Examen AMO (NI–600)

UPMC, Master Informatique, Spécialité IMA

26 janvier 2012
Durée de l'examen : deux heures.

Documents autorisés : A PRECISER pour la partie Ondelettes
et les polycopiés (éventuellement annotés) de la partie Espaces d'échelles.
Portables éteints et rangés.
Les deux parties sont indépendantes et à rendre sur des copies séparées.

Première partie : Ondelettes (10 points)

Seconde partie : Espaces d'échelles (10 points)

Attention, le barème est approximatif. **On veillera à justifier chaque réponse.**

Exercice 1 – Compréhension du cours (3 points)

Répondre, **en justifiant**, aux questions suivantes :

1. On considère le filtre discret moyenneur défini sur une fenêtre carrée de taille t :
   - Rappeler sa définition mathématique appliquée à une image (*i.e.* exprimer $T_t(I)$). Ce filtre est-il linéaire ?
   - Respecte-t-il la causalité ? l'unimodalité ? la normalisation ?
   - Localise-t-il bien les contours ?
   - Est-il un noyau d'espace d'échelle admissible ?
2. On considère maintenant une représentation linéaire d'une image définie sur un domaine continu. Le noyau gaussien dérivé est-il un noyau d'espace d'échelle ?
3. Quand on discrétise le noyau gaussien, il y a plusieurs précautions à prendre. Quelles sont-elles ?
4. On rappelle la définition du détecteur de Harris-Laplace appliqué sur une image I :

$$\begin{aligned} R(L_t) &= \det(H(L_t) - \tau \operatorname{tr}(H(L_t)) \\ H(L_t) &= G_\sigma \star \left(\nabla L_t^T \nabla L_t\right) \end{aligned}$$

   où L_t est la représentation à l'échelle t de l'image I, G_σ le noyau gaussien de variance σ^2, det est le déterminant d'une matrice et tr, sa trace. Rappeler les rôles des paramètres t, σ et τ.

Exercice 2 – Discrétisation (3 points)

- Le schéma FTCS de l'équation de la chaleur est-il explicite ou implicite ? Est-il stable ? Si oui, à quelle conditions ?
- Même question pour le schéma BTCS.

- Soit le schéma numérique suivant :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \frac{\triangle t}{2\triangle x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

où $u_j^n = u(x_0 + \triangle xj, t_0 + \triangle tn)$ et u est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$.
- De quelle équation aux dérivées partielles ce schéma est-il l'approximation ?
- Montrer que ce schéma est stable (au sens de l'analyse de Fourier) modulo une condition sur $\triangle x$ et $\triangle t$ que l'on donnera (indication : se souvenir que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$).

Exercice 3 – Application (4 points)

Le but de cet exercice est de définir un espace d'échelles pour les images multispectrales. Dans une image multispectrale à n bandes, on trouve un n-uplets de valeurs à chaque pixel, et à chacune de ces valeurs correspond une acquisition dans l'une des n bandes disponibles. Une telle image est donc représentée par une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$, $I(x, y, \lambda)$, deux variables (x, y) pour le domaine spatial et une variable λ pour le domaine spectral.

Dans un premier temps, on considérera que I est une fonction continue sur ses 3 variables. On souhaite maintenant construire une représentation multi-échelles en espace et une représentation multi-échelles en λ.

1. On fixe la variable λ à λ_0, définir la famille de fonctions $(x, y) \mapsto L^1(x, y, \lambda_0, t)$ telle qu'elle soit une représentation multi-échelles linéaire et continue de $(x, y) \mapsto I(x, y, \lambda_0)$ et t est un paramètre d'échelle spatial. Donner l'équation aux dérivées partielles dont L^1 est la solution.
2. On fixe maintenant la position (x, y) à (x_0, y_0), définir la famille de fonctions $\lambda \mapsto L^2(x_0, y_0, \lambda, s)$ telle qu'elle soit une représentation multi-échelles linéaire et continue de $\lambda \mapsto I(x_0, y_0, \lambda)$ et s est un paramètre d'échelle spectral. Donner l'équation aux dérivées partielles dont L^2 est la solution.
3. Finalement, définir la famille de fonctions $(x, y, \lambda) \mapsto L(x, y, \lambda, t, s)$ paramétrées par s et t telle que si on fixe s on a une représentation multi-échelle linéaire de paramètre t et si on fixe t on a également une représentation multi-échelle linéaire de paramètre s. Donner le système d'équations aux dérivées partielles que vérifie L.

On souhaite maintenant appliquer cette représentation aux images couleurs RGB. Une image RBG est une image à trois bandes, une bande rouge, une bande verte et une bande bleue. Donc $n = 3$.

Pour appliquer ce qui précède, on choisit d'**échantillonner** le noyau gaussien et on s'intéresse à la représentation multi-échelles sur le paramètre de bande λ. Puisque l'espace des bandes est de petite dimension (3), on utilisera la convolution **circulante**[1] pour calculer les représentations multi-échelles sur le paramètre s.

1. Exprimer la représentation L à l'échelle spectrale s par une convolution discrète sur $L^1(x, y, t)$. Quelle est la taille du noyau de convolution ?
2. Application numérique : donner les valeurs du noyau de convolution pour les trois valeurs d'échelles suivantes :
   - $s = 1$ ($\exp(-1) \approx 0.32204$),
   - $s = 10$ ($\exp(-1/10) \approx 0.90484$),
   - $s = 100$ ($\exp(-1/100) \approx 0.9904$).
3. Lorsque s est grand, quel filtre classique la convolution précédente approche-t-elle ?
4. Qu'en déduisez-vous sur l'aspect des couleurs de L lorsque s est grand ? A quoi peut servir une telle représentation ?

1. c'est-à-dire que le domaine sur λ est supposé périodique : $I(x, y, i) = I(x, y, (i + 3) \text{ modulo } 3) \forall i \in \mathbb{Z}$