

# Analyse Multiéchelles et Ondelettes

## Chapitre 2 : espaces d'échelles discrets

Dominique Béréziat

Master Informatique, spécialité IMA  
Université Pierre et Marie Curie

14 janvier 2014

# Plan du chapitre

**Discrétisation de l'équation de la chaleur**

**Formulation axiomatique des e.e.d.**

**D'autres choix pour le noyau discret ?**

**Extension à  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$**

# But de ce chapitre

- ▶ Comment implémenter les espaces d'échelles ?
- ▶ Passer des espaces continus aux espaces discrets.
- ▶ Plusieurs options :
  1. approche naïve : discrétiser la convolution gaussienne (on verra que cela ne fonctionne pas toujours !),
  2. discrétiser l'équation de la chaleur (mieux, mais calcul indirect),
  3. formuler l'espace d'échelles (**e.e.**) selon des propriétés discrètes (construction axiomatique). On obtiendra une formulation directe (à la différence de 2).

## Discretisation de l'équation de la chaleur

Discretisation des opérateurs différentiels

Analyse de stabilité de Fourier

Application à l'équation de la chaleur

Formulation axiomatique des e.e.d.

D'autres choix pour le noyau discret ?

Extension à  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$

## Comment discrétiser les EDPs ?

- ▶ Les méthodes sont diverses et dépendent complètement du type d'équation.
- ▶ Nous présentons une méthode qui peut s'appliquer aux familles d'équations différentielles suivantes :
  - ▶ Les équations paraboliques (typiquement la diffusion :  $u_t = (D_x u)_x$ )
  - ▶ Les équations elliptiques (typiquement équation de Poisson :  
 $u_{xx} + u_{yy} = f$ ,
  - ▶ Les équations hyperboliques (typiquement équation des ondes :  
 $u_{tt} = cu_{xx}$ .

(On note  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , ...)

# Discrétisation des dérivées partielles

- ▶ Elles s'obtiennent à partir de développements limités d'ordre 1 ou 2.
- ▶ Rappel : D.L. d'une fonction  $f$  au voisinage d'un point  $x_0$  :

$$f(x) \simeq \sum_{i=0}^n f^{(i)}(x_0) \frac{(x - x_0)^i}{i!} + \mathcal{O}((x - x_0)^n)$$

avec  $f^{(i)}$  la  $i$ -ième dérivée et  $\mathcal{O}(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$

- ▶ Dérivée première :
  - ▶ différence avant : D.L. ordre 1.

$$\begin{aligned} f(x + \Delta) &\simeq f(x) + f'(x)\Delta & (1) \\ f'(x) &\simeq \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta} \end{aligned}$$

# Discrétisation des dérivées partielles

- ▶ Dérivée première (suite) :
  - ▶ différence arrière : D.L. ordre 1.

$$\begin{aligned}f(x - \Delta) &\simeq f(x) - f'(x)\Delta \\ f'(x) &\simeq \frac{f(x) - f(x - \Delta)}{\Delta}\end{aligned}\tag{2}$$

- ▶ différence milieu : on soustraie (2) à (1) :

$$\begin{aligned}f(x + \Delta) - f(x - \Delta) &\simeq 2f'(x)\Delta \\ f'(x) &\simeq \frac{f(x + \Delta) - f(x - \Delta)}{2\Delta}\end{aligned}$$

## Discrétisation des dérivées partielles

- Dérivée seconde : on ajoute les 2 D.L. d'ordre 2 suivantes :

$$f(x + \Delta) \simeq f(x) + f'(x)\Delta + f''(x)\frac{\Delta^2}{2}$$

$$f(x - \Delta) \simeq f(x) - f'(x)\Delta + f''(x)\frac{\Delta^2}{2}$$

$$f(x + \Delta) + f(x - \Delta) \simeq 2f(x) + f''(x)\Delta^2$$

$$f''(x) \simeq \frac{f(x + \Delta) - 2f(x) + f(x - \Delta)}{\Delta^2}$$

- On peut aussi décomposer :  $f''(x) = (f'(x))'$  et discrétiser en deux étapes avec les opérateurs d'ordre 1 vu précédemment : beaucoup de possibilités ...



## Un exemple simple pour discrétiser une EDP

- ▶ Résoudre  $u_{xx} + u_{yy} = f$  dans  $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ .
- ▶ On discrétise l'espace selon une grille régulière :

$$\begin{aligned}x_j &= x_0 + j\Delta_x & j = 0 \cdots J \\y_l &= y_0 + l\Delta_y & l = 0 \cdots L\end{aligned}$$

et on note  $u_{j,l} = u(x_j, y_l)$ .  $\Delta_x, \Delta_y$  : pas de discrétisation.

- ▶ Petit exercice : calculer  $\Delta_x$  et  $\Delta_y$ .  
Sans perte de généralité on suppose :  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta$ .
- ▶ L'équation est donc discrétisée par :

$$\begin{aligned}\frac{u_{j+1,l} - 2u_{j,l} + u_{j-1,l}}{\Delta^2} + \frac{u_{j,l+1} - 2u_{j,l} + u_{j,l-1}}{\Delta^2} &= f_{j,l} \\u_{j+1,l} + u_{j-1,l} + u_{j,l+1} + u_{j,l-1} - 4u_{j,l} &= \Delta^2 f_{j,l}\end{aligned}$$

## Exemple simple ...

- Écriture sous forme matricielle :

$$Au = \Delta^2 F \quad (3)$$

- La fonction  $u$  est représentée sous la forme d'un vecteur colonne :

$$u = (u_{00}, \dots, u_{J0}, \dots, u_{0L}, \dots, u_{JL})^T$$

- La matrice  $A ((L+1)(J+1) \times (L+1)(J+1))$  est symétrique à 5 bandes :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & \overbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1}^{L+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

## Exemple simple ...

- ▶ Formellement,  $u = A^{-1}F$
- ▶ En pratique, on résoud le système (3) sans inverser  $A$  (trop lourd et inutile).
- ▶ Comment inverser une matrice à cinq bandes potentiellement de grande taille ?

# Inversion de matrices symétrique de grande taille

- ▶ méthodes directes : Gauss, à proscrire ! (long et numériquement instable).

Si  $A$  n'est pas trop grande : faire une décomposition LU ( $A$  est symétrique) : directe sous `matlab`<sup>1</sup>.

- ▶ méthodes itératives : relaxation de type Jacobi/Gauss-Seidel

$$A = E - G$$

$$Eu = Gu + F$$

$$\begin{cases} Eu^n &= Gu^{n-1} + F \\ u^0 &= \vec{0} \end{cases}$$

- ▶ Se basent sur le théorème du point fixe : converge si  $A$  est à diagonale strictement dominante.
- ▶ On prend  $E$  diagonale (Jacobi) ou triangulaire supérieure (Gauss-Seidel).

---

## 1. ou octave !

## Exercice

- ▶ Discrétiser l'équation ( $v$  constante) d'advection :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

- ▶ Grille de discrétisation :

## Exercice

- ▶ Discrétiser l'équation ( $v$  constante) d'advection :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

- ▶ Grille de discrétisation : on pose  $u_j^n = u(x_j, t_n)$  avec

$$x_j = x_0 + j\Delta \quad j \in 0, \dots, J$$

$$t_n = t_0 + n\Delta_t \quad n \in 0, \dots, N$$

- ▶ Dérivée en  $t$  :

## Exercice

- ▶ Discrétiser l'équation ( $v$  constante) d'advection :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

- ▶ Grille de discrétisation : on pose  $u_j^n = u(x_j, t_n)$  avec

$$x_j = x_0 + j\Delta \quad j \in 0, \dots, J$$

$$t_n = t_0 + n\Delta_t \quad n \in 0, \dots, N$$

- ▶ Dérivée en  $t$  : on peut prendre une dérivée avant :  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta_t}$
- ▶ Dérivée en  $x$  :

## Exercice

- Discrétiser l'équation ( $v$  constante) d'advection :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

- Grille de discrétisation : on pose  $u_j^n = u(x_j, t_n)$  avec

$$x_j = x_0 + j\Delta \quad j \in 0, \dots, J$$

$$t_n = t_0 + n\Delta_t \quad n \in 0, \dots, N$$

- Dérivée en  $t$  : on peut prendre une dérivée avant :  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta_t}$
- Dérivée en  $x$  : point milieu (pour avoir un schéma spatialement symétrique) :  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\Delta}$
- Finalement :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta_t} = -v \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta}$$



# Exercice

## suite

- ▶ On obtient donc :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v\Delta t}{2\Delta} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (5)$$

- ▶ Ce schéma est appelé FTCS (Forward Time, Centered Space)
- ▶ C'est un schéma explicite car  $u^n$  est calculé directement à partir du terme précédent.
- ▶ MAIS ...

# Exercice

## suite

- ▶ On obtient donc :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v\Delta t}{2\Delta} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (5)$$

- ▶ Ce schéma est appelé FTCS (Forward Time, Centered Space)
- ▶ C'est un schéma explicite car  $u^n$  est calculé directement à partir du terme précédent.
- ▶ MAIS ... ce schéma n'est numériquement pas stable.
- ▶ Utilisation de l'analyse stabilité de Fourier.

## Analyse de stabilité de Fourier

- ▶ Consiste à étudier le comportement de l'erreur d'approximation dans l'espace de Fourier.
- ▶ Considérons l'équation (5) : elle possède une solution (discrète), notons-la  $u_j^n$ . Considérons une solution  $N_j^n$  calculée en précision arithmétique finie.
- ▶ Erreur :  $\epsilon_j^n = N_j^n - u_j^n$
- ▶ Comme  $N_j^n = \epsilon_j^n + u_j^n$ , remplaçons  $N$  dans (5) en posant  $\alpha = \frac{v\Delta_t}{2\Delta}$  :

$$\epsilon_j^{n+1} = \epsilon_j^n - \alpha(\epsilon_{j+1}^n - \epsilon_{j-1}^n) \quad (6)$$

- ▶ L'erreur vérifie donc l'EDP discrète. Décomposons l'erreur sur la base de Fourier :

$$\epsilon_j = \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \xi_k e^{ikj\Delta}$$

avec  $j = 1 \cdots N$ .

# Analyse de stabilité de Fourier

suite

- ▶ L'erreur dépend aussi du temps : elle augmente ou diminue selon  $n$ , donc  $\xi_k = \xi_k(n)$  la base de décomposition, elle, ne change pas.
- ▶ L'erreur évolue de façon exponentielle au cours du temps (voir Eq. (6), suite géométrique) :

$$\epsilon_j^n = \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \xi_k^n e^{ikj\Delta}$$

avec  $\xi_k$  constant.

- ▶ Enfin, il n'est pas utile d'étudier la T.F. complète : il suffit d'étudier l'évolution dans le temps de chaque mode  $k$  (fréquence) de la T.F. soit :

$$\xi_k^n e^{ikj\Delta}$$

# Analyse de stabilité de Fourier

suite

- ▶ L'analyse de stabilité de Fourier d'une EDP discrète consiste donc à calculer les solutions de la forme  $u_j^n = \xi_k^n e^{ikj\Delta}$  et à étudier leur comportement lorsque  $n$  croît.
- ▶ On remplace dans (5) :

$$\xi^{n+1} e^{ikj\Delta} = \xi^n \left( e^{ikj\Delta} - \frac{v\Delta t}{2\Delta} \left( e^{ik(j+1)\Delta} - e^{ik(j-1)\Delta} \right) \right)$$

$$\xi = 1 - \frac{v\Delta t}{\Delta} i \sin(k\Delta)$$

$$|\xi|^2 = 1 + \left( \frac{v\Delta t}{\Delta} \sin(k\Delta) \right)^2$$

$$|\xi|^2 > 1$$

- ▶ Comme  $u_j^n = \xi^n e^{ikj\Delta}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_j^n| = +\infty$

## Exercices

1. Méthode de Lax : dans l'équation (5), on remplace le terme  $u_j^n$  par  $\frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$  pour obtenir un nouveau schéma numérique. Montrer que ce schéma est stable pour l'analyse de stabilité de Fourier à une condition entre  $\Delta$ ,  $\Delta_t$  et  $v$  vérifiée (condition de Courant-Friedrich-Levy).
2. Schéma BTCS : dans l'équation (4), on choisit de discrétiser  $\partial u / \partial t$  par une différence arrière, ce qui mène au schéma discrétisé suivant :

$$u_j^n = u_j^{n-1} - v \frac{\Delta t}{2\Delta} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

Montrer que ce schéma est stable pour l'analyse de stabilité de Fourier.

## Discrétisation de l'équation de la chaleur

Discrétisation des opérateurs différentiels

Analyse de stabilité de Fourier

Application à l'équation de la chaleur

Formulation axiomatique des e.e.d.

D'autres choix pour le noyau discret ?

Extension à  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$

# Équation de la chaleur discrétisée

- ▶ Comment discrétiser l'équation de la chaleur en un schéma stable ?

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

- ▶ Commençons par un schéma FTCS :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = c \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta^2}$$

- ▶ Analyse de stabilité de Fourier :  $u_j^n = \xi^n e^{i\Delta k j}$

$$\begin{aligned} \xi &= 1 + c \frac{\Delta t}{\Delta^2} \left( e^{i\Delta k} - 2 + e^{-i\Delta k} \right) \\ &= 1 + \frac{c\Delta t}{\Delta^2} (2 \cos(\Delta k) - 2) \\ &= 1 - 4 \frac{c\Delta t}{\Delta^2} \sin^2 \frac{\Delta k}{2} \quad (\text{On a } \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a) \end{aligned}$$



# Équation de la chaleur discrétisée

## Suite

- ▶ Le schéma est stable si  $|\xi| < 1$ , et on a :

$$|\xi| = \begin{cases} 1 - 4 \frac{c\Delta_t}{\Delta^2} \sin^2 \frac{\Delta k}{2} & \text{si positif} \\ 4 \frac{c\Delta_t}{\Delta^2} \sin^2 \frac{\Delta k}{2} - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ▶ Comme  $\sin^2 \in [0, 1]$ , on a  $1 - \frac{4c\Delta_t}{\Delta^2} \leq \xi \leq 1$ 
  - ▶ Si  $\xi \geq 0$  alors on a toujours  $|\xi| < 1$ .
  - ▶ Sinon, alors il faut que  $\frac{4c\Delta_t}{\Delta^2} - 1 \leq 1$ . On a donc la condition  $\frac{2c\Delta_t}{\Delta^2} < 1$ .
- ▶ Exemple : avec  $\Delta = \Delta_t = 1$ , il faut que  $c < \frac{1}{2}$ .
- ▶ Le schéma est stable mais on doit faire des compromis entre les échantillonnages temporels et spatiaux.

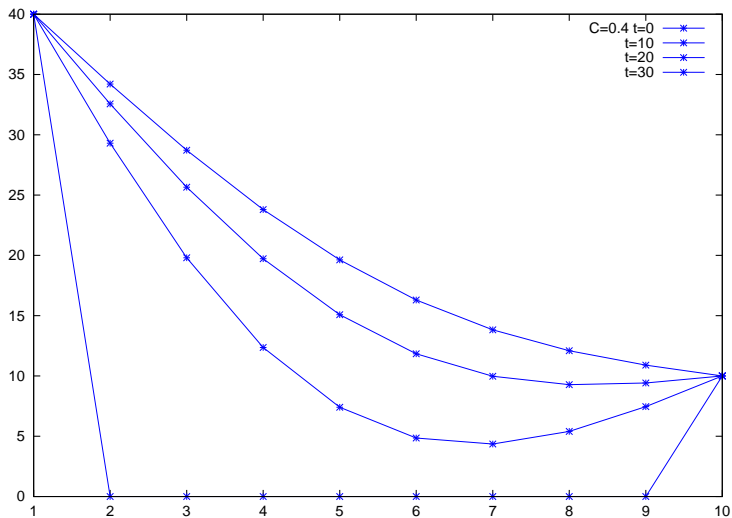


Figure:  $c \frac{\Delta_t}{\Delta^2} = 0.4$  : stabilité

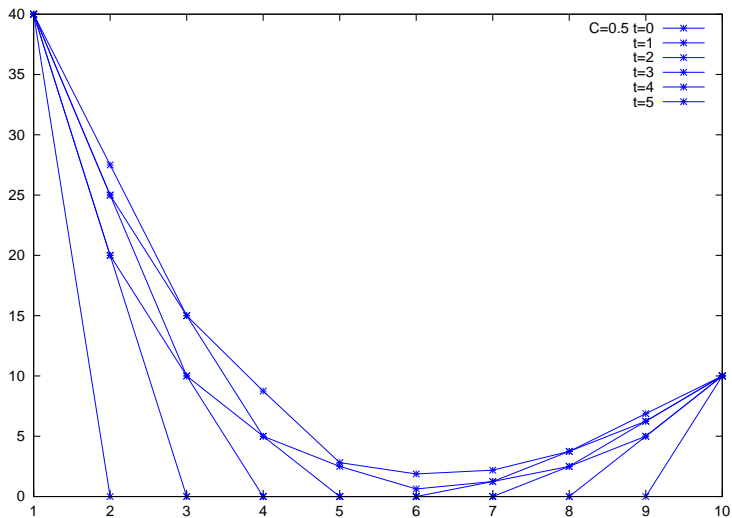


Figure:  $c \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.5$  : convergence avec instabilités locales

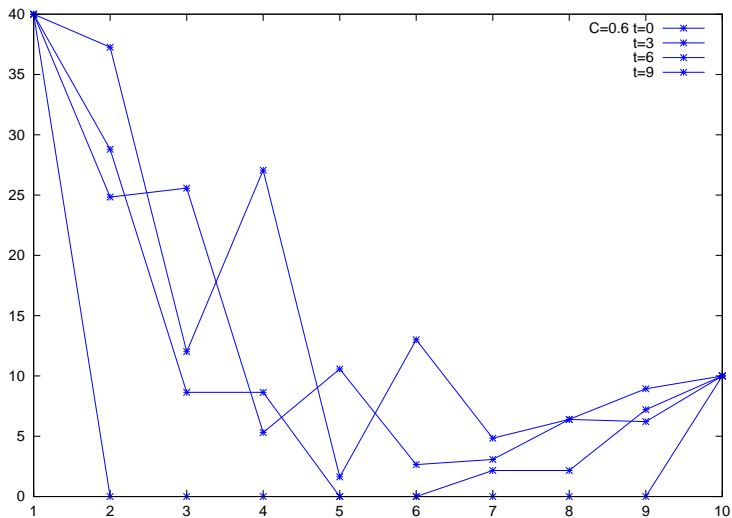


Figure:  $c \frac{\Delta t}{\Delta^2} = 0.6$  : instabilité

# Équation de la chaleur discrétisée

## Suite

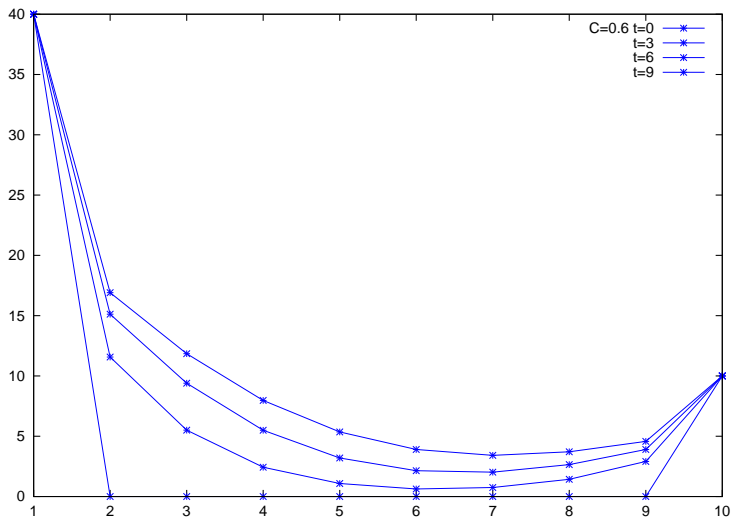
- Utilisons maintenant un schéma BTCS (Backward Temporal Centered Space). On obtient le schéma suivant :

$$-\alpha u_{j+1}^{n+1} + (1 + 2\alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j-1}^{n+1} = u_j^n \quad (8)$$

avec  $\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta^2}$ .

- Utilisation : c'est un schéma implicite, il faut inverser une matrice tridiagonale.
- Analyse de stabilité de Fourier :

$$\begin{aligned} \xi \left( -\alpha e^{i\Delta k} + (1 + 2\alpha) - \alpha e^{-i\Delta k} \right) &= 1 \\ \xi &= \frac{1}{1 + 2\alpha - 2\alpha \cos(\Delta k)} \\ &= \frac{1}{1 + 4\alpha \sin^2 \frac{k\Delta}{2}} \end{aligned}$$



# Équation de la chaleur discrétisée

## Suite

- ▶ Avantage : le schéma BTCS est toujours stable !
- ▶ Inconvénient :
  - ▶ Nécessite de résoudre un système linéaire à chaque itération.
  - ▶ En 2D, le système linéaire est de très grande taille : on utilise des méthodes itératives qui ne donnent pas un résultat exact.
- ▶ Conclusion :
  - ▶ Si la condition de stabilité du schéma FTCS est vérifiée, on préférera ce schéma.
  - ▶ Dans les autres cas, on utilisera le schéma BTCS.

# Exercices

1. Écrire matriciellement le schéma BTCS de l'équation de la chaleur.
  2. En pratique, en plus de l'équation (7), il faut donner des conditions aux bords :  $u(x_0, t) = u_0$  et  $u(x_n, t) = u_1$  pour  $t > 0$ . Comment gérer ces conditions dans les schémas discrétisés ?
  3. Écrire un programme `matlab` implantant les schémas FTCS et BTCS de l'équation de la chaleur.
- Bibliographie sur la discrétisation des EDPs : essentiellement des livres traitant d'analyse numérique tels que [Ames, 1977, Vetterling et al., 1992].



## Exercices à faire

1. Proposer un schéma FTCS et BTCS pour l'équation de la chaleur en 2D. (On a donné une discrétisation du laplacien dans le cas 2D, transparent 9).
2. Écrire le code `matlab` correspondant pour les deux schémas sans avoir à construire la matrice  $A$  (en 2D, elle est trop grande!).

## Discrétisation de l'équation de la chaleur

### **Formulation axiomatique des e.e.d.**

Définition et propriétés

Étude spectrale des noyaux à 2 et 3 états

Classification générale des noyaux

Construction axiomatique des espaces d'échelles discrets

### D'autres choix pour le noyau discret ?

### Extension à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

# Formulation axiomatique des e.e.d.

- ▶ On souhaite formuler les propriétés que doivent vérifier les signaux 1D discrets pour former une famille de signaux discrets et *in fine* un espace d'échelles.
  - ▶ Une famille de signaux discrets dans  $\mathbb{R}$  peut être :
    - ▶ paramétrée par un indice réel positif ( $t \in \mathbb{R}^+$ ) : on obtient un continuum de signaux discret.
    - ▶ paramétrée par un indice discret ( $t \in \mathbb{N}$ ) : on obtient une famille dénombrable de signaux discret.
  - ▶ Les propriétés que l'on souhaite vérifiées par ces familles :
- Prop 1** Chaque représentation doit être générée par une transformation linéaire et invariante par translation.
- Prop 2** Le principe de causalité doit être vérifié au fur et à mesure que le paramètre  $t$  croît.
- Prop 3** Chaque représentation a la même résolution (pas de pyramide).
- ▶ Cette section du cours est tirée de [Lindeberg, 1994].

## Définition des n.e.e.d.

- ▶ La propriété 1 impose de chercher une famille générée par convolution (discrète) d'un certain noyau (discret).
- ▶ La propriété 2 impose de chercher des noyaux vérifiant la définition suivante :

### Définition 1 (Noyau d'espace d'échelles discret)

*Un noyau discret de convolution  $K : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  est un noyau d'espace d'échelles discret (noté **n.e.e.d.**) si pour tout signal discret  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  le nombre d'extrema locaux de  $K \star f$  n'est pas plus grand que celui de  $f$ .*

- ▶ Extremum local : changement de signe de la dérivée.

# Première propriété

## Proposition 1

Soit  $K$  un **n.e.e.d.** et soit  $\mathcal{L}$  un opérateur sur un signal qui commute avec  $K$  (i.e.  $K \star \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(K \star f)$ ). Alors le nombre d'extrema locaux de  $\mathcal{L}(K \star f)$  n'excède pas celui de  $\mathcal{L}(f)$ .

□ trivial ■

- ▶ Les opérateurs différentiels discrétisés sont des applications linéaires qui commutent avec  $K$ .
- ▶ Par exemple, la différence avant :

$$f'(x) \simeq f(x+1) - f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \star f = \Delta \star f$$

On a bien  $K(\Delta \star f) = \Delta \star [Kf]$

- ▶ On retrouve les propriétés de “lissage” des espaces d'échelles dans les espaces dérivées (constaté en continue).

## Autres axiomes

En plus des propriétés de causalité, de linéarité et d'invariance par translation, on ajoute trois autres propriétés :

1. La positivité : Soit la fonction de Dirac discrète définie par

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ▶ La fonction de Dirac est l'élément neutre de la convolution ( $f \star \delta = f$ ).
  - ▶  $\delta$  possède un extrema local et aucun passage par zéro
  - ▶ Par principe de causalité de  $K$ ,  $K \star \delta$  possède un extrema local et aucun passage par zéro.
  - ▶ Comme  $K \star \delta = K$ , alors  $K$  a tous ses coefficients de même signe.
2. L'unimodalité : le noyau est positif et possède un maximum local (en  $n_0$ )  $\Rightarrow$  monotone décroissant pour  $n > n_0$  et monotone croissant sinon.
  3. Normalisation :  $\sum K(n) = 1$  pour conserver la dynamique.

# Quelques rappels d'analyse complexe.

## Définition 2 (Fonction génératrice)

Soit  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  un signal discret. On appelle :

$$\varphi_c(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$$

la fonction génératrice de  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , définie pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

- ▶ On sait qu'il existe  $r$  et  $R$  tels que  $\varphi_c(z)$  converge (c'est-à-dire qu'elle est définie – c'est une somme sur  $\mathbb{Z}$ ) pour  $r < |z| < R$ . On parle d'anneau de convergence.
- ▶ Si  $|z| = 1$  alors  $z = e^{i\theta}$  et donc  $\varphi_c(e^{i\theta}) = \hat{c}(\theta)$  (T.F. discrete de  $c$ ).

## Noyaux binomiaux

- ▶ Ils sont définis par :

$$K^{(2)}(n) = \begin{cases} p & n = 0 \\ q & n = 1 \\ 0 & \end{cases}$$

avec  $p + q = 1$  (i.e.  $\sum K(n) = 1$ ).

- ▶ Ainsi,  $\forall f = \{f_n\}$  :

$$\begin{aligned} f \star K^{(2)} &= qf_{n-1} + pf_n \\ &= \frac{qf_{n-1} + pf_n}{p + q} \end{aligned}$$

il s'agit d'une interpolation linéaire entre  $f_{n-1}$  et  $f_n$ .

- ▶ Donc  $K^{(2)}$  ne crée pas de structures : il lisse de signal.
- ▶ Ce noyau est positif, unimodal si  $p \geq q$ , et respecte le principe de causalité : c'est un **n.e.e.d.** admissible.



# Noyaux binomiaux

## Suite

### Lemme 1

Si  $K_a$  et  $K_b$  sont deux **n.e.e.d.** alors  $K_a \star K_b$  est aussi un **n.e.e.d.**.

□ Il est évident que le principe de causalité est respecté :  $K_b \star f$  n'a pas plus d'extrema locaux que  $f$  et donc  $K_a \star K_b \star f$  n'a pas plus d'extrema locaux que  $K_b \star f$  donc  $f$ .

Il en va de même de la positivité et de l'unimodalité. ■

### Proposition 2

Tout noyau  $K$  de la forme  $\star_{i=1}^N K_i^{(2)}$  où  $K^{(2)}$  est binomiale et un **n.e.e.d.** admissible.

□ La preuve est évidente en appliquant récursivement le lemme 1. ■

# Noyaux binomiaux

## Suite

### Proposition 3

Tout noyau  $K$  dont la fonction génératrice (notée F.G.) s'écrit

$$\varphi_K(z) = cz^k \prod_{i=1}^N (p_i + q_i z)$$

est un **n.e.e.d.** admissible.

□

- ▶ La preuve utilise le lemme suivant :  $\varphi_{a \star b}(z) = \varphi_a(z)\varphi_b(z)$ .
- ▶ Écrivons la F.G. d'un noyau binomial :  
 $\varphi_{K^{(2)}}(z) = pz^0 + qz^1 = p + qz$ . Donc on reconnaît bien dans  $\prod_i (p_i + q_i z)$  la F.G. d'un noyau s'écrivant  $\bigstar_{i=1}^N K_i^{(2)}$  avec  $K_i^{(2)} = (p_i, q_i)$ .
- ▶ D'après la proposition 2, c'est un **n.e.e.d.** admissible.

# Noyaux binomiaux

## Suite de la preuve

- ▶ Le paramètre  $c$  représente l'invariance par facteur d'échelle.
- ▶ Le terme  $z^k$  représente d'invariance par translation.
- ▶ Reste la preuve du lemme :

$$a \star b(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n-m} b_m$$

$$\varphi_{a \star b}(z) = \sum_n \left( \sum_m a_{n-m} b_m \right) z^n$$

On pose  $p = n - m$  dans la somme sur  $n$  (et voir que  $\sum_n a_n z^n = \sum_n a_{n+p} z^{n+p} \forall p$ ) :

$$\begin{aligned} \varphi_{a \star b}(z) &= \sum_p \sum_m a_p b_m z^p z^m \\ &= \sum_p a_p z^p \sum_m a_m z^m = \varphi_a(z) \varphi_b(z) \blacksquare \end{aligned}$$

# Caractérisation des noyaux binomiaux

- ▶ Finalement, la proposition suivante donne une condition suffisante pour caractériser un **n.e.e.d.** à partir de sa F.G. :

## Proposition 4

*Un noyau  $K$  est un **n.e.e.d.** si sa F.G. possède des racines réelles et négatives.*

- Si la F.G. a de telles racines, alors elle s'écrit :

$$\varphi(z) = \prod_i (a_i + b_i z)$$

avec  $a_i > 0$  et  $b_i > 0$  : d'après la proposition 3 c'est bien la F.G. d'un **n.e.e.d.** ■

## Noyaux symétriques à 3 états

- ▶ Ils s'écrivent :  $K^{(3s)} = \begin{cases} q & n = -1, 1 \\ p & n = 0 \\ 0 & \end{cases}$  avec  $2q + p = 1$ .
- ▶ Leur F.G. :  $\varphi_{K^{(3s)}}(z) = qz^{-1} + p + qz = (\alpha + \beta z^{-1})(\alpha + \beta z)$  avec  $q = \alpha\beta$  et  $p = \alpha^2 + \beta^2$ .
- ▶ La T.F. :

$$\begin{aligned}\varphi_{K^{(3s)}}(e^{i\theta}) &= (\alpha + \beta e^{-i\theta})(\alpha + \beta e^{i\theta}) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos \theta \\ &= p + 2q \cos \theta\end{aligned}$$

# Noyaux symétriques à 3 états

## Étude de la T.F.

- ▶ Il suffit de voir que la T.F. est
  - ▶ monotone décroissante sur  $[0, \pi]$ ,
  - ▶ monotone croissante sur  $[-\pi, 0]$ ,
  - ▶ avec  $\hat{K}^{(3s)}(0) = p + 2q = 1$  et  $\hat{K}^{(3s)}(\pm\pi) = p - 2q$
- ▶ Dès lors que  $p \geq 2q$   $\hat{K}$  est unimodale et positive sur  $[-\pi, \pi]$ .
- ▶ Tout noyau dont la F.G. s'écrit  $cz^k \prod_i (p_i + q_i z)(p_i + q_i z^{-1})$  est un **n.e.e.d.** admissible.

## Cas des noyaux à 3 états quelconques

- ▶ Ils s'écrivent donc :  $K^{(3)}(n) = \begin{cases} c_{-1} & n = -1 \\ c_0 & n = 0 \\ c_1 & n = 1 \end{cases}$  avec  $c_i > 0$  et  $\sum c_i = 1$ .
- ▶ La F.G.  $\varphi_{K^{(3)}}(z) = c_{-1}z^{-1} + c_0 + c_1z$  possède deux racines :  
$$z_{1,2} = \frac{-c_0 \pm \sqrt{c_0^2 - 4c_{-1}c_1}}{2c_1}$$
- ▶  $\varphi_{K^{(3)}}(z) = (z_1 - z)(z_2 - z)z^{-1}$
- ▶ On remarque que  $z_i < 0 \Leftrightarrow c_0 \geq 2\sqrt{c_1c_{-1}}$
- ▶ On a donc une condition suffisante pour que  $K^{(3)}$  soit un **n.e.e.d.** admissible.
- ▶ Remarque : on retrouve bien le cas symétrique.  $c_1 = c_{-1}$  et la condition est bien  $c_0 \geq 2c_1 > 0$ .

# Classification générale des noyaux

But à atteindre :

- ▶ Classifier de façon générale tous les noyaux discrets.
- ▶ Ce qu'il manque :
  - ▶ les noyaux à  $n$  états quelconques,
  - ▶ les noyaux à support infini.
  - ▶ on peut distinguer les cas symétriques (voir annexe 5) : ils se caractérisent assez facilement à partir de leur matrice de Toeplitz associée.



# Théorème de classification de Schoenberg

## Théorème 1 (Schoenberg, 1953, admis.)

L'application  $K$  forme un **n.e.e.d.** si et seulement si sa F.G. s'écrit sous la forme :

$$\varphi_K(z) = \underbrace{cz^k}_1 \underbrace{e^{q_{-1}z^{-1} + q_1z}}_2 \prod_{i=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(1 + \alpha_i z)(1 + \delta_i z^{-1})}{(1 - \beta_i z)(1 - \gamma_i z^{-1})}}_4$$

avec  $c > 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $(q_{-1}, q_1, \alpha_i, \beta_i, \delta_i, \gamma_i) \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \beta_i + \delta_i + \gamma_i < \infty$ .

# Théorème de classification de Schoenberg

1.  $cz^k$  : invariance par translation et changement d'échelle,
2.  $e^{q_{-1}z^{-1}+q_1z}$  : fonction génératrice des séquences à support infini dite de *Pòlya*,
3.  $(1 + \alpha_i z)(1 + \delta_i z^{-1})$  : tous les noyaux à support fini,
4.  $\frac{1}{(1-\beta_i z)(1-\gamma_i z^{-1})}$  : séries génératrices.

## Séries génératrices

- Ces dénominateurs correspondent à des séries génératrices : il s'agit de F.G. de noyau (à support infini) récurrents de deux types :

$$f_{out}(n) = f_{in}(n) + \beta_i f_{out}(n-1)$$

$$f_{out}(n) = f_{in}(n) + \gamma_i f_{out}(n+1)$$

- En effet :

$$f_{out}(n) = f_{in}(n) + \beta_i f_{out}(n-1)$$

$$= f_{in}(n) + \beta_i [f_{in}(n-1) + \beta_i f_{out}(n-2)]$$

...

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_i^k f_{in}(n-k)$$

La F.G. de ce noyau  $\{\beta_i^n\}_{n \geq 0}$  est donc  $\sum_{n \geq 0} \beta_i^n z^n = \frac{1}{1-\beta_i z}$  (si  $|\beta_i z| < 1$ ).

## Séries génératrices (suite)

- Pour le second cas :

$$f_{out}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_i^k f_{in}(n+k) = \sum_k \gamma_i^{-k} f_{in}(n-k)$$

La F.G. du noyau  $\{\gamma_i^{-n}\}_{n \geq 0}$  est donc  $\sum_{n \geq 0} \beta_i^n z^{-n} = \frac{1}{1 - \gamma_i z^{-1}}$ .

- Termes  $c$  et  $z^k$  : ils correspondent simplement à l'invariance par changement d'échelle et par translation.

# Séquences de Pòlya

- ▶ Le terme 2 du théorème de classification décrit les F.G. de tous les autres noyaux à support infini (et qui ne correspondent pas à des séries génératrices).
- ▶ Pour caractériser ces noyaux, il faut utiliser la théorie discrète de la variation totale (attention, il existe aussi une théorie de la variation total en continue, différente!) : voir annexe 6.

## Définition et théorème 1 (Séquence de Pòlya, Schoenberg 1948, admis)

- ▶ Soit  $\{c_n\}$  un signal quelconque. On note  $V^-(c)$  le nombre maximal de changements de signe dans la séquence  $\{c_n\}$  privée de ses zéros.
- ▶ Une séquence  $\{c_n\}$  telle que :

$$V^-(c \star f) \leq V^-(f) \quad \forall f$$

est appelée séquence de Pòlya et forme un **n.e.e.d.** valide.

# Caractérisation générale des noyaux (fin)

- ▶ Les séquences de Pòlya sont identifiées par leur F.G. grâce au résultat suivant :

## **Théorème 2 (Karlin, admis.)**

*Soit une séquence de Pòlya à support infini. Ce noyau constitue un semi-groupe si et seulement si sa F.G. s'écrit  $e^{az^{-1}+bz}$  avec  $a > 0$  et  $b > 0$ .*

- ▶ Conclusion :
  - ▶ les noyaux à support fini (c'est le cas pratique) sont construits par itération des noyaux binomiaux :

$$h = \star_{i=0}^n K_i^{(2)}$$

- ▶ les noyaux à support infini sont plus exotiques : nous allons en voir une définition (presque) explicite.

# Construction axiomatique des e.e.d.

## Cas du paramètre d'échelle discret

- ▶ Il faut construire la famille de signaux discret :

$$L(x, t) \quad x \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}^*$$
$$L(x, 0) = f(x)$$

- ▶ En pratique, on a plutôt  $t \in \{t_1, \dots, t_N\}$  un nombre fini d'échelles (car on est borné par la taille du signal).
- ▶ La représentation à l'échelle  $t_i$  se définit par récurrence :

$$L(., t_i) = K_i \star L(., t_{i-1}) \text{ avec } K_i = \star_{k=1}^N K_k^{(2)}$$

- ▶ En combinant chaque représentation à une échelle  $t_i$  avec un suréchantillonnage adéquat du signal, on se ramène à une représentation pyramidale.

## Cas du paramètre d'échelle continu

- ▶ Ce cas est plus intéressant : il permet le choix d'une échelle précise, calculée de façon directe.
- ▶ Le but : construire un noyau  $K$  qui dépende continuellement de  $t$  et qui soit un **n.e.e.d.** admissible.
- ▶ On choisit une représentation du type :

$$L(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} T(n, t) f(x - n) \quad (9)$$

qui permet évidemment l'invariance par translation du noyau.

- ▶ Seconde propriété : le semi-groupe, soit un noyau  $T$  vérifiant  $T(\cdot, t) \star T(\cdot, s) = T(\cdot, t + s)$ .
- ▶ Troisième propriété : la normalisation soit  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} T(n, t) = 1$ .
- ▶ Enfin (ce n'est pas obligatoire) : on se restreint aux noyaux symétriques ( $T(n, t) = T(-n, t)$ ).



### **Théorème 3 (C.N.S. pour un n.e.e.d.)**

Soit  $T$  un noyau symétrique à support infini, dépendant continuellement de  $t$ , formant un semi-groupe. Alors  $T$  est un **n.e.e.d.** s'il s'écrit :

$$T(n, t) = e^{-\alpha t} I_n(\alpha t) \quad t > 0, n \geq 0$$

où  $I_n(t) = (-i)^n J_n(it)$  et  $J_n$  est la fonction de Bessel.

### **Définition 3 (Fonction de Bessel)**

Soit l'EDP :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0$$

avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les fonctions  $x \mapsto y(x)$  qui sont solutions sont appelées fonctions de Bessel.

Si elles sont définies en 0, on les note  $J_n$  et sont appelées fonctions de Bessel du premier type (les solutions non définies en 0 ne nous intéressent pas).

- ▶ La fonction de Bessel a une expression (relativement) explicite :

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p} p! (n+p)!} x^{2p}$$

- ▶ et beaucoup de propriétés intéressantes, dont :

$$J_n(x) = J_n(-x)$$

$$J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

$$J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) = -2J'_n(x)$$

- ▶ Exercice : vérifiez que l'on a :

$$I_n(x) = I_n(-x) \tag{10}$$

$$I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} I_n(x) \tag{11}$$

$$I_{n+1}(x) + I_{n-1}(x) = 2I'_n(x) \tag{12}$$

## Preuve du théorème

- ▶ On utilise un résultat de Abramovitz et Stegun (1964) : F.G. de la fonction de Bessel.

$$\varphi_I(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_n(t) z^n = e^{\frac{t}{2}(z+z^{-1})}$$

- ▶ En utilisant le théorème 2 (Karlin), on reconnaît la F.G. d'une séquence de Pòlya et donc la fonction de Bessel est bien un **n.e.e.d.** admissible et cela  $\forall t$ .
- ▶ Quid de la normalisation ? On a  $\varphi_I(1) = e^t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_n(t)$  donc le noyau :

$$\{e^{-t} I_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

est bien un **n.e.e.d.** normalisé à support non borné.

## Preuve du théorème (fin)

- Pour finir, on peut fixer un paramètre  $\alpha > 0$  et faire varier continuellement  $t$ , le noyau :

$$T(n, t) = e^{-\alpha t} I_n(\alpha t)$$

forme bien un **n.e.e.d.** normalisé à support non borné.

### Définition 4 (Analogie discret du noyau Gaussien)

*Le noyau  $T(n, t) = e^{-\alpha t} I_n(\alpha t)$  est appelé “analogie discret du noyau gaussien” ou par abus de langage “noyau gaussien discret”.*

- Ce choix de nom n'est pas neutre : ce noyau possède les mêmes propriétés en discret que le noyau gaussien en continu.

## Quelques propriétés du noyau gaussien discret

$$1. T(n, 0) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} = \delta(n)$$

C'est le Dirac discret. On a  $f \star l(\cdot, 0)(n) = f(n)$  et donc  $L(n, 0) = f(n)$

$$2. T(n, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{n^2}{2t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left( \frac{1}{\sqrt{2t}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right) \right)$$

3.  $T$  est centrée car symétrique.

4. Variance :  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 T(n, t) = t$ . Se démontre en utilisant (11) :

$$\begin{aligned} \sum n^2 e^{-t} l_n(t) &= \sum n^2 e^{-t} \frac{t}{2n} (l_{n-1} - l_{n+1}) \\ &= \frac{e^{-t}}{2} \sum (n l_{n-1} - n l_{n+1}) = \frac{e^{-t}}{2} \sum ((m+1) l_m - (m-1) l_m) \\ &= t e^{-t} \sum l_m(t) = t \times 1 \end{aligned}$$

## Propriété du noyau gaussien discret

- La propriété la plus importante :

### **Théorème 4**

*L'analogie discret du noyau gaussien est solution de l'équation de la chaleur discrétisée en espace, i.e. l'équation :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial t}(n, t) &= \frac{1}{2} (L(n+1, t) - 2L(n, t) + L(n-1, t)) \\ L(n, 0) &= f(n)\end{aligned}\quad (13)$$

- La preuve découle directement de la propriété (12) de la fonction de Bessel.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} T(n, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (e^{-t} I_n(t)) = e^{-t} I'_n(t) - e^{-t} I_n(t) \\ &= \frac{e^{-t}}{2} (I_{n-1}(t) + I_{n+1}(t)) - e^{-t} I_n(t)\end{aligned}$$

## Fin de la preuve

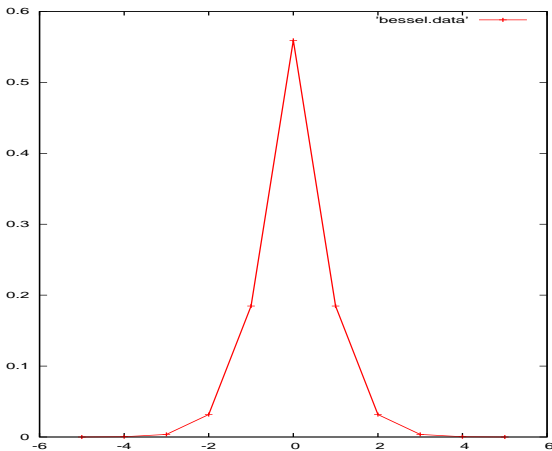
$$\frac{\partial}{\partial t} T(n, t) = \frac{1}{2} (T(n-1, t) - 2T(n, t) + T(n+1, t))$$

et donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} L(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \sum T(n, t) f(x-n) \\ &= \sum \frac{\partial}{\partial t} T(n, t) f(x-n) \\ &= \frac{1}{2} (L(n-1, t) - 2L(n, t) + L(n+1, t)) \end{aligned}$$



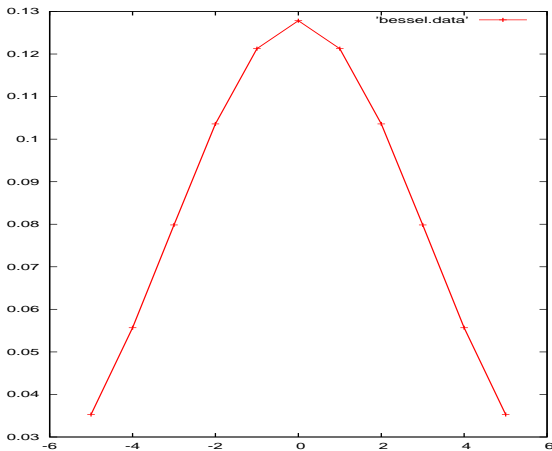
# Graphe du noyau



**Figure:** Graphe pour  $n = -5, \dots, 5$  et  $t = 0.7$

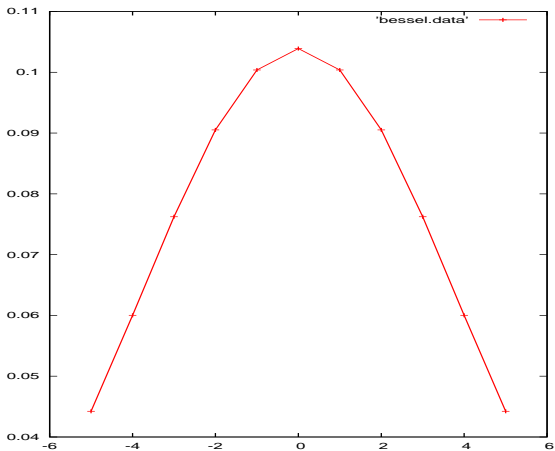


# Graphe du noyau



**Figure:** Graphe pour  $n = -5, \dots, 5$  et  $t = 1.0$

# Graphe du noyau



**Figure:** Graphe pour  $n = -5, \dots, 5$  et  $t = 1.5$

## Lien avec les e.e.d. à temps discret

- ▶ Si on discrétise en temps l'équation (13), on obtient :

$$\begin{aligned}L_n^{k+1} &= L_n^k + \frac{\Delta t}{2} \left( L_{n-1}^k - 2L_n^k + L_{n+1}^k \right) \\ &= \frac{1}{2} \Delta t L_{n-1}^k + (1 - \Delta t) L_n^k + \frac{1}{2} \Delta t L_{n+1}^k \\ &= K \star L_n^k\end{aligned}$$

avec  $K = \left( \frac{1}{2} \Delta t \quad 1 - \Delta t \quad \frac{1}{2} \Delta t \right)$

- ▶ On retrouve un noyau symétrique à trois états : on sait que ce noyau sera un **n.e.e.d.** si  $\Delta t \leq \frac{1}{2}$  : on retrouve la condition de stabilité du schéma d'Euler explicite de l'équation de la chaleur.

Discrétisation de l'équation de la chaleur

Formulation axiomatique des e.e.d.

**D'autres choix pour le noyau discret ?**

Extension à  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$

# D'autres choix pour le noyau discret ?

## Échantillonnage de la gaussienne

- C'est l'approche la plus naturelle : discrétiser l'opération :

$$L(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-y^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} f(x - y) dy$$

en

$$\tilde{L}(n, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-m^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} f(n - m) \quad (14)$$

est-elle correcte ?

### Proposition 5

*La transformation (14) d'un niveau  $t_1 \geq 0$  vers un niveau  $t_2 > t_1$  forme une transformation d'espace d'échelle si et seulement si  $t_1 = 0$  ou  $\frac{t_2}{t_1}$  est un entier impair.*

## Preuve de la proposition



- ▶ Calculons la F.G. du noyau gaussien échantillonné, c'est-à-dire la fonction  $\varphi_t(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q_t^{n^2} z^n$  avec  $q_t = e^{-\frac{1}{2t}}$ .
- ▶ Mumford a fait ce calcul (1983), il trouve :

$$\varphi_t(z) = C_t \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + q_t^{2n+1} z)(1 + q_t^{2n+1} z^{-1})$$

$$\text{avec } C_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q_t^{2n}).$$

- ▶ La F.G.  $\varphi_t$  est bien celle d'un **n.e.e.d.** (théorème de classification de Schoenberg) mais elle correspond à une transformation de l'échelle 0 vers une échelle  $t > 0$  quelconque.

## Preuve de la proposition (suite)

- Considérons maintenant  $t_1 > 0$  vers  $t_2 > t_1$ . On a :

$$\varphi_{\tilde{L}_1}(z) = \varphi_{t_1} \varphi_{in}(z)$$

$$\varphi_{\tilde{L}_2}(z) = \varphi_{t_2} \varphi_{in}(z) = \varphi_{diff}(z) \varphi_{in}(z)$$

- On a donc :

$$\varphi_{diff}(z) = \frac{\varphi_{t_2}(z)}{\varphi_{t_1}(z)} = \frac{C_{t_2} \prod_{m>0} (1 + q_{t_2}^{2m+1} z)(1 + q_{t_2}^{2m+1} z^{-1})}{C_{t_1} \prod_{n>0} (1 + q_{t_1}^{2n+1} z)(1 + q_{t_1}^{2n+1} z^{-1})}$$

- Pour rappel, la forme générale des **n.e.e.d.** symétriques est :

$$\varphi(z) = \prod_{i \geq 0} \frac{(1 + \alpha_i z)(1 + \delta_i z^{-1})}{(1 - \beta_i z)(1 - \gamma_i z^{-1})}$$

- Le dénominateur ne convient pas : il faudrait que les coefficients  $q_t$  soient négatifs mais ils ne le sont pas !

## Preuve de la proposition

- ▶ Il faut donc que le dénominateur se simplifie avec le numérateur :

$$\begin{aligned}\forall n, \exists m \quad & \left| \frac{1 + q_{t_2}^{2m+1} z}{1 + q_{t_1}^{2n+1} z} = 1 \right. \\ \Leftrightarrow & q_{t_2}^{2m+1} = q_{t_1}^{2n+1} \\ \Leftrightarrow & 2m = \frac{t_2}{t_1}(2n+1) - 1\end{aligned}$$

- ▶ Il est clair que cette équation est vraie pour  $\frac{t_2}{t_1}$  entier. ■
- ▶ Conclusion :
  - ▶ L'échantillonnage du noyau gaussien ne forment pas un **n.e.e.d.**.
  - ▶ Le problème : le non respect de la propriété de semi-groupe : le principe de causalité n'est pas systématiquement respecté entre des échelles intermédiaires.



# Conclusion pour le 1D

- Les espaces d'échelles en discret à temps continu peuvent être calculés :

1. soit en discrétisant l'équation de la chaleur

## remarque

Il faut adapter le pas de temps pour obtenir l'échelle désirée : c'est un procédé itératif.

2. soit en convoluant par l'analogue discret du noyau gaussien

## remarque

La fonction de Bessel est un objet complexe à calculer, mais il existe des implémentations libres comme GSL (GNU Scientific Library). Néanmoins, le procédé de calcul de la fonction de Bessel est lui-même itératif ...

3. La convolution par le noyau gaussien discrétisé reste possible à condition de partir de l'échelle 0.

Discrétisation de l'équation de la chaleur

Formulation axiomatique des e.e.d.

D'autres choix pour le noyau discret ?

**Extension à  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$**

# Objectif

- ▶ Proposer une construction axiomatique en 2D avec le paramètre d'échelle continu.
- ▶ Toutes les propriétés vues en 1D ne s'appliquent pas en 2D mais les aspects les plus importants demeurent :
  - ▶ linéarité et invariance par translation de la représentation,
  - ▶ propriété de semi-groupe,
  - ▶ principe de causalité, unimodalité.

# Propriétés minimales à définir

## Définition 5 (Famille de noyaux de pré-espace d'échelles)

Soit  $T : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

1.  $T(., 0) = \delta(.)$ ,
2.  $T(., s)$  forme un semi-groupe,
3.  $T$  est symétrique (condition formellement non nécessaire),
4.  $T(., s)$  converge vers  $\delta(.)$  avec  $s \rightarrow 0$  :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|T(\mathbf{x}, s) - \delta(\mathbf{x})\|_1 = 0$$

Une telle famille est appelée famille de noyaux de pré-espace d'échelles.

## Propriétés minimales (suite)

- ▶ Une famille de noyaux appliquée à un signal engendre une famille de signaux.

### Définition 6 (Représentation en pré-espace d'échelles)

On appelle représentation en pré-espace d'échelles d'une fonction  $f$  la famille paramétrée  $L$  définie par :

$$L(\mathbf{x}, 0) = f(0) \quad (15)$$

$$L(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{x}' \in \mathbb{Z}^n} T(\mathbf{x}', t) f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = T(., t) \star f(x) \quad (16)$$

où  $T(., t)$  est une famille de noyaux de pré-espace d'échelles.

- ▶ L'équation (15) est l'équation (16) appliquée à  $T(., 0) = \delta(.)$ .

# Premier résultat important

## Théorème 5 (Lindeberg)

Si  $L$  est une représentation en pré-espace d'échelles, alors elle vérifie :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \mathcal{A}L \quad (17)$$

où  $\mathcal{A}$  linéaire et invariant par translation et défini par

$$\mathcal{A}g = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_h(g) - g}{h} \quad (18)$$

pour un signal  $g$  quelconque.

Remarques :

- ▶ la linéarité et l'invariance par translation impose un filtrage par convolution (équation (16)),
- ▶ L'opérateur  $\mathcal{A}$  est appelé générateur infinitésimal et caractérise la famille  $T$ .

## Preuve du théorème



- Par définition de la dérivé et de  $L$  (équation (16)), on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial t}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(w, t+h) - L(x, t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{t+h} \star f - T_t \star f}{h}\end{aligned}$$

- On a  $T_{t+h} \star f = T_h \star (T_t \star f)$  par propriété de semi-groupe. Donc :

$$\frac{\partial L}{\partial t}(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_h \star (T_t \star f) - T_t \star f}{h}$$

## preuve (suite)

- ▶ On sait que  $T_h$  tend vers  $\delta$ , donc la limite  $\frac{T_h \star g - \delta \star g}{h}$  existe et est définie.
- ▶ Appelons  $\mathcal{A}_T$  cette limite, on a :

$$\mathcal{A}_T g = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_h \star g - \delta \star g}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_h \star g - g}{h}$$

- ▶ Puisque on a :

$$\frac{\partial L}{\partial t}(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_h \star (T_t \star f) - T_t \star f}{h}$$

alors :

$$\frac{\partial L}{\partial t}(x, t) = \mathcal{A}_T(T_t \star f) = \mathcal{A}_T L$$

- ▶ Donc  $\mathcal{A}_T$  coïncide avec la matrice  $\mathcal{A}$  de l'équation (17). ■



## Conclusion provisoire

- ▶ Les représentations p.e.e. (pré-espace d'échelles) possèdent donc la propriété d'être solution d'une équation aux dérivées partielles.
- ▶ Il manque une dernière propriété pour faire des pré-espace d'échelles des espaces d'échelles : la causalité !

## Définition 7 (Famille de noyaux d'espace d'échelles)

- (a) Une famille  $T$  paramétrée :  $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  de noyaux pré-espace d'échelles est dite famille de noyaux d'espace d'échelles si elle vérifie la propriété suivante : Pour tout signal  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et pour tout point  $x_0 \in \mathbb{Z}^n$ , on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(T \star f)(x_0, t) \leq 0 & \text{si } x_0 \text{ est un max. local de } f \\ \frac{\partial}{\partial t}(T \star f)(x_0, t) \geq 0 & \text{si } x_0 \text{ est un min. local de } f \end{cases} \quad (19)$$

- (b) Une représentation en espace d'échelles d'un signal  $f$  est la famille paramétrée obtenue de  $f$  à partir d'une famille de noyaux vérifiant (a).

- ▶ Remarque :  $x_0$  est un max. (resp. min.) local de  $f$  si  $f(x) \geq f(x_0)$  (resp.  $\leq$ )  $\forall x \in \mathcal{V}_a(x_0)$ .
- ▶  $\mathcal{V}_a$  est un voisinage discret, défini par exemple par :

$$\mathcal{V}_a(x_0) = \{x \in \mathbb{Z}^n / \{x_0\} \mid \|x - x_0\|_\infty \leq a\} \quad (20)$$

# Générateur infinitésimal

- ▶ L'opérateur  $\mathcal{A}$  (eq (17)) caractérise la famille de noyaux  $T$  (on l'a vu). Toutefois : la propriété de causalité impose des contraintes supplémentaires sur  $\mathcal{A}$ .

## Définition 8

$\mathcal{A}$  est appelé *générateur infinitésimal d'e.e.* si les coefficients  $\{a_\xi\}_{\xi \in \mathbb{Z}^n}$ , définis par  $(\mathcal{A}L)(x, t) = \sum_\xi a_\xi L(x - \xi, t)$ , vérifient :

1.  $\exists n > 0 \mid a_\xi = 0 \quad \forall \xi \notin \mathcal{V}_n(0)$  (support borné)
2.  $a_\xi \geq 0 \quad \forall \xi \neq 0$  (positivité)
3.  $\sum_\xi a_\xi = 0$
4. symétrie totale par rapport à  $\vec{0}$ .

## Théorème 6 (Lindeberg)

Les représentations  $L$  en espace d'échelles vérifient l'équation (17) où  $\mathcal{A}$  est un générateur infinitésimal d'espace d'échelles. On le note  $\mathcal{A}_{ee}$  (pour le différencier des générateurs de p.e.e.).

## Preuve du théorème



- Les représentations en e.e. étant des aussi des représentations en p.e.e. on sait qu'elles vérifient l'équation (17).  
Il faut donc montrer que les conditions données par (19) impliquent les conditions sur  $\{a_\xi\}$  (définition 8).
- Support borné : on procède en exhibant un contre exemple.  
Soit un signal  $f_1$  tel que :

$$f_1(\xi) = \begin{cases} \epsilon > 0 & \xi = \vec{0} \\ 0 & \xi \in \mathcal{V}(\vec{0}) \\ 1 & \xi = \xi_0 \notin \mathcal{V}(\vec{0}) \end{cases}$$

Ce signal possède un maximum local en  $\vec{0}$ . On a :

$\frac{\partial L}{\partial t}(\vec{0}) = \mathcal{A}f_1 = \epsilon \times a_0 + 1 \times a_{\xi_0}$ . Donc le principe de causalité implique  $\epsilon a_0 + a_{\xi_0} < 0$ . Pour que ce soit toujours vrai, il faut donc que  $a_{\xi_0} = 0$  : le support est donc borné.

## preuve (suite)

- ▶  $\sum_{\xi} a_{\xi} = 0$  : soit le signal  $f_2(\xi) \equiv 1$  sur le support de  $T$ .  $\vec{0}$  est donc à la fois un maximum et un minimum local. Donc vérifie :  
 $\frac{\partial L}{\partial t}(\vec{0}) = \mathcal{A}f_2 = \sum_{\xi} a_{\xi} \leq 0$  et  $T \star f_2 = \sum_{\xi} a_{\xi} \geq 0$  donc  $\sum_{\xi} a_{\xi} = 0$ .
- ▶ Positivité : comme  $\sum_{\xi} a_{\xi} = 0$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial t} &= \sum_{\xi} a_{\xi} L(x - \xi, t) \\ &= \sum_{\xi \neq 0} a_{\xi} L(x - \xi, t) + a_0 L(x, t) \\ &= \sum_{\xi \neq 0} a_{\xi} L(x - \xi, t) - \sum_{\xi \neq 0} a_{\xi} L(x, t) \\ &= \sum_{\xi \neq 0} a_{\xi} (L(x - \xi, t) - L(x, t))\end{aligned}$$

## preuve (suite)

Si  $x_0$  est un max. local alors  $\frac{\partial L(x_0, t)}{\partial t} \leq 0$  et  
 $L(x_0 - \xi, t) - L(x_0, t) \leq 0 \forall \xi \neq 0$  d'où  $a_\xi \geq 0 \forall \xi \neq 0$ .

- ▶ Symétrie (sur toutes les coordonnées) : conséquence directe de la symétrie des noyaux  $T$ . ■
- ▶ Le théorème 6 permet donc de caractériser tous les générateurs infinitésimaux d'e.e. pour  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}^2$  et  $\mathbb{Z}^3$ .

## Caractérisation des générateurs

Une représentation en e.e. d'un signal vérifie :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \mathcal{A}L$$

avec  $\mathcal{A}$  défini tel que :

- ▶ Dans  $\mathbb{Z}$  :  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b & a \end{pmatrix}$  tel que  $a + b + a = 0$  et  $a > 0$ . Non unicité du noyau : si  $a = 1$  alors  $b = -\frac{1}{2}$  : on retrouve le laplacien.

- ▶ Dans  $\mathbb{Z}^2$  :  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$  avec  $4a + 4b + c = 0$ ,  $a, b \geq 0$ . On

décompose  $\mathcal{A}$  en deux matrices :

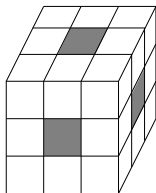
$$\mathcal{A} = \alpha_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\nabla_+^2} + \alpha_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\nabla_x^2}$$

# Caractérisation des générateurs

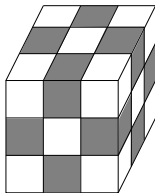
Là encore : non unicité du noyau.

- ▶ Cas séparable :  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ .
  - ▶ Cas isotrope :  $\alpha_1 = \frac{2}{3}, \alpha_2 = \frac{1}{3}$ .
- ▶ Dans  $\mathbb{Z}^3$  :  $\mathcal{A}$  se décompose ainsi :

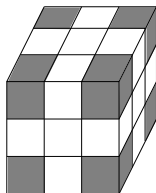
$$\mathcal{A} = \alpha_1 \nabla_7^2 + \alpha_2 \nabla_{+3}^2 + \alpha_3 \nabla_{\times 3}^2$$



$\nabla_7^2$



$\nabla_{+3}^2$



$\nabla_{\times 3}^2$



## Caractérisation des générateurs

- Ces trois opérateurs s'écrivent :

$$\begin{aligned}(\nabla_7^2 f)_{0,0,0} &= f_{-1,0,0} + f_{1,0,0} + f_{0,-1,0} \\ &\quad + f_{0,1,0} + f_{0,0,-1} + f_{0,0,1} - 6f_{0,0,0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{+3}^2 f)_{0,0,0} &= \frac{1}{4} (f_{-1,-1,0} + f_{-1,1,0} + f_{1,-1,0} + f_{1,1,0} \\ &\quad + f_{-1,0,-1} + f_{-1,0,1} + f_{1,0,-1} + f_{1,0,1} \\ &\quad + f_{0,-1,-1} + f_{0,-1,1} + f_{0,1,-1} + f_{0,1,1} - 12f_{0,0,0})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{\times 3}^2 f)_{0,0,0} &= \frac{1}{4} (f_{-1,-1,-1} + f_{-1,-1,1} + f_{-1,1,-1} + f_{-1,1,1} \\ &\quad + f_{1,-1,-1} + f_{1,-1,1} + f_{1,1,-1} + f_{1,1,1} - 8f_{0,0,0})\end{aligned}$$

# Annexes

Généralisation aux noyaux symétriques, de support infini

Séquences de Polya

## Généralisation aux noyaux symétriques

- ▶ Les propriétés des noyaux symétriques à 3 états sont généralisables à des noyaux symétriques de taille quelconque.
- ▶ Écrivons la convolution comme un produit matriciel :

$$\begin{aligned}c \star f(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} c_{m-n} f_m \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} C_{m,n} f_m = (Cf)_m\end{aligned}$$

$$\text{avec } C = \begin{pmatrix} c_0 & c_{-1} & \cdots & c_{1-N} \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_{2-N} \\ & & \ddots & \\ c_{N-1} & \cdots & & c_0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Ces matrices sont appelées “Matrices de Toeplitz”.

# Noyaux symétriques

## Proposition 6

*Si la matrice associée à un signal discret possède une valeur propre réelle et négative alors le noyau de convolution associé ne peut pas être un **n.e.e.d.** admissible.*

*La matrice d'un **n.e.e.d.** symétrique à toutes ses v.p. réelles et positives.*



- ▶ Par définition des valeurs et vecteurs propres ( $Av_i = \lambda_i v_i$ ) si  $\lambda_i \in \mathbb{R}^-$  alors  $v_i$  et  $Av_i$  sont de direction opposée ce qui contredit le principe de positivité des **n.e.e.d.**
- ▶ Un signal discret symétrique a évidemment une matrice associée symétrique. Or les v.p. d'une telle matrice sont réelles et positives.



## Positivité de la T.F.

### Théorème 7 (Grenader et Szegö, 1959, admis)

Soit un noyau discret symétrique de taille  $N$ . On note  $\lambda_{min}^N$  la plus petite v.p. de la matrice associée au noyau. Soit  $m$  le minimum de la T.F. du noyau. Alors on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty}^+ \lambda_{min}^N = m \quad \lambda_{min}^N > m \forall N$$

Ce théorème important permet le résultat suivant :

### Proposition 7

Soit  $K$  un **n.e.e.d.** symétrique à support fini, alors  $\hat{K}(\theta) \geq 0$

□ Si  $m < 0$ , alors il existe  $N_0$  tel que  $\lambda_{min}^{N_0} < 0$  ce qui contredit que  $K$  soit un **n.e.e.d.** ■

# Unimodalité de la T.F.

## Proposition 8

*Un n.e.e.d. symétrique à support fini possède une T.F. unimodale.*

La preuve, trop longue pour être décrite ici, est donnée dans le livre de Lindeberg p. 72–74.

## Définitions

- ▶ On rappelle qu'une transformation linéaire  $K$  sur un signal discret  $f$  s'écrit en toute généralité :

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}} K(x, y) f(y)$$

- ▶  $K$  est donc une matrice de taille infinie.

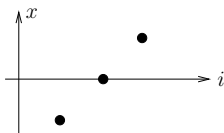
### Définition 9 (Variations d'un signal discret)

- ▶  $V^-(x)$  : le nombre de changement de signe dans  $\{x_i\}^0$
- ▶  $V^+(x)$  : le nombre maximal de changement de signe dans  $\{x_i\}^+$  (ou dans  $\{x_i\}^-$ ).

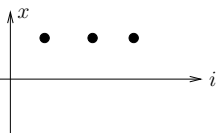
Avec :

- ▶  $\{x_i\}^0$  : la suite  $\{x_i\}$  privée de ses zéros,
- ▶  $\{x_i\}^+$  : la suite  $\{x_i\}$  dont les zéros sont remplacés par  $+1$ ,
- ▶  $\{x_i\}^-$  : la suite  $\{x_i\}$  dont les zéros sont remplacés par  $-1$ ,

# Exemples de variation



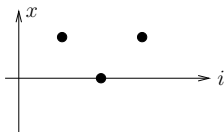
(a)  $V^- = V^+ = 1$



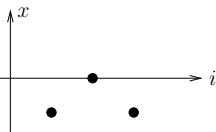
(b)  $V^- = V^+ = 0$



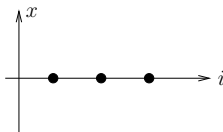
(c)  $V^- = V^+ = 0$



(d)  $V^- = 0, V^+ = \max(1, 0) = 1$



(e)  $V^- = 0, V^+ = \max(0, 1) = 1$



(f) Convention :  $V^- = V^+ = -1$



# Applications diminuante en variation

## Définition 10 (Mineure d'une matrice $K$ )

On appelle mineure d'ordre  $r$  de la matrice  $K$  la quantité :

$$\det (K(x_i, y_i)_{i,j=1 \dots r})$$

## Définition 11

Un noyau est régulier en signe si toutes ses mineures d'ordre  $r > 0$  ont le même signe.

## Théorème 8

Soit  $A$  une matrice  $n \times m$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- ▶  $V^+(Ax) \leq V^-(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m / \vec{0}$
- ▶  $A$  est régulière en signe.

Une application linéaire de matrice  $A$  vérifiant l'une de ces propriétés est dite "diminuante en variation".

# Les séquences de Pòlya sont nos candidates

## Définition 12

*Un noyau est dit totalement positif si sa matrice associée a toutes ses mineures positives ou nulle.*

## Définition 13 (Cas particulier des matrices de Toeplitz)


*Un noyau discret  $\{c_n\}$  est dit "séquence de Pòlya" si sa matrice associée  $\{c_{i-j}\}_{i,j}$  est totalement positive. Elle est dite normalisée si sa F.G. converge dans un anneau  $r < |z| < R$  tel que  $0 < r < 1 < R$ .*


## Théorème 9 (Schoenberg, 1948, admis.)

*Soit  $\{c_n\}$  un noyau discret.  $\{c_n\}$  est une séquence de Pòlya si  $V^-(c \star f) \leq V^-(f) \quad \forall f$ .*

Conclusion : toute séquence de Pòlya forme un **n.e.e.d.** valide.

 Ames, W. (1977).  
*Numerical Methods for Partial Differential Equations.*  
Academic Press, New York.

 Lindeberg, T. (1994).  
*Scale-Space Theory in Computer Vision.*  
Kluwer Academic Publishers.

 Vetterling, W., Teukolsky, S., and Press, W. (1992).  
*Numerical Recipes in C : the art of scientific computing*, chapter  
Partial Differential Equations.  
Number ISBN 0-521-43108-5. Cambridge University Press.