Université de Perpignan — Année 2002-2003

DAEU B — É. DUBON & S. GRAILLAT

MATHÉMATIQUES

TD n°1

The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain.

— JACQUES HADAMARD, Quoted in The Mathematical Intelligencer, volume 13, no. 1, Winter 1991

1. Calculs dans C

EXERCICE 1. — *Mettre sous forme algébrique $a+ib$ les nombres complexes suivants :*

a) $(4+2i)(3-5i)$;
b) $(2-4i)^2$;
c) $(1-i)^3$;
d) $\frac{1}{1+i}$;
e) $\frac{2-i}{2+4i}$.

EXERCICE 2. — *Calculer i^2, i^3, i^4, i^n en fonction de n.*

EXERCICE 3. — *Calculer $1+i+i^2+\cdots+i^{2002}$.*

EXERCICE 4. — *On pose $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2. En déduire les relations :*

$$1+j+j^2=0, \quad j^3=1, \quad \frac{1}{j}=j^2=\bar{j}.$$

2. Conjugué et modules d'un nombre complexe

EXERCICE 5. — *Déterminer dans* **C** *les solutions de l'équation $z\bar{z}+3(z-\bar{z})=13+18i$.*

EXERCICE 6. — *Déterminer dans* **C** *les solutions de l'équation $z^2-2\bar{z}+1=0$.*

EXERCICE 7. — *Soit* P *un polynôme à coefficients réels*

a) Montrer que $\overline{\mathrm{P}(z)}=\mathrm{P}(\bar{z})$.
b) En déduire que si z est une racine de P, $\bar{z}$ est aussi une racine de P.

EXERCICE 8. — *Calculer le module des nombres complexes suivant :*

a) $1-i\sqrt{3}$;
b) $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$;
c) $\frac{7}{(2-i)^2}$.

EXERCICE 9. — *Soit $z = x + iy$ (x et y réels) ; exprimer, en fonction de x et y, le module des nombres complexes*

$$z+1, \quad 1-\frac{1}{z}, \quad z^2-1.$$

EXERCICE 10. — *Déterminer z pour que z, $1-z$ et z^2 aient le même module.*