + 4s_{12}^2}$$

## Diffusion par cohérence (suite)

- On calcule explicitement  $S$ , on trouve :

$$d_{11} = \frac{1}{2} \left( c_1 + c_2 + \frac{(c_1 - c_2)(s_{11} - s_{22})}{\alpha} \right)$$

$$d_{22} = \frac{1}{2} \left( c_1 + c_2 - \frac{(c_1 - c_2)(s_{11} - s_{22})}{\alpha} \right)$$

$$d_{12} = \frac{(c_2 - c_1)s_{12}}{\alpha}$$

- Choix pour  $c_1$  et  $c_2$  : ils peuvent dépendre de l'image. Weickert propose :

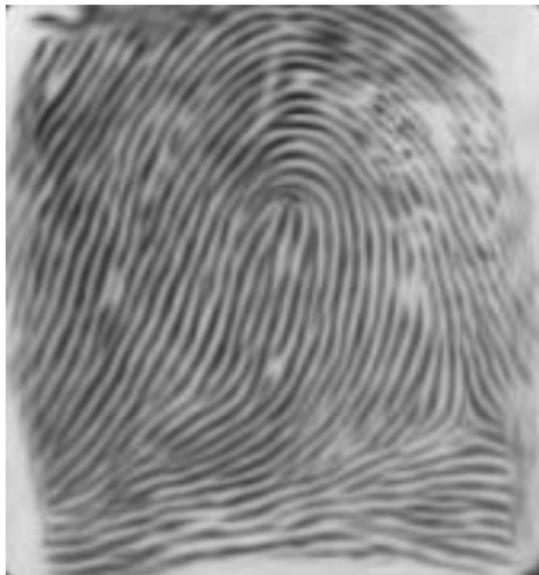
$$c_1 = \max(0.01, 1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)^2 / k^2})$$

$$c_2 = 0.02$$

# Résultats



(c) Image originale



(d) Diffusion "Coherence Enhancing"

## Attention : un modèle adapté

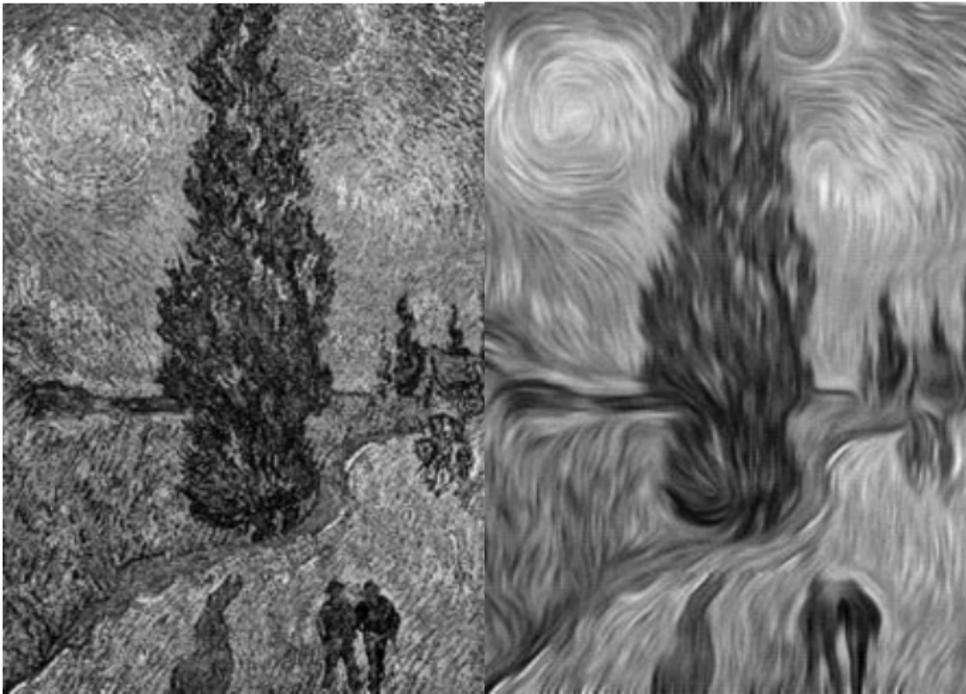


(e) Diffusion par cohérence  $n = 10$



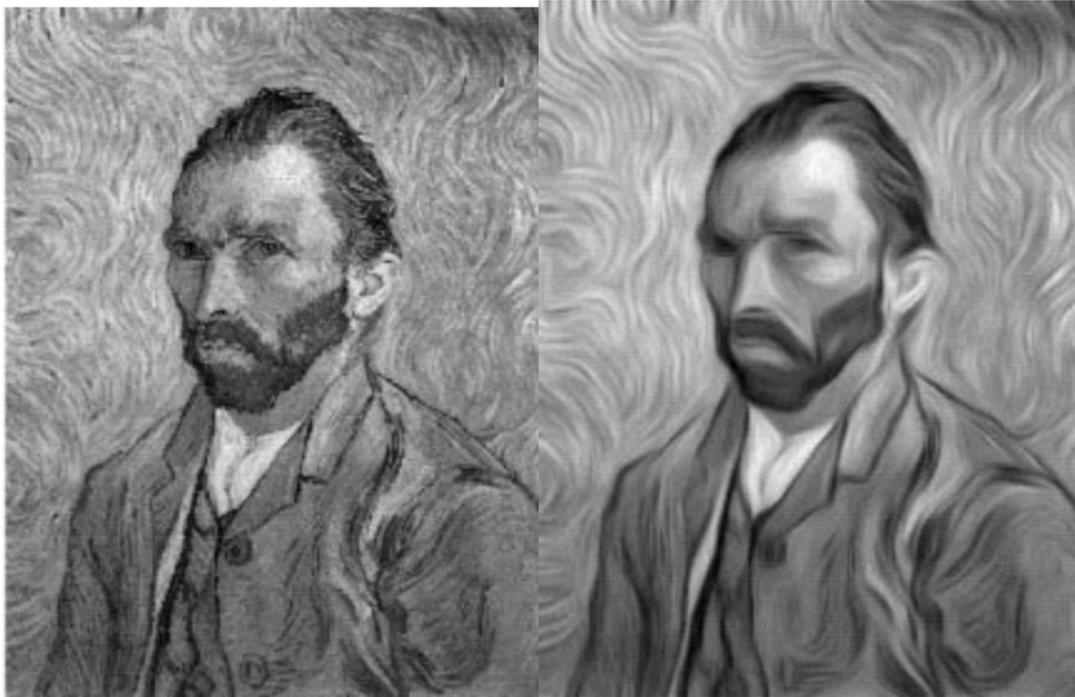
(f) Diffusion par cohérence  $n = 30$

## Filtre artistique ?



**Figure:** “Route avec cyprès et Ciel étoile”

## Filtre artistique ?



**Figure:** Van Gogh dans tous ses états

## En couleurs

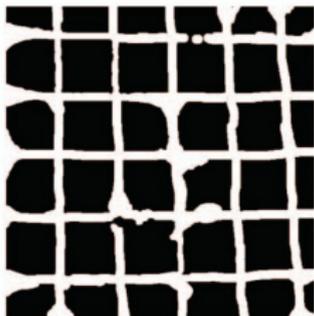


**Figure:** On traite les canaux séparément

# “Inpainting” [Tschumperle and Deriche, 2005]



Original image



Inpainting mask definition



After image inpainting



**Figure:** Les données manquantes sont écrites mais non lues

Diffusion non linéaire

Diffusion anisotropique

**Généralisation**

Applications

# Motivations

- ▶ Les familles de représentation en e.e. linéaires (l'EDP génératrice est linéaire) sont souvent trop contraignantes :
  - ▶ linéarité  $\Rightarrow$  noyau gaussien
  - ▶ lissage gaussien est trop fort : il élimine les contours.
- ▶ On a vu que d'autres familles de représentation ayant des propriétés satisfaisantes "d'espaces d'échelles" sont possibles.
- ▶ Peut-on, dans le cas continu, formuler les e.e. de façon axiomatique comme il a été fait dans le chapitre précédent ?
- ▶ La réponse est oui : elle a été apporté par les travaux de Alvarez, Lions, Morel (et d'autres ...).

# Définition générale des espaces d'échelles continus

- ▶ On se donne un paramètre d'échelle  $t > 0$
- ▶ et un opérateur d'échelle  $T_t$ .

## Définition 1 (Représentation multi-échelles)

Soient  $f$  un signal et  $T$  un opérateur d'échelle vérifiant :

1. la propriété de semi-groupe :  $T_{t+t'} = T_t T_{t'}$ .

2. le principe de causalité :

$$f(y) > f(x) \Rightarrow T_t(f)(y) > T_t(f)(x) \quad \forall t > 0 \quad \forall y \in \mathcal{V}_x$$

3. la quantité  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t(f) - f}{t}$  existe.

alors on appelle représentation multi-échelles de  $f$  la famille  $(T_t(f))_{t>0}$ .

- ▶ La quantité  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t(f) - f}{t}$  est un opérateur tangent (une différentielle) appliqué à un vecteur  $f$ .  
On le note  $\partial T$  et on l'appelle générateur infinitésimal.
- ▶ On retrouve les mêmes propriétés qu'en discret.

### **Théorème 5**

*Une représentation multi-échelles  $(T_t(f))_{t>0}$  d'un signal  $f$  est la solution de l'EDP :*

$$\begin{aligned}u_t &= \partial T(u) \\ u(., 0) &= f\end{aligned}$$

- ▶ Remarque : si  $T_t(f)$  s'exprime comme un produit de convolution alors la propriété 3 de la définition 1 est toujours vraie (et on retrouve le cas des e.e. linéaires).

# Caractérisation des générateurs inf.

## Théorème 6 (Alvarez-Morel-Lions)

Le générateur infinitésimal  $\partial T$  d'une représentation multi-échelles s'écrit de façon générale :

$$\partial T(u) = \mathcal{F}(D^2 u, Du, u, t) \quad (5)$$

$D$ ,  $D^2$  sont des opérateurs différentiels resp. du premier et du second ordre.

- ▶ le terme  $D^2 u$  est un terme de lissage (diffusion) : il gère donc les aspects liés à l'échelle de la représentation.
- ▶ le terme  $Du$  est un terme réactif (advection).
- ▶ le terme  $u$  est un terme d'attache aux données (forçage).
- ▶ Les termes  $Du$  et  $u$  permettent en pratique d'intégrer des propriétés du "traitement d'images".

# Caractérisation des générateurs inf.

- ▶ En ajoutant des propriétés supplémentaires (à celles de la définition 1, on peut obtenir des solutions particulières pour l'équation (5).
- ▶ **Exemple 1 :**  
Si on suppose que l'opérateur  $T$  est linéaire, l'équation (5) se réduit à l'équation de la chaleur : c'est un espace d'échelle linéaire (gaussien).
- ▶ **Exemple 2 :** On cherche des propriétés d'invariance sur l'opérateur d'échelle :

## Définition 2

*Soit  $G$  un groupe de transformations qui commute avec  $T$  de la façon suivante :*

$$\forall t > 0, \forall g \in G, \exists t' \geq 0 \mid g \circ T_{t'} = T_t \circ g$$

*Si  $t' = t$  on parle d'invariance forte (c'est le cas linéaire/gaussien), et d'invariance faible sinon.*

# Caractérisation des générateurs inf.

- ▶ Voici un exemple d'invariance faible :

## **Théorème 7 ([Alvarez et al., 1993])**

*Les représentations invariantes par transformation monotone de contraste (i.e.  $F$  t.q.  $x \mapsto F(x, t)$  est croissante) sont générées par les EDP suivantes :*

$$u_t = |\nabla u| F \left( \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), t \right) \quad (6)$$

- ▶ Rem : on note  $\text{curv}(u) = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$  c'est la courbure euclidienne (en géométrie différentielle).

## Caractérisation des générateurs inf.

- ▶ Un résultat remarquable : les solutions de l'équation (6) correspondent aux ensembles de lignes de niveaux ( $u(x, t) = u_0$ ) qui évoluent avec une vitesse qui ne dépend que de leur courbure euclidienne (c'est-à-dire leur géométrie locale).
- ▶ Ces représentations sont appelées espaces d'échelles euclidiens géométriques.
- ▶ Un cas simple pour  $F$  : si  $F(x, t) = x$  alors l'équation (6) s'écrit :

$$u_t = \text{curv}(u)|\nabla u|$$

- ▶ C'est l'équation d'un *snake* pour chaque ligne de niveaux ! Les lignes de niveaux sont déformées selon une vitesse normale égale à leur courbure euclidienne.

# Caractérisation des générateurs inf.

► **Exemple 3 : invariance par changement d'échelle.**

Quels sont les générateurs  $T$  qui commutent avec l'opérateur changement d'échelle (i.e. si on note  $u_\lambda : x \mapsto u(\lambda x)$  alors on a  $T_t(u)(\lambda x) = T_t(u_\lambda)(x)$  ?

Ils sont solutions de l'E.D.P. [Alvarez et al., 1993] :

$$u_t = |\nabla u| (t \operatorname{curv}(u))^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

Diffusion non linéaire

Diffusion anisotropique

Généralisation

## **Applications**

Lien avec la morphologie mathématique

Régularisation des problèmes mal posés

Restauration d'images

# Morphologie mathématique

- Soit l'élément structurant :

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$$

- La dilatation de l'image  $u$  par  $B$  est définie par :

$$\mathcal{D}(u, B)(x) = \sup \{u(x - y) \mid y \in B\}$$

- L'érosion de l'image  $u$  par  $B$  est définie par :

$$\mathcal{E}(u, B)(x) = \inf \{u(x - y) \mid y \in B\}$$

# Morphologie mathématique

## Théorème 8 ([Alvarez et al., 1993])

*Les solutions des équations*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -|\nabla u| \quad (9)$$

*avec comme condition initiale  $u(x, 0) = f(x)$  correspondent respectivement à la dilatation et à l'érosion de  $f$  par l'élément structurant  $tB$  (disque de rayon  $t$ ) et forme un espace d'échelles non linéaire.*

# Problèmes mal posés : définition formelle

## Définition 3 ([Hadamard, 1923])

*Un problème est dit "bien posé" si :*

- ▶ *il existe une solution unique,*
- ▶ *la solution dépend continuellement des données.*

La plupart des problématiques images sont mal posées :

- ▶ en imagerie 2D : les capteurs acquièrent les données en vue projective : perte d'information.
- ▶ en imagerie quelconque : les capteurs observent les interactions objets / photons : l'information portée par les photons n'est pas exhaustive.
- ▶ segmentation, restauration, mise en correspondance, calcul du flot optique, recalage, ..., sont des problèmes mal posés.

# Régularisation des problèmes mal posés

- ▶ Donc en pratique : problèmes mal posés  $\Leftrightarrow$  contraintes (le modèle image, l'attache aux données) insuffisantes pour obtenir une solution unique.
- ▶ En l'absence d'information, on peut ajouter des contraintes de régularité sur la solution pour obtenir une solution unique [Tikhonov, 1963].
- ▶ Le problème est formulé en terme de calcul de variation :
  1. choix d'une fonctionnelle à minimiser
  2. calcul de la différentielle de la fonctionnelle puis de l'équation d'Euler-Lagrange associé
  3. discrétisation de l'équation d'Euler-Lagrange (une EDP).
- ▶ Ce qu'on va voir : une dualité entre ces méthodes de régularisation et les représentations en espace d'échelles.

## Formulation variationnelle

- ▶ On définit la fonctionnelle suivante,  $I_0$  l'image à traiter :

$$E(I) = \int \left\{ \underbrace{\| \mathbb{M}(I, I_0)(\mathbf{x}) \|^2}_{\text{modèle image}} + \alpha \underbrace{\| \nabla I(\mathbf{x}) \|^2}_{\text{régularisation}} \right\} d\mathbf{x} \quad (10)$$

- ▶ ici la régularisation est à l'ordre 1, on peut envisager d'autre type de régularisation (ordre 2 ou supérieur, d'autres opérateurs différentiels, ...).
- ▶ Calcul de la différentielle de  $E$ , on utilise la définition de Gâteau (dérivée directionnelle,  $\psi$  est la direction) :

$$\left\langle \frac{\partial E}{\partial I}, \psi \right\rangle = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{E(I + \gamma\psi) - E(I)}{\gamma}$$

## Formulation variationnelle (suite)

- ▶ On applique cette formule à la fonctionnelle (10) et on factorise en  $\psi$  : ainsi le facteur de  $\psi$  est la différentielle recherchée :

$$\frac{\partial E}{\partial I}(\mathbf{x}) = 2 \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial I}(\mathbf{x}) - 2\alpha \nabla \cdot \nabla I(\mathbf{x})$$

- ▶ Équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial I}(\mathbf{x}) - \alpha \nabla^2 I(\mathbf{x}) = 0 \quad (11)$$

### Théorème 9 (Équation d'évolution)

Soit une famille de fonctions  $\mathbf{x} \mapsto L(\mathbf{x}, t)$  vérifiant  $L(\mathbf{x}, 0) = 0$  et :

$$\frac{\partial L}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial L}(\mathbf{x}, t) - \alpha \nabla^2 L(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (12)$$

Alors, lorsque  $t \rightarrow 0$ , on a  $L \rightarrow I$ , où  $I$  est solution de l'équation (11).

## Formulation variationnelle

- ▶ Il est donc équivalent, et parfois utile si l'EDP n'est pas linéaire par exemple, de résoudre l'équation d'évolution associée.
- ▶ Application en image :
  - ▶ flot optique (Horn, Schunk) :  $\mathbb{M}(w, I_0) = \nabla I_0^T w + \frac{\partial I_0}{\partial t}$ ,
  - ▶ segmentation (Shah, Mumford), débruitage, shape from shading ... :  
 $\mathbb{M}(I, I_0) = I - I_0$ ,
  - ▶ déconvolution :  $\mathbb{M}(I, I_0) = I \star \eta - I_0$ ,
  - ▶ contours actifs :  $\mathbb{M}(c, I_0) = \nabla I_0(c)$ ,
  - ▶ ...

# Lien entre régularisation et espaces d'échelles

- Cas simple : pas d'attache aux données ( $\mathbb{M} = 0$ ).

## Théorème 10

*La représentation  $L$  de l'espace d'échelles linéaire associée à une image  $I$  est solution du problème d'optimisation :*

$$\operatorname{argmin}_{I \in L^2(\Omega)} \int_{\Omega} \|\nabla I(x)\|^2 dx \quad (13)$$

La preuve s'obtient par le formalisme du calcul variationnel.

□

- La dérivée directionnelle de  $E(I) = \int \|\nabla I(x)\|^2 dx$  dans la direction  $\psi(x)$  est :  $-2 \int_{\Omega} \psi^T(x) \nabla^2 I(x) dx$

## Régularisation (suite)

- ▶  $E$  est une fonctionnelle convexe, donc le minimum de  $E$  annule la différentielle de  $E$  (équation d'Euler-Lagrange) :

$$-2 \int_{\Omega} \psi^T(x) \nabla^2 I(x) = 0, \forall \psi$$

- ▶ Cette équation étant vraie pour toute fonction  $\psi(x)$ , on a

$$-2 \nabla^2 I(x) = 0 \tag{14}$$

- ▶ L'équation d'évolution associée à (14) est :

$$\frac{\partial}{\partial t} L(x, t) - \nabla^2 L(x, t) = 0$$

- ▶ La fonction  $L$  vérifie l'équation de la chaleur, donc la représentation en espace d'échelles associée à  $I$  est une solution. ■

# Régularisation à tout ordres

- Cas avec attache aux données mais une régularisation à tout ordre.

## Définition 4

Soit  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . Une solution  $f$ , régularisée au sens de Tikhonov, est la fonction qui minimise :

$$E(f) = \frac{1}{2} \int dx \left( (f(x) - g(x))^2 + \sum_{i>0} \lambda_i \left( \frac{\partial^i f(x)}{\partial x^i} \right)^2 \right) dx \quad (15)$$

Si  $\lambda_i = 0$  pour  $i > n$ , on parle de  $n$ -régularisation.

## Théorème 11

Il existe un jeu de valeur  $\lambda_i$ ,  $i > 0$  pour lequel la convolution sur le noyau gaussien  $G$  forme une solution du problème de minimisation de (15).

# Régularisation à tout ordres

## Preuve du théorème

□ Preuve dans [Nielsen et al., 1994] :

► Dans l'espace de Fourier :

$$E(\hat{f}) = \int d\omega \left( (\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega))^2 + \sum_{i>0} \lambda_i \underbrace{\omega^{2i} \hat{f}^2}_{\text{Dérivation dans Fourier}}(\omega) \right)$$

► Équation d'Euler-Lagrange associée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \hat{f}} &= (\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)) + \sum_{i>0} \lambda_i \omega^{2i} \hat{f}(\omega) \\ \Leftrightarrow \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{1 + \sum_{i>0} \lambda_i \omega^{2i}} \hat{g}(\omega) \end{aligned}$$

# Régularisation à tout ordres

## Preuve du théorème (suite)

- ▶ En appliquant le théorème de la convolution, on a  $f = h \star g$  avec  $\hat{h} = \frac{1}{\sum_{i \geq 0} \lambda_i \omega^{2i}}$  avec  $\lambda_0 = 1$ .
- ▶ On choisit un jeu particulier de paramètre pour les  $\lambda_i$  : on suppose que  $\lambda_i = \frac{t^i}{i!}$ .
- ▶  $\hat{h} = \frac{1}{\sum_{i \geq 0} \lambda_i \omega^{2i}} = e^{-\omega^2 t}$ .
- ▶ Le noyau de convolution est donc (T.F. inverse) :  $e^{-x^2/t}$ . On retrouve donc l'expression d'un espace d'échelles gaussien. ■
- ▶ Voir aussi [Deriche and Faugeras, 1995].

## Attache aux données et régularisation

- ▶ Cas standard : attache aux données et régularisation à l'ordre 1.
- ▶ De façon générale, pour résoudre le problème  $\mathbb{M}(I, I_0) = 0$ , mal posé, on minimise :

$$E(I) = \int_{\Omega} \Psi(\mathbb{M}(I(\mathbf{x}), I_0(\mathbf{x}))) + \alpha \Phi(\|\nabla I(\mathbf{x})\|) d\mathbf{x}$$

- ▶  $\Psi$  et  $\Phi$  sont deux fonctions réelles positives convexes.
- ▶ Si on calcule la différentielle de  $E$  on trouve :

$$\begin{aligned} & -\alpha \nabla \cdot \left( \Phi'(\|\nabla I\|) \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right) \\ & + \nabla \cdot \left( \Psi'(\|\mathbb{M}(I, I_0)\|) \frac{\partial \mathbb{M}(I, I_0)}{\partial I} \right) = 0 \end{aligned}$$

- ▶ Terme de diffusion isotropique non linéaire + terme de forçage.

# Régularisation

suite

- Soit la famille  $L$  telle que  $L(\mathbf{x}, 0) = l_0(\mathbf{x})$  et

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} = & \alpha \nabla \cdot \left( \Phi'(\|\nabla L\|) \frac{\nabla L}{\|\nabla L\|} \right) \\ & - \nabla \cdot \left( \Psi'(\|\mathbb{M}(L, l_0)\|) \frac{\partial \mathbb{M}(L, l_0)}{\partial L} \right) \end{aligned}$$

- Alors la limite lorsque  $t \rightarrow 0$  de  $L$  minimise alors la fonctionnelle précédente.
- Cette équation (diffusion isotropique non linéaire couplée à un terme de réaction/forçage selon la définition de  $\mathbb{M}$ ) correspond à la définition générale (Alvarez *et al*) des espaces d'échelles.
- Rem : si  $\Phi(x) = x^2$  alors  $\Phi'(x) = 2x$  et on retrouve la diffusion isotropique.

## Peut-on déflouter une image ?

- ▶ Flou gaussien  $\Leftrightarrow$  processus de diffusion.
- ▶ Question : si on connaît  $u^n$  (image floutée), peut-on calculer  $u^0$  ?
- ▶ A priori oui ! Équation discrétisée : schéma arrière :

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} = \nabla^2 u^{k+1}$$
$$u^k = u^{k+1} - \Delta t \nabla^2 u^{k+1}$$



(a)  $\sigma = 1$



(b) 5 itérations



(c) 10 itérations

**Figure:** Schéma rétrograde de l'équation de la chaleur.

## Défloutage gaussien



(a) Image originale



(b) Image défloutée

# Défloutage gaussien

- ▶ Mais le schéma numérique est instable :

Loading data ...

**Figure:** Instabilité après 15 itérations

# Défloutage gaussien

- ▶ Cela fonctionne avec des lissages plus fort :

Loading data ...

**Figure:** Cas d'un flou prononcé ( $\sigma = 2$ , 28 itérations).

# Défloutage gaussien

- ▶ Mais pas trop :

Loading data ...

**Figure:**  $\sigma = 3$  : le schéma diverge très rapidement (après 32 itérations).

# Schéma rétrograde de la diffusion

- ▶ On sait montrer (analyse de stabilité de Fourier) que ce schéma est numériquement instable.
- ▶ En même temps, le défloutage consiste à renforcer les contours, donc à violer le principe de causalité.
- ▶ Les erreurs d'arrondi dans le schéma numérique engendrent des valeurs absurdes (c'est-à-dire du bruit), le principe de causalité n'étant pas respecté, on renforce ce bruit jusqu'à créer l'instabilité numérique.
- ▶ Au contraire, les processus de diffusion sont, par nature, stables : les erreurs numériques ou le bruit sont lissés et finissent pas disparaître.

## Débruitage : filtres de choc

- ▶ Soit l'EDP :

$$\begin{aligned}u_t &= -\text{sign}(\nabla^2 u) \|\nabla u\| & t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) &= f(\mathbf{x})\end{aligned}$$

- ▶ Propriétés :

- ▶ au voisinage d'un maximum local  $\mathbf{x}_0$ , on a  $\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$  :

$$u_t = \|\nabla u\|$$

- ▶ au voisinage d'un minimum local  $\mathbf{x}_0$ , on a  $\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$  :

$$u_t = -\|\nabla u\|$$

Ces deux cas sont équivalents à des opérateurs morphologiques de dilatation ou d'érosion.

- ▶ Voir [Osher and Rudin, 1990].

# Débruitage

- Discrétisation :

$$u_i^{k+1} - u_i^k = \Delta t \left[ -\text{sign}(\nabla^2 u_i^k) \|\nabla u_i^k\| \right]$$

- Variante :

$$u_t = -\text{sign} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta^2} \right) \|\nabla u\|$$

avec  $\eta = \frac{\|\nabla u\|}{\|\nabla u\|}$ .

- [Alvarez and Mazorra, 1994] :

$$u_t = -\text{sign} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) \|\nabla u\|$$

avec  $v = G_\sigma \star u$  et  $\frac{\partial}{\partial \eta}$  dérivée dans la direction du gradient..

- Filtre de choc anisotropique : [Weickert, 2003].

-  Alvarez, L., Guichard, F., Lions, P.-L., and Morel, J.-M. (1993).  
Axioms and fundamental equations of image processing.  
*Arch. Rational Mech. Anal.*, 123 :199–257.
-  Alvarez, L. and Mazorra, L. (1994).  
Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion.  
*Journal of Numerical Analysis*, 31(2) :590–605.
-  Catté, F., Lions, P.-L., Morel, J.-M., and Coll, T. (1992).  
Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion.  
*Journal of Numerical Analysis*, 1 :182–193.  
Diffusion de Perona-Malik stabilisée.
-  Deriche, R. and Faugeras, O. (1995).  
Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur.  
Technical Report 2697, INRIA.  
Bonne synthèse des connaissances du moment sur les liens entre diffusion et régularisation ainsi que les propriétés axiomatiques pour l'analyse multi-échelle.



Hadamard, J. (1923).

*Lecture on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations.*

Yale University Press, New Haven.

Première définition des problèmes mal posés.



Kačur, J. and Mikula, K. (1995).

Solution of nonlinear diffusion appearing in image smoothing and edge detection.

*Appl. Numer. Math.*, 17(1) :47–59.

Complément aux travaux de Catté et al.



Nielsen, M., Florack, L., and Deriche, R. (1994).

Regularisation and scale space.

Technical Report RR 2352, INRIA.

Décrit les relations entre les espaces d'échelles et la régularisation des problèmes mal posés.



Osher, S. and Rudin, L. I. (1990).

Feature-oriented image enhancement using shock filters.

*Journal of Numerical Analysis*, 27(4) :919–940.



Perona, P. and Malik, J. (1990).

Space scale and edge detection using anisotropic diffusion.

*Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*,  
12(7) :629–639.

Article fondateur sur la diffusion non linéaire. A lire.



Tikhonov, A. N. (1963).

Regularization of incorrectly posed problems.

*Sov. Math. Dokl.*, 4 :1624–1627.



Tschumperle, D. and Deriche, R. (2005).

Vector-valued image regularization with pdes : A common framework  
for different applications.

*Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*,  
27(4) :506–512.



Weickert, J. (1998).

*Anisotropic diffusion in image processing*.

ECMI Series. Teubner-Verlag, Stuttgart.

ISBN :3-519-02606-6.



Weickert, J. (1999).

Coherence-enhancing diffusion filtering.

*International Journal on Computer Vision*, 31 :111–127.



Weickert, J. (2003).

*Pattern Recognition*, chapter Coherence-Enhancing Shock Filters, pages 1–8.

Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin / Heidelber.  
2781.