IMERIR - Université de Perpignan — Année 2003-2004

Licence d'Informatique L3 — É. Salvat

Mathématiques pour l'Informatique

TD n° 1 : Théorie des langages

1 Preuves par récurrence

Exercice 1. Soit E un ensemble fini. Montrer par récurrence que

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|},$$

où $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E.

Exercice 2. Soit $G = (T, N, P, S)$ une grammaire régulière à droite. Montrer que : $\forall m \in (T \cup N)^\star$ tel que $S \overset{*}{\Rightarrow} m$ alors $\exists \alpha \in T^\star$ et $\exists X \in N$ tel que $m = \alpha$ ou $m = \alpha X$.

Exercice 3. Toutes les personnes d'un groupe quelconque ont le même âge ... Trouver l'erreur dans le raisonnement par récurrence suivant.

Théorème 1. *Toutes les personnes d'un groupe quelconque ont le même âge.*

Démonstration. Soit la propriété $\mathscr{P}(n)$: "les personnes d'un groupe de cardinal n ont le même âge".

- la propriété $\mathscr{P}(1)$ est vrai ;
- Supposons la propriété vraie à l'ordre k, et soit A' un groupe de $k+1$ personnes. Retirons une personne de A'. Il reste un groupe A'' de k personnes satisfaisant l'hypothèse d'induction, donc tous ont le même âge. Retirons de A'' une autre personne et rajoutons lui la personne ôtée précédemment. Il nous reste un groupe de k personnes, dont toutes ont le même âge. En conséquence, les deux personnes retirées avaient le même âge, et la propriété est vraie pour A' donc pour tout n.

$\square$

Autre démonstration. On écrit $A' = A_1 \cup A_2$, où A_1 et A_2 sont deux groupes de k personnes et ont au moins un élément commun. Tous les éléments de A_1 ont même âge, ainsi que ceux de A_2. C'est l'âge de la personne commune, et la propriété est vrai pour A'. $\square$

2 Langages

Exercice 4. Montrer qu'il existe des langages L_1 et L_2 tels que $(L_1 \cup L_2)^\star \neq L_1^\star \cup L_2^\star$.

Exercice 5. Montrer qu'il existe des langages L_1 et L_2 tels que $(L_1 \cdot L_2)^\star \neq L_1^\star \cdot L_2^\star$.

3 DFA – NFA

Exercice 6. Soit la grammaire $G = (\{a, b, c\}, \{S, R, T, U, W\}, P, S)$ avec

$$P = \begin{array}{l} S \to aT \mid b \mid \varepsilon \\ R \to cS \\ T \to aT \mid bR \mid aU \\ U \to bU \mid \varepsilon \mid bS \mid aR \\ W \to c \mid \varepsilon \mid W \end{array}$$

1°) Donner un automate fini équivalent à G.

2°) Cet automate est-il déterministe ? Si oui, pourquoi ?, sinon le déterminiser.

Exercice 7. Donner un DFA acceptant les langages suivants :

1°) les mots de $\Sigma = \{a, b\}$ composés de : $(m \in \Sigma^\star)$

- un nombre pair de a et aucun b ($|m|_a = 2n$ et $|m|_b = 0$) ou
- un nombre impair de b et aucun a ($|m|_b = 2n + 1$ et $|m|_a = 0$).

2°) $\Sigma = \{a\}$ et $|m|_a = 4n + 3$ ou $|m|_a = 3n$.