Les pseudozéros : application en contrôle et en arithmétique d'intervalles

Stef GRAILLAT
Université de Perpignan

graillat@univ-perp.fr
http://gala.univ-perp.fr/~graillat

Groupe de Travail *Méthodes Ensemblistes* (GDR MACS)
ENSAM, Paris, 3 février 2004

Introduction et motivations

But :

Travailler avec des polynômes ayant des données (coefficients ou racines) connues avec une incertitude : recherche de racines, primalité, calcul de PGCD, stabilité en automatique, polynômes d'intervalles, etc.

Raisons :

- Résultats/mesures provenant d'expériences.
- Représentation des nombres en machine.

Applications :

- Traitement du signal et d'images.
- Robotique.
- Biologie moléculaire.
- Automatique.

Exemples du PGCD

Exemple 1 :

Soient p et q deux polynômes unitaires et $\deg p > 1$.
On suppose de plus que p divise $q \Longrightarrow \gcd(p, q) = p$.
Or pour toute constante $\varepsilon > 0$, on a $\gcd(p, q + \varepsilon) = 1$.

Exemple 2 :

$$\begin{aligned} p &= z^2 - 3.0001z + 1.9999 \approx (z-1)(z-2), \\ q &= z^2 - 1.9999z + 1.0001 \approx (z-1)^2. \end{aligned}$$

Pour ε une perturbation sur les coefficients, on aimerait dire :

- $\gcd(p, q) = z - 1$ pour $\varepsilon = 0.0001$.

Approche des problèmes

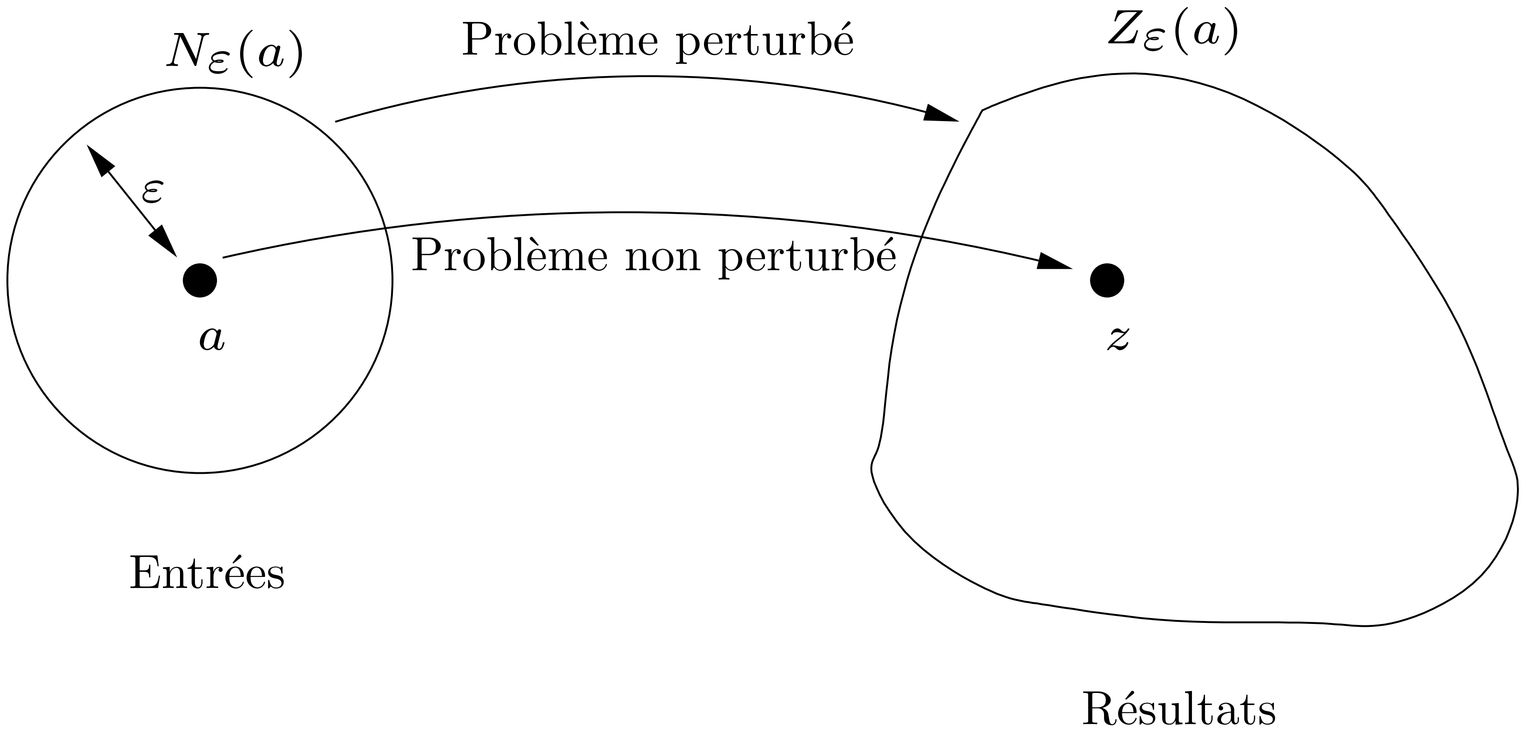
- Problèmes difficiles : on doit rechercher des « singularités ».
- La démarche générale :
  – Donner une définition précise de ce que l'on veut calculer.
  – Trouver des algorithmes pour ce calcul (souvent des heuristiques).
  – Certifier les résultats.
- appliquée à

  $\Rightarrow$ (ε-pseudo)zéros

  $\Rightarrow$ (ε-)primalité

  $\Rightarrow$ (ε-)stabilité en théorie du contrôle

Principe des calculs approchés



Plan de l'exposé

I – Les pseudozéros

- Définition et algorithme de calcul

II – Application des pseudozéros à la primalité

- Définitions
- Apport des pseudozéros

III – Application des pseudozéros en théorie du contrôle

- Stabilité au sens de Hurwith et de Schur
- Calcul du rayon de stabilité
- Calcul de l'abscisse

IV – Application des pseudozéros en arithmétique d'intervalles

Les pseudozéros :
définition, calcul et intérêt

Pseudozéros : définition

Perturbation :

Voisinage du polynôme $p \in \mathbf{C}_n[z]$

$$N_\varepsilon(p) = \{\widehat{p} \in \mathbf{C}_n[z] : \|p - \widehat{p}\| \leqslant \varepsilon\}\,.$$

Définition de l'ensemble des ε-pseudozéros :

$$Z_\varepsilon(p) = \{z \in \mathbb{C} : \widehat{p}(z) = 0 \text{ pour } \widehat{p} \in N_\varepsilon(p)\}\,.$$

$\|\cdot\|$: norme sur le vecteur des coefficients de p

Les pseudozéros

- Mosier (1986) : étude avec la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- Hinrichsen et Kelb (1993) : *Spectral value sets*
- Trefethen et Toh (1994) : étude avec la norme $\|\cdot\|_2$.

  pseudozéros $\approx$ pseudospectres de la matrice compagnon.
- Chatelin et Frayssé (1996) : Synthèse des articles précédents dans *Lectures on Finite Precision Computations* (SIAM)
- Zhang (2001) : Étude en norme $\|\cdot\|_2$ de l'influence de la base (conditionnement de l'évaluation).
- Karow (2003) : thèse sur les *Spectral value sets*
- Stetter (2004) : *Numerical Polynomial Algebra* (SIAM). Généralise les travaux précédents.

Les pseudozéros sont facilement calculables

Théorème :
L'ensemble des ε-pseudozéros vérifie

$$Z_\varepsilon(p) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |g(z)| := \frac{|p(z)|}{\|\underline{z}\|_*} \leqslant \varepsilon \right\},$$

où $\underline{z} = (1, z, \dots, z^n)$ et $\|\cdot\|_*$ est la norme duale de $\|\cdot\|$.

$$\|y\|_* = \sup_{x \neq 0} \frac{|y^* x|}{\|x\|}$$

Algorithme de calcul des pseudozéros

Tracé de ε-pseudozéros :

1. On maille un carré contenant toutes les racines de p (commande MATLAB : `meshgrid`).
2. On calcule $g(z) := \frac{|p(z)|}{\|\underline{z}\|}$ pour tous les points z de la grille.
3. On affiche la ligne de niveau $|g(z)| = \varepsilon$ (commande MATLAB : `contour`).

Problèmes :

- Localisation : trouver un carré contenant toutes les racines de p et tous les pseudozéros.
- Séparation : trouver un pas de grille qui sépare toutes les racines.

Choix de la grille

Soit p un polynôme unitaire de degré n et $\{z_i\}$ l'ensemble de ses n racines. Notons $r = \max_{i=1;\ldots;n} |z_i|$. On a [Mignotte, 1989]

$$\boxed{r \leqslant 1 + \|p\|_\infty.}$$

Notons $R := 1 + \|p\| + \varepsilon$. On montre que

$Z_\varepsilon(p) \subset B(0, R)$ boule fermée de centre 0 et de rayon R.

Complexité du tracé

Notons L la longueur du carré et h le pas de discrétisation. L'évaluation de $g(u)$ nécessite

- l'évaluation d'un polynôme, ce qui se fait en $\mathcal{O}(n)$,
- le calcul de la norme d'un vecteur qui se fait aussi en général en $\mathcal{O}(n)$.

La complexité de l'algorithme précédent est donc en

$$\boxed{\mathcal{O}((L/h)^2 n)}.$$

L et h dépendent de n mais aussi des coefficients du polynôme.

Simulation numérique

Ensemble des pseudozéros du polynôme « de Wilkinson »

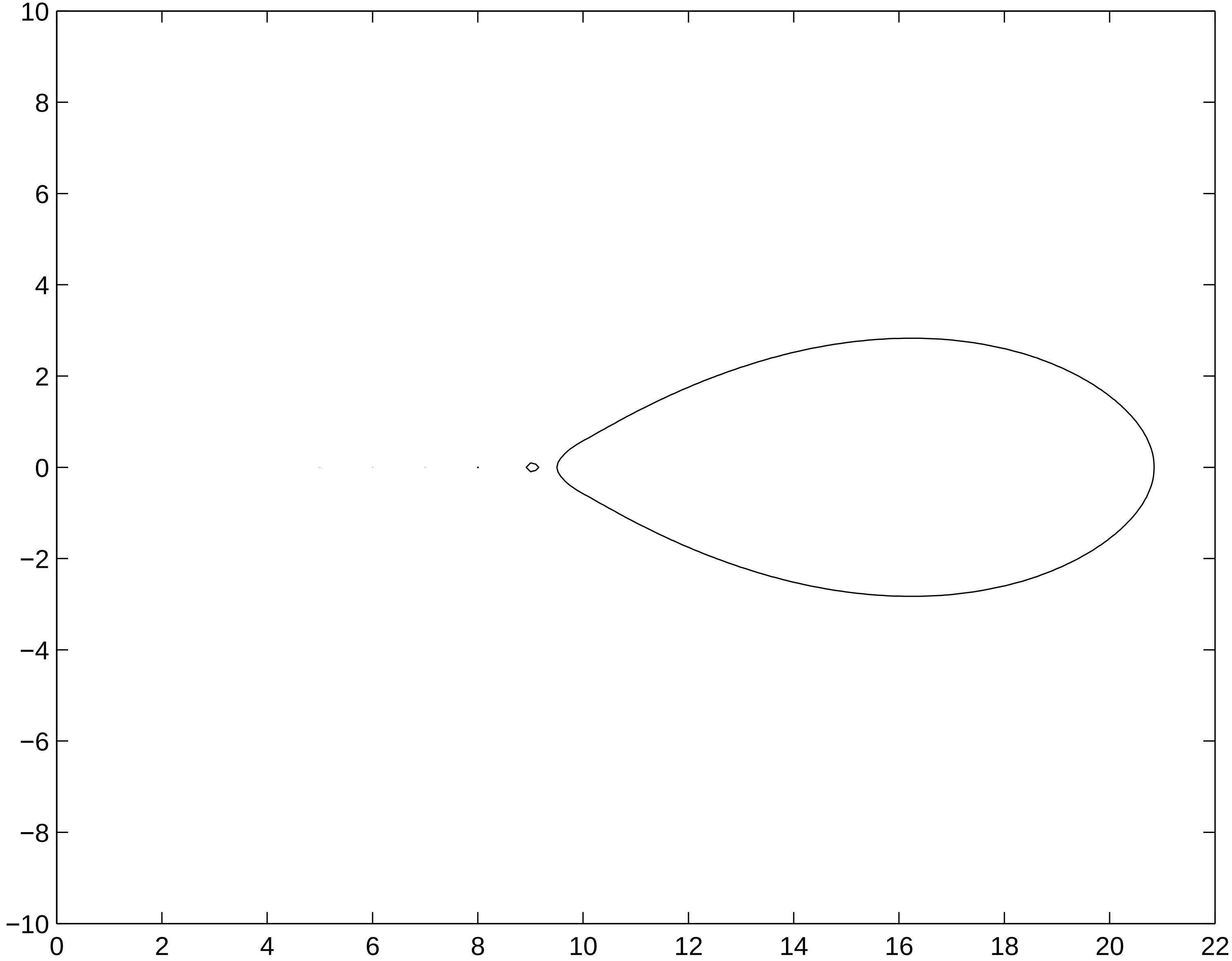
$$
\begin{aligned}
W_{20} &= (z-1)(z-2)\cdots(z-20), \\
&= z^{20} - 210z^{19} + \cdots + 20!,
\end{aligned}
$$

en ne perturbant que le coefficient de z^{19} avec une perturbation inférieure à $\varepsilon = 2^{-23}$.

On utilise une norme $\|\cdot\|_\infty$ pondérée :

$$
\|p\|_\infty = \max_i \frac{|p_i|}{m_i} \text{ avec } m_i \text{ réels positifs}
$$

et la convention $m/0 = \infty$ si $m > 0$ et $0/0 = 0$.


10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22

Intérêts des pseudozéros

Intérêts

- une étude qualitative du polynôme
- comprendre les résultats des algorithmes
- utiliser des polynômes avec une incertitude sur leurs coefficients (mesure physique / précision finie)

Inconvénients

- le coût

Application des pseudozéros à la primalité

Définition d'un PGCD approché

Définition classique :

Soient p et q des polynômes de degrés respectifs n et m et soit ε un nombre positif. On appelle :

- **ε-diviseur** (ou diviseur approché) : tout diviseur des polynômes perturbés $\widehat{p}$ et $\widehat{q}$ vérifiant
$$\deg \widehat{p} \leqslant n, \deg \widehat{q} \leqslant m \text{ et } \max(\|p-\widehat{p}\|, \|q-\widehat{q}\|) \leqslant \varepsilon.$$
- **ε-PGCD** (PGCD approché) : un ε-diviseur de degré maximum.

Remarques :

- Tolérance sur les coefficients (nombres flottants / mesures).
- Unicité du degré mais non du ε-PGCD.
- Dépendance par rapport au corps de base.

Définition de la ε-primalité

Définition :

Deux polynômes p et q sont **ε-premiers entre eux**
si leur **ε-PGCD** est 1.

Calcul :

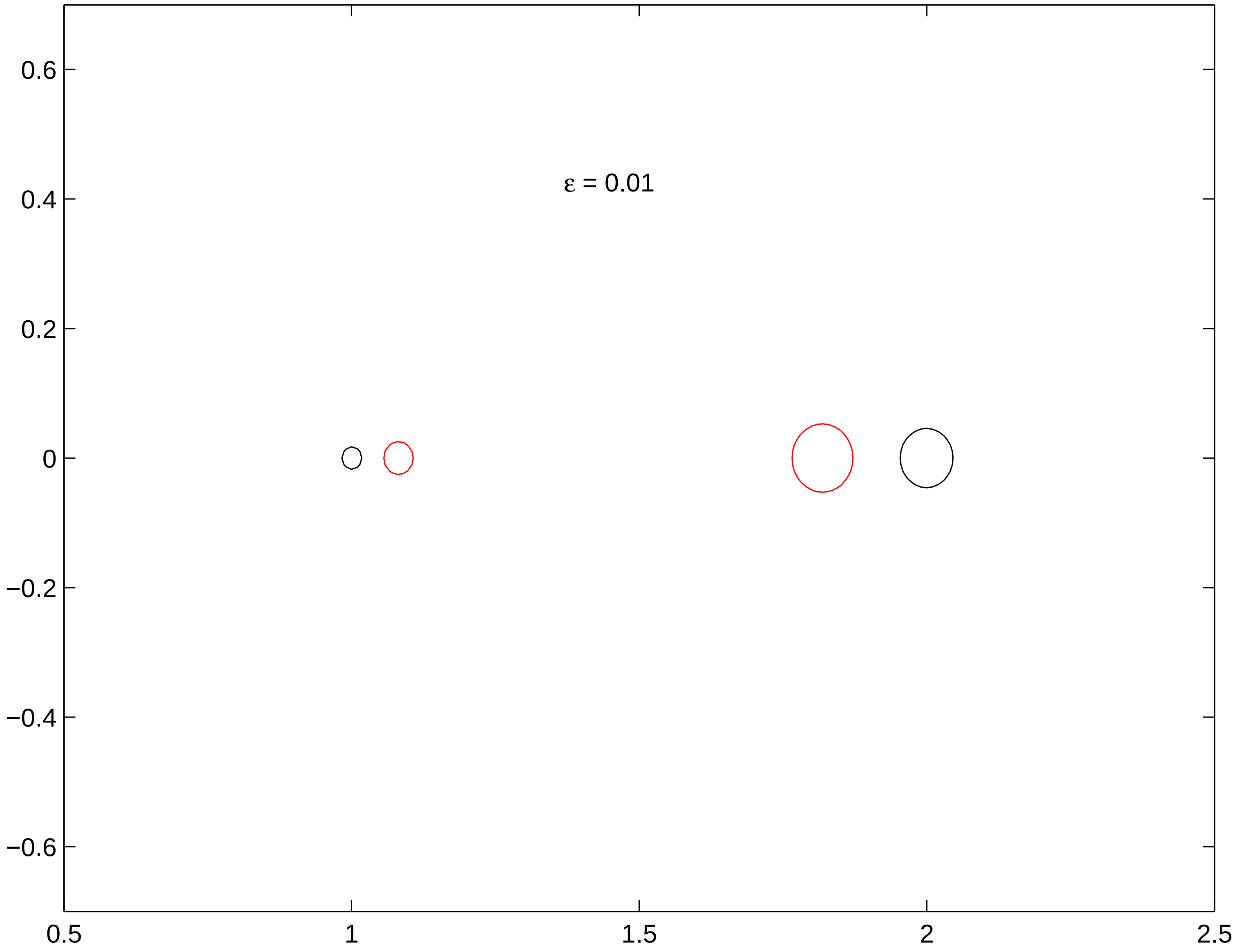
- Optimisation : algorithme de Karmarkar et Lakshman (1995).
- Borne de Sylvester : algorithme COPRIME [Beckermann et Labahn 1998].
- Graphique : les pseudozéros.

Les pseudozéros

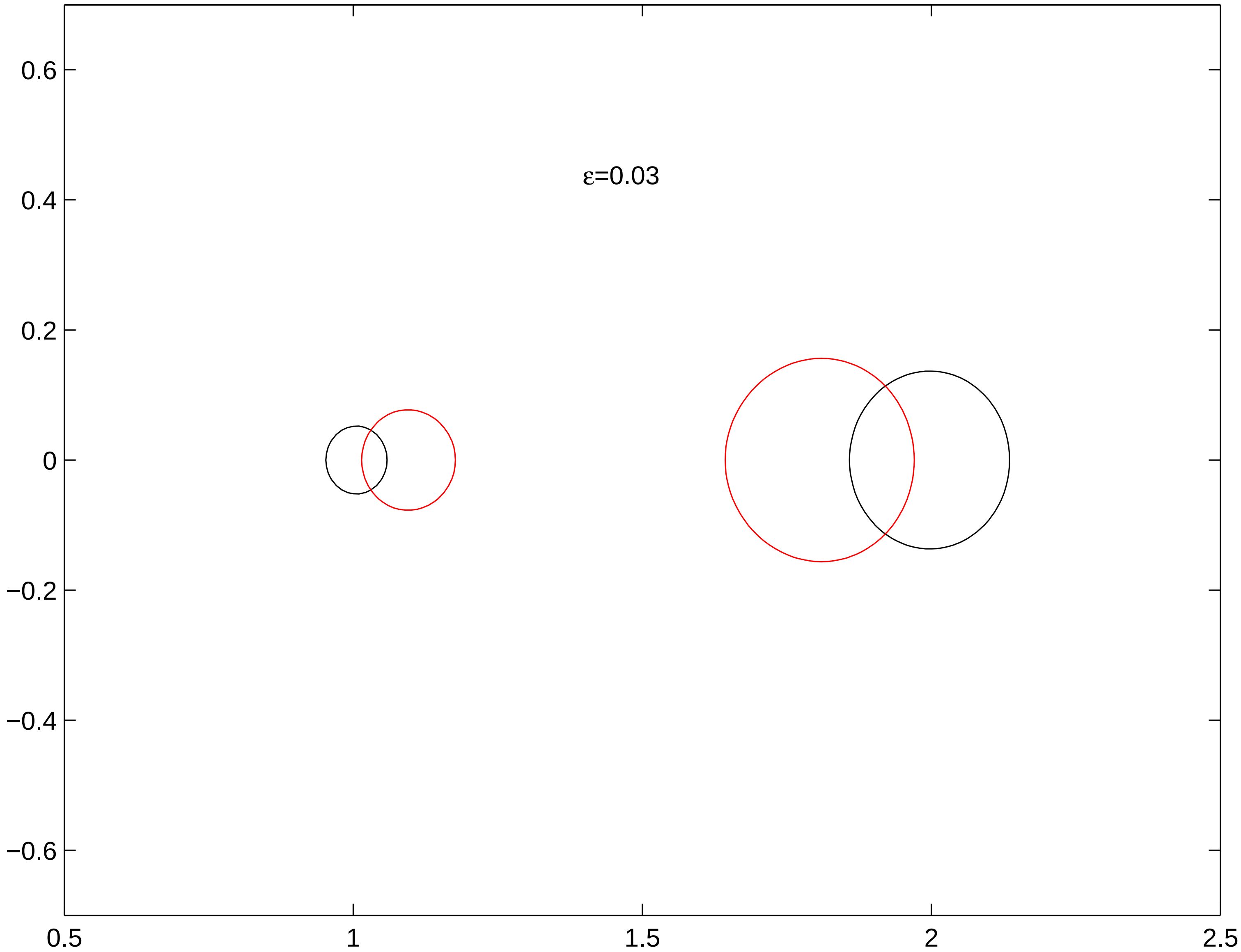
- **Entrée :** p et q deux polynômes.
- **Sortie :** un graphique.
- **Inconvénient :** outil qualitatif.
- **Exemple en $\|\cdot\|_2$:**

  $p = (z-1)(z-2) = z^2 - 3z + 2$

  $q = (z-1.08)(z-1.82) = z^2 - 2.9z + 1.9656$



ε = 0.01
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
0.5
1
1.5
2
2.5

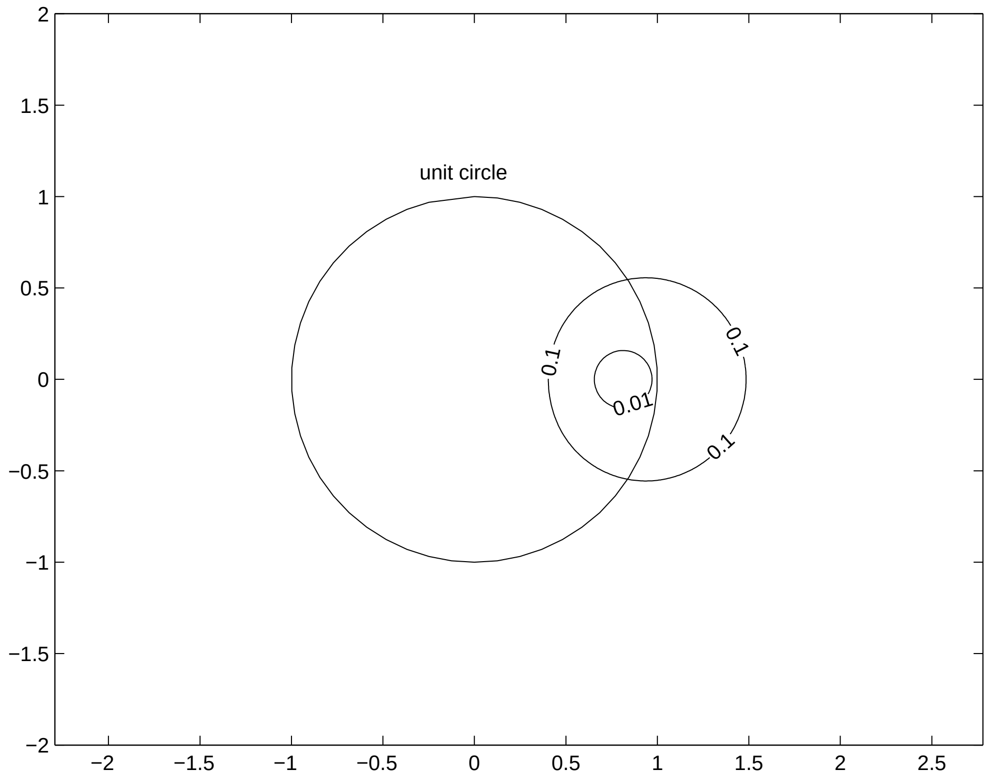

ε=0.03
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
0.5
1
1.5
2
2.5

Application des pseudozéros en théorie du contrôle

La stabilité robuste de Schur en théorie du contrôle

Stabilité de Schur : $|\text{racines de } p| < 1$.

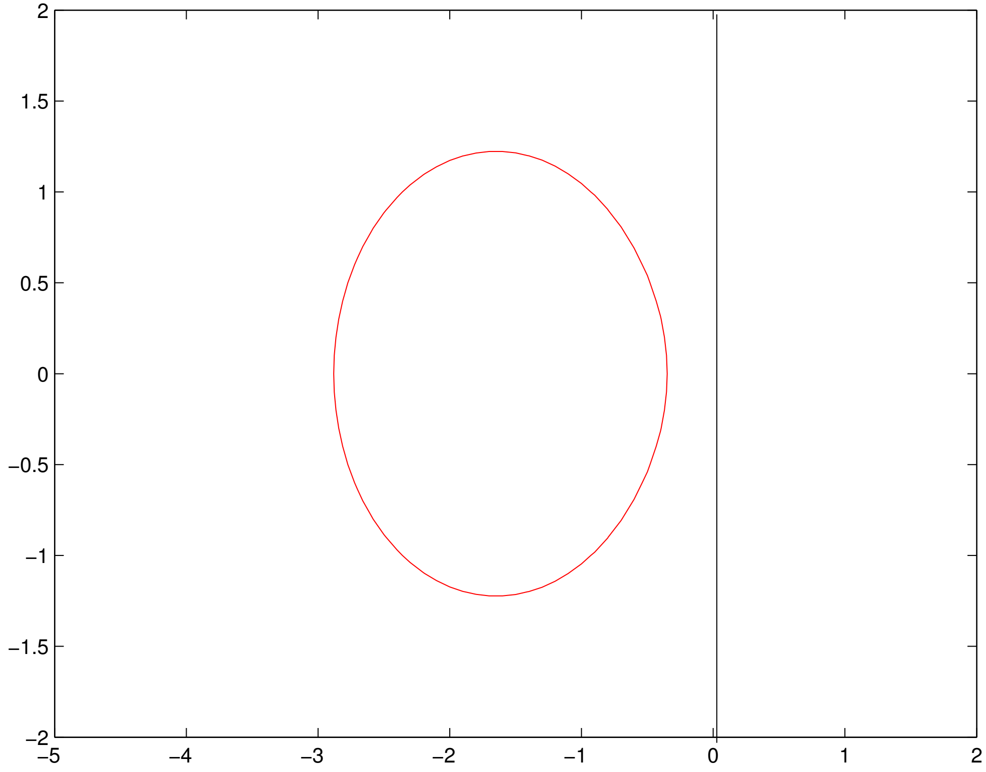
ε-pseudozero de $p(z) = (z - 0.8)^2$ pour $\varepsilon = 0.1$ and $\varepsilon = 0.01$.



La stabilité robuste de Hurwitz en théorie du contrôle

La stabilité de Hurwitz : la partie réelle des racines de $p < 0$.

ε-pseudozero de $p(z) = (z+1)^2$ pour $\varepsilon = 0.4$.



Stabilité d'un polynôme

$\mathcal{P}$: $\mathbf{C}[X]$ muni de la norme 2, $\|\cdot\|$
$\mathcal{P}_n$: éléments de $\mathcal{P}$ de degré inférieur ou égal à n
$\mathcal{M}_n$: éléments de $\mathcal{P}_n$ unitaires

Définition. *Un polynôme est dit* stable *si toutes ses racines ont une partie réelle strictement négative et* instable *sinon.*

La fonction *abscisse* $a : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ est définie par

$$a(p) = \max\{\mathrm{Re}(z) : p(z) = 0\}.$$

Un polynôme p est stable $\iff a(p) < 0$

Motivation

En théorie du contrôle, une fonction de transfert s'écrit souvent sous la forme $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ ou N et D sont des polynômes.

$$\boxed{\text{Le système est stable si } D \text{ est un polynôme stable.}}$$

Question 1 : si D est stable, est-on loin d'un système instable ?

Question 2 : si D est stable, reste-t-il stable si on le perturbe un peu ?

Problème 1 : Trouver la distance au système instable le plus proche.

Problème 2 : Trouver l'ε-abscisse.

(on se restreindra au cas où D est unitaire)

Énoncé du problème 1

Rayon de stabilité $\beta(p)$: distance du polynôme $p \in \mathcal{M}_n$ à l'ensemble des polynômes unitaires instables.

$$\beta(p) = \min\{\|p - q\| : q \in \mathcal{M}_n \text{ et } a(q) \geqslant 0\}.$$

Énoncé du problème :

Étant donné un polynôme $p \in \mathcal{M}_n$, calculer $\beta(p)$.

Solution proposée

Outils utilisés

- la formule explicite donnant les pseudozéros
- la dépendance continue des racines par rapport aux coefficients des polynômes
- les suites de Sturm pour compter les racines réelles

Les résultats

- un algorithme calculant $\beta(p)$ avec une tolérance arbitraire τ
- un graphique montrant les pseudozéros à la distance $\beta(p)$

  $\longrightarrow$ permet une analyse qualitative du résultat

  $\longrightarrow$ visualisation du résultat

Pseudozéros de polynômes unitaires

Perturbation : Voisinage du polynôme p

$$N_\varepsilon(p) = \{\widehat{p} \in \mathcal{M}_n : \|p - \widehat{p}\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Definition de l'ensemble des ε-pseudozéros

$$Z_\varepsilon(p) = \{z \in \mathbb{C} : \widehat{p}(z) = 0 \text{ pour } \widehat{p} \in N_\varepsilon(p)\}.$$

$\|\cdot\|$ est la norme 2 du vecteur des coefficients de p

L'ensemble des ε-pseudozéros vérifie

$$Z_\varepsilon(p) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |g(z)| := \frac{|p(z)|}{\|\underline{z}\|} \leqslant \varepsilon \right\},$$

où $\underline{z} = (1, z, \ldots, z^{n-1})$.

Une autre caractérisation de $Z_\varepsilon(p)$

Notons $h_{p,\varepsilon} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$h_{p,\varepsilon}(x, y) = |p(x + iy)|^2 - \varepsilon^2 \sum_{j=0}^{n-1} (x^2 + y^2)^j.$$

On a alors

$$\boxed{Z_\varepsilon(p) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : h_{p,\varepsilon}(x, y) \leqslant 0\}}$$

$\Longrightarrow$ $h_\varepsilon(\cdot, y)$ et $h_\varepsilon(x, \cdot)$ sont des polynômes de degré $2n$.

Résultats théoriques utilisés

Proposition. *La fonction* abscisse

$$a : \mathcal{P}_n \to \mathbf{R}$$

définie par $a(p) = \max\{\mathrm{Re}(z) : p(z) = 0\}$ *est continue sur* $\mathcal{M}_n$*.*

Proposition. *On a la relation suivante*

$$\beta(p) = \min\{\|p - q\| : q \in \mathcal{M}_n \text{ et } a(q) = 0\}.$$

Théorème. *L'équation* $h_{p,\varepsilon}(0, y) = 0$ *a une solution* y *réelle si et seulement si* $\beta(p) \leqslant \varepsilon$*.*

Algorithme (dichotomie)

Entrée : un polynôme stable p et une tolérance τ sur la précision de $\beta(p)$ calculé

Sortie : un nombre α tel que $|\alpha - \beta(p)| \leqslant \tau$

$\gamma := 0, \quad \delta := \|p - z^n\|$
tant que $|\gamma - \delta| > \tau$ **faire**
  $\varepsilon := \frac{\gamma+\delta}{2}$
  si l'équation $h_{p,\varepsilon}(0, y) = 0$ a une solution y réelle **alors**
    $\delta := \varepsilon$
  autrement
    $\gamma := \varepsilon$
  fin si
fin tant que
retourne $\alpha = \frac{\gamma+\delta}{2}$

Simulations numériques

Pour le polynôme $p(z) = z + 1$, l'algorithme donne $\beta(p) \approx 0.999996$

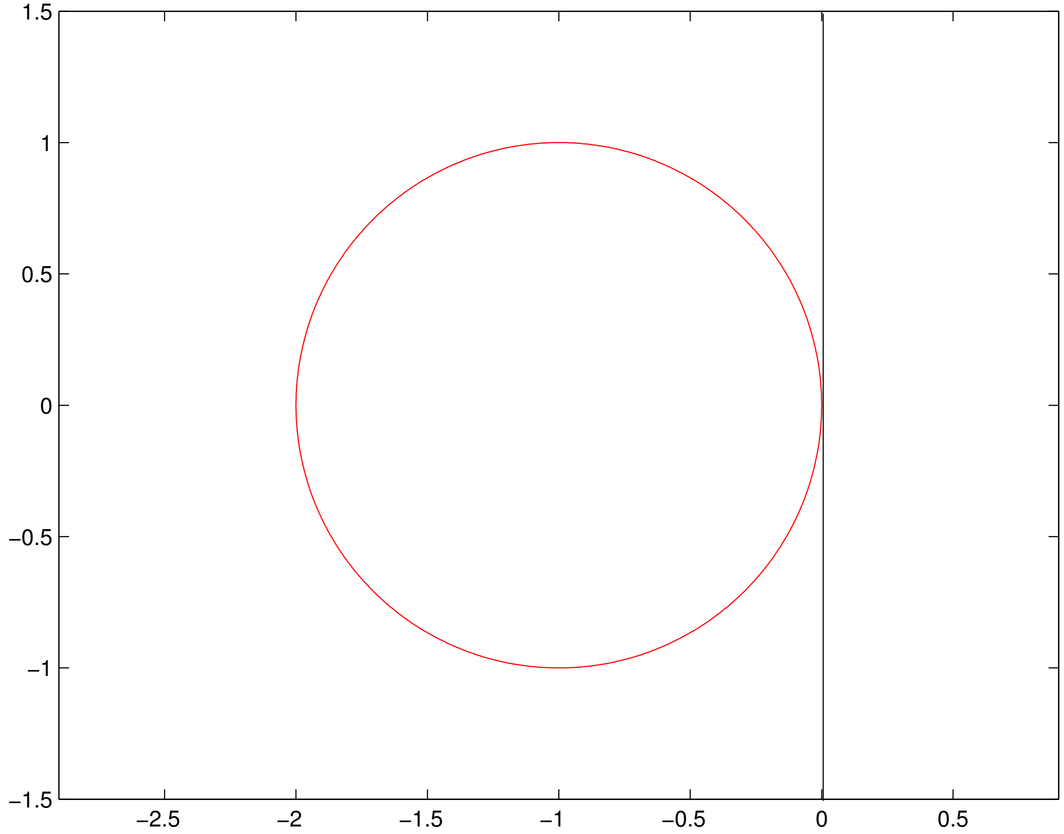


FIG. 1: $\beta(p)$-pseudozéros de $p(z) = z + 1$

Simulations numériques (suite)

Pour le polynôme $p(z) = z^3 + 4z^2 + 6z + 4$, l'algorithme donne $\beta(p) \approx 2.610226$

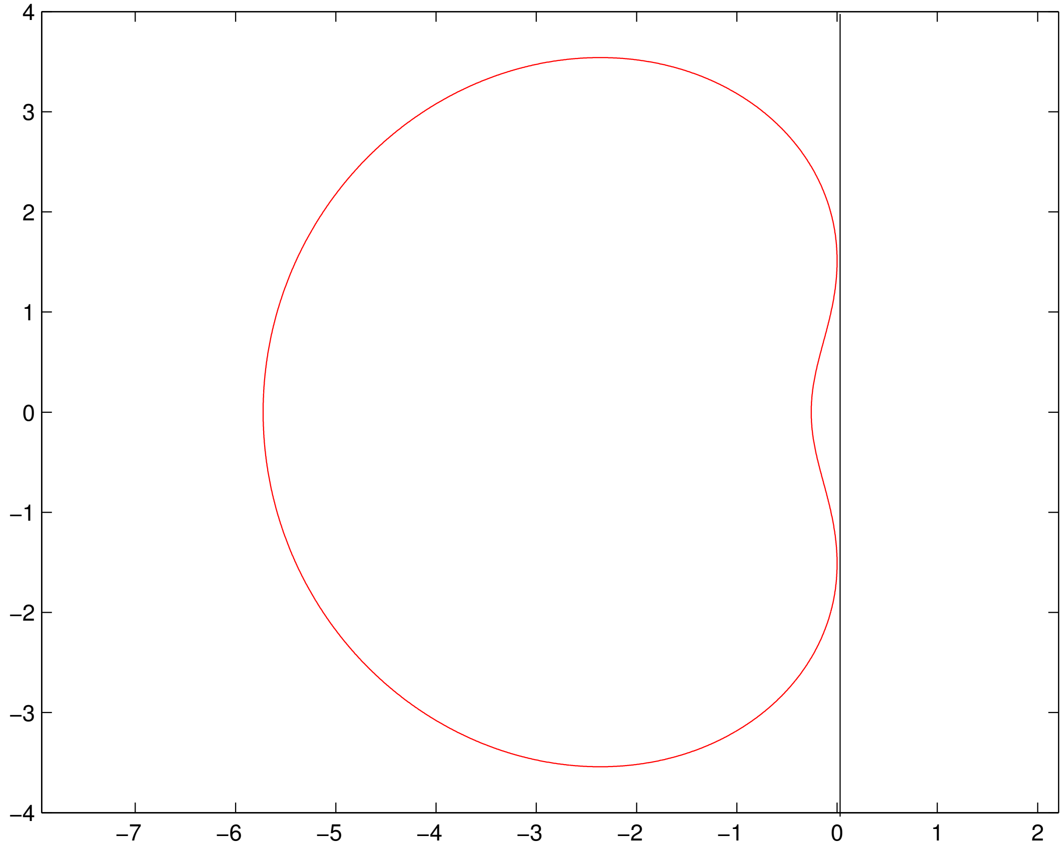


FIG. 2: $\beta(p)$-pseudozéros de $p(z) = z^3 + 4z^2 + 6z + 4$

Énoncé du problème 2

ε-abscisse $a_\varepsilon : \mathcal{P}_n \to \mathbf{R}$:

$$a_\varepsilon(p) = \max\{\mathrm{Re}(z) : z \in Z_\varepsilon(p)\}.$$

Énoncé du problème :

Étant donné un polynôme $p \in \mathcal{M}_n$, calculer $a_\varepsilon(p)$.

$$\boxed{\text{Un polynôme } p \text{ est } \varepsilon\text{-robuste stable} \iff a_\varepsilon(p) < 0}$$

Solution proposée

Outils utilisés

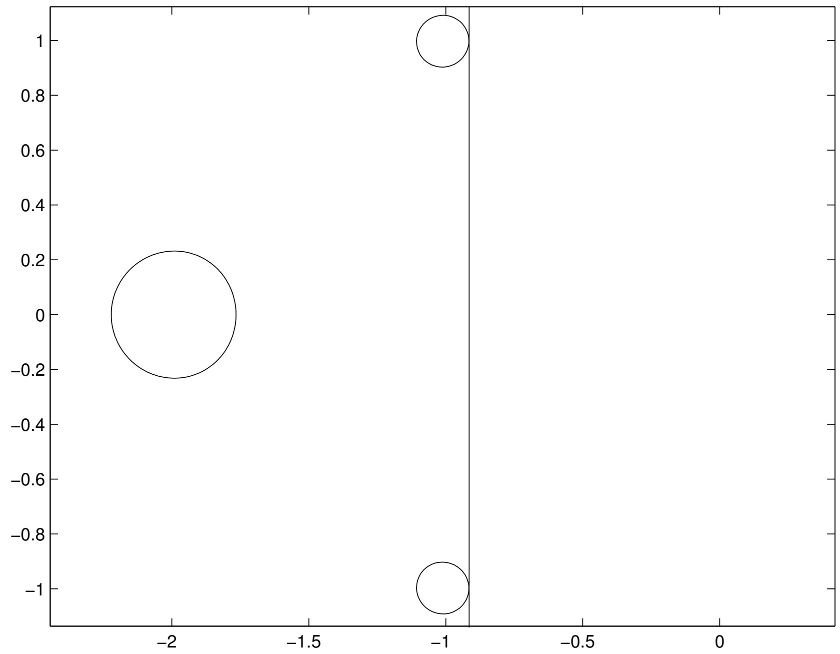
- la formule explicite donnant les pseudozéros
- la dépendance continue des racines par rapport aux coefficients des polynômes
- les suites de Sturm pour compter les racines réelles

Les résultats : 3 algorithmes

- un algorithme graphique
- un algorithme par dichotomie
- un algorithme *criss-cross*

Un algorithme graphique

- On trace les ε-pseudozéros
- On trace la ligne verticale la plus à droite qui est tangente à l'ensemble des ε-pseudozéros



ensemble des ε-pseudozéros $p(z) = z^3 + 4z^2 + 6z + 4$ pour $\varepsilon = 0.1$

$$a_\varepsilon(p) \approx -0.9$$

Résultat théorique utilisé

Théorème. *Pour tout réel $x \geqslant a(p)$, l'équation $h_{p,\varepsilon}(x,y) = 0$ a une solution y réelle si et seulement si $x \leqslant a_\varepsilon(p)$.*

Un algorithme par dichotomie

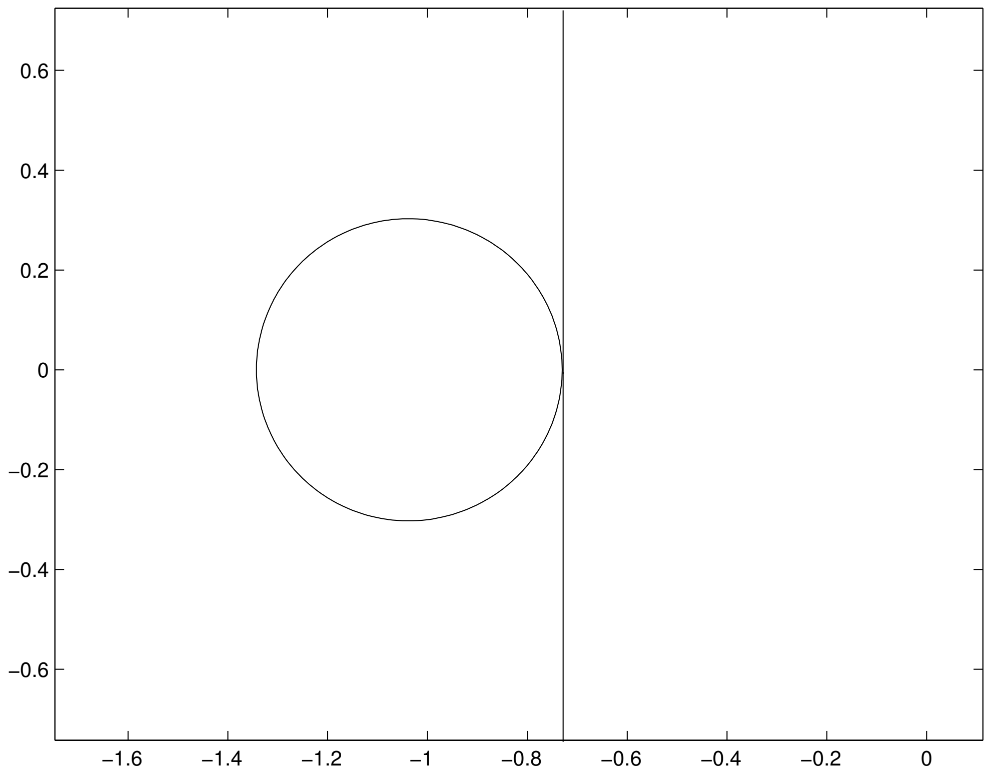
Entrée : un polynôme stable p, le paramètre ε et une tolérance τ sur la précision de $a_\varepsilon(p)$ calculé

Sortie : un nombre α tel que $|\alpha - a_\varepsilon(p)| \leqslant \tau$

$\gamma := a(p), \quad \delta := 1 + \|p\| + \varepsilon$
tant que $|\gamma - \delta| > \tau$ **faire**
  $x := \frac{\gamma+\delta}{2}$
  si l'équation $h_{p,\varepsilon}(x,y) = 0$ a une solution y réelle **alors**
    $\delta := x$
  autrement
    $\gamma := x$
  fin si
fin tant que
retourne $\alpha = \frac{\gamma+\delta}{2}$

Simulation numérique

Pour le polynôme $p(z) = z^5 + 5^4 + 10z^3 10z^2 + 5z + 1$, l'algorithme donne $a_\varepsilon(p) \approx -0.719669$ pour $\varepsilon = 0.001$ et $\tau = 0.00001$



ε-pseudozéro de $p(z) = z^5 + 5^4 + 10z^3 10z^2 + 5z + 1$ pour $\varepsilon = 0.001$

Un algorithm *criss-cross*

Entrée : un polynôme p et le paramètre ε

1: Initialisation : $x^1 = a(p)$ et $r = 1$

2: Recherche verticale : Trouver des intervalles ouverts $I_1^r, \ldots, I_{l_r}^r$ où $h(x^r, y) < 0$ pour $y \in \cup_{k=1}^{l_r} I_k^r$

3: Recherche horizontale : pour chaque I_k^r, calculer $\omega_k^r = \text{midpoint}(I_k^r)$ et trouver le plus grand zéro réel x_k^r de la fonction $h(\cdot, \omega_k^r)$ pour $k = 1 : l_r$

4: faire $x^{r+1} = \max\{x_k^r, k = 1, \ldots, l_r\}$, incrémenter r de un et retourner à l'étape 2.

Application des pseudozéros à l'arithmétique d'intervalles

Définition des pseudozéros réels

Soit $p = \sum_{i=0}^{n} p_i z^i$ un polynôme de $\mathbf{R}_n[z]$

Perturbation :

Voisinage du polynôme p

$$N_\varepsilon^R(p) = \{\widehat{p} \in \mathbf{R}_n[z] : \|p - \widehat{p}\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Definition de l'ensemble des ε-pseudozéros réels

$$Z_\varepsilon^R(p) = \left\{z \in \mathbb{C} : \widehat{p}(z) = 0 \text{ pour } \widehat{p} \in N_\varepsilon^R(p)\right\}.$$

Calculer les pseudozéros réels

Théorème :
L'ensemble des ε-pseudozéros réels vérifie

$$Z_\varepsilon^R(p) = Z(p) \cup \left\{ z \in \mathbf{C} \backslash Z(p) : h(z) := d(G_R(z), \mathbf{R} G_I(z)) \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \right\},$$

où d est défini pour $x, y \in \mathbf{R}^{n+1}$ par

$$d(x, \mathbf{R}y) = \inf_{\alpha \in \mathbf{R}} \|x - \alpha y\|_*$$

et où $G_R(z)$, $G_I(z)$ sont les parties réelles et imaginaires de

$$G(z) = \frac{1}{p(z)} (1, z, \dots, z^n)^T, \; z \in \mathbf{C} \backslash Z(p)$$

Quelques propriétés

La fonction d définie pour $x, y \in \mathbf{R}^{n+1}$ par

$$d(x, \mathbf{R}y) = \inf_{\alpha \in \mathbf{R}} \|x - \alpha y\|_*$$

vérifie

$$d(x, \mathbf{R}y) = \begin{cases} \sqrt{\|x\|_2^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|_2^2}} & \text{si } y \neq 0, \\ \|x\|_2 & \text{si } y = 0 \end{cases} \qquad \text{pour la norme } \|\cdot\|_2$$

$$d(x, \mathbf{R}y) = \begin{cases} \min_{\substack{i=0:n \\ y_i \neq 0}} \|x - (x_i/y_i)y\|_1 & \text{si } y \neq 0, \\ \|x\|_1 & \text{si } y = 0 \end{cases} \qquad \text{pour la norme } \|\cdot\|_\infty$$

Quelques propriétés (suite)

Proposition 1 :
L'ensemble des ε-pseudozeros réels $Z_\varepsilon^R(p)$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Proposition 2 :
L'ensemble des ε-pseudozeros réels $Z_\varepsilon^R(p)$ est inclus dans l'ensemble des ε-pseudozéros (complexe)

Algorithme de calcul des pseudozéros réels

Tracé de ε-pseudozéros réels :

1. On maille un carré contenant toutes les racines de p (commande MATLAB : `meshgrid`).
2. On calcule $h(z) := d(G_R(z), \mathbf{R}G_I(z))$ pour tous les points z de la grille.
3. On affiche la ligne de niveau $|h(z)| = \frac{1}{\varepsilon}$ (commande MATLAB : `contour`).

Polynômes d'intervalles

Un polynôme d'intervalles : polynôme dont les coefficients sont des intervalles réels.

On note $\mathbf{IR}[z]$ l'ensemble des polynôme d'intervalles et $\mathbf{IR}_n[z]$ l'ensemble des polynôme d'intervalles de degrée au plus n.

Soit $p \in \mathbf{IR}_n[z]$. On peut écrire

$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} [a_i, b_i] z^i.$$

Les zéros d'un polynôme d'intervalles est l'ensemblé défini par

$$\mathbf{Z}(p) := \{z \in \mathbf{C} : \text{il existe } m_i \in [a_i, b_i], i = 0 : n \text{ tel que} \sum_{i=0}^{n} m_i z^i = 0\}.$$

$\Longrightarrow$ Calculer $\mathbf{Z}(p)$.

Pseudozéros avec norme pondérée

$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} p_i z^i.$$

- identification de p avec le vecteur $(p_0, p_1, \ldots, p_n)^T$
- $d := (d_0, \ldots, d_n)^T \in \mathbf{R}^{n+1}$ vecteur représentant les poids des différents coefficients de p
- $\|\cdot\|_{\infty,d}$ définie par

$$\|p\|_{\infty,d} = \max_{i=0:n}\{|p_i|/|d_i|\}.$$

Zéros de polynômes d'intervalles et pseudozéros réels

Introduisons le polynôme central p_c

$$p_c(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i,$$

avec $c_i = (a_i + b_i)/2$.

Notons $d_i := (b_i - a_i)/2$.

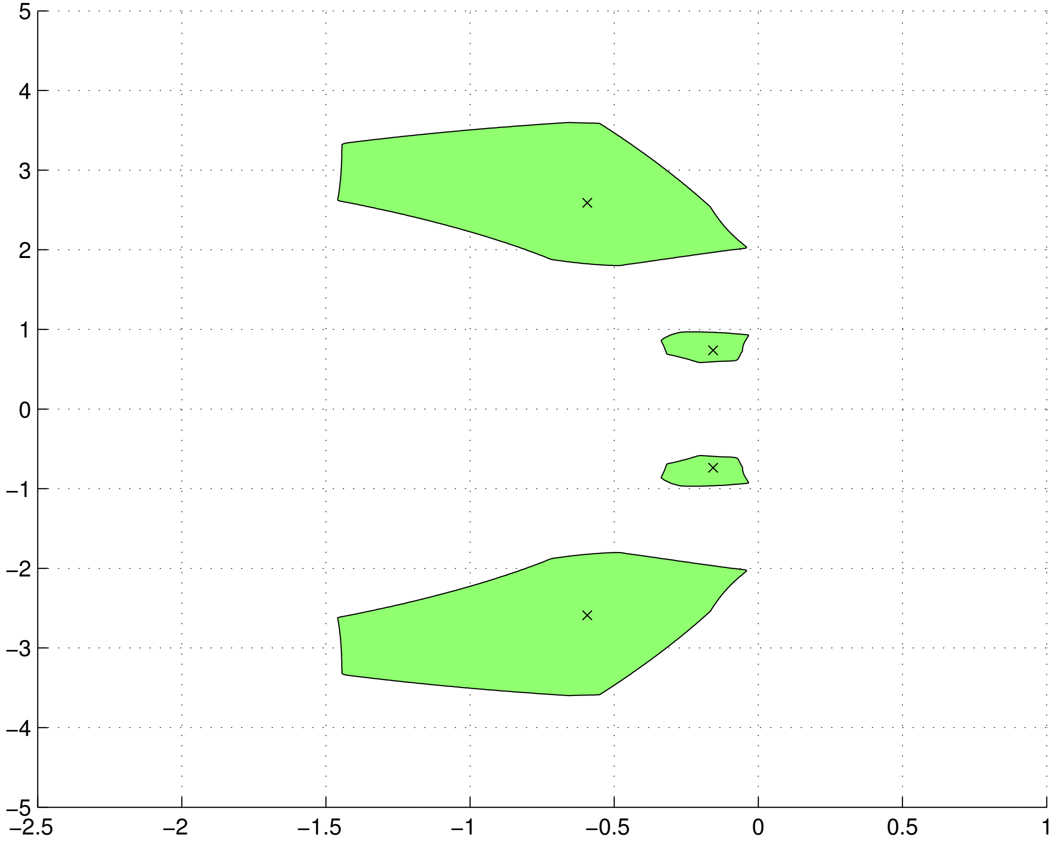
Proposition :

Avec les notation ci-dessus, on a

$$\mathbf{Z}(p) = Z_\varepsilon^R(p_c) \text{ avec } \varepsilon = 1.$$

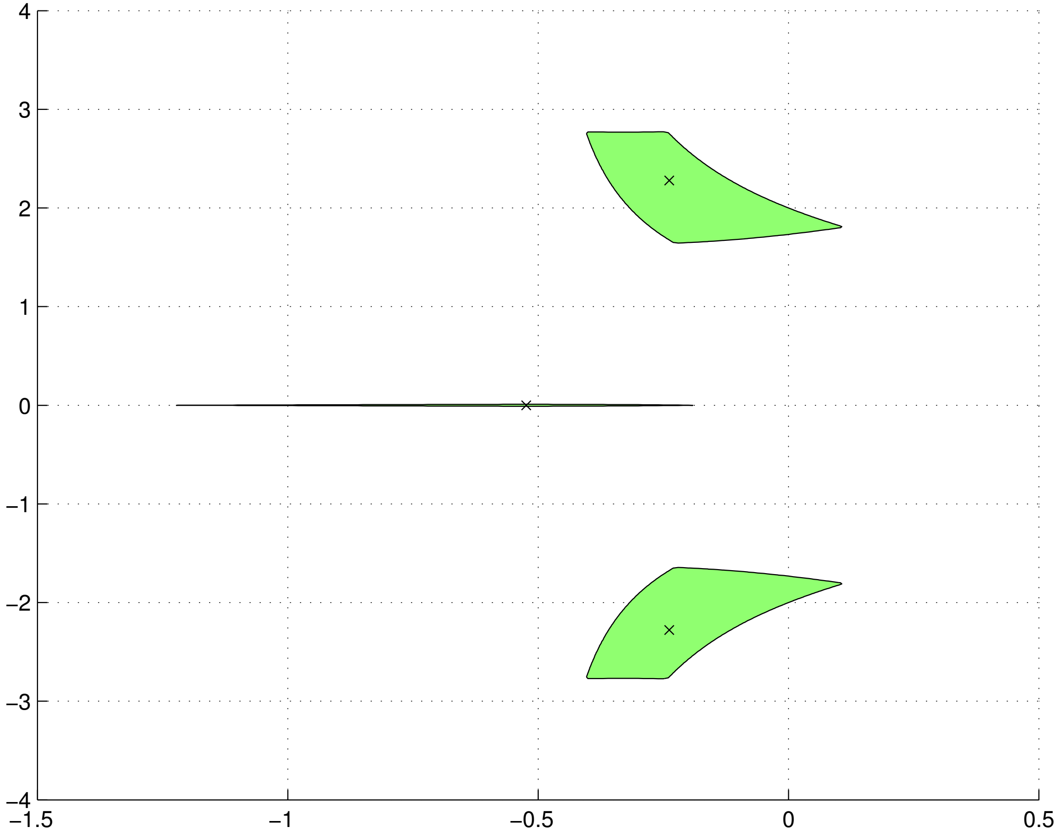
Exemple 1

$$p(z) = [1,2]z^4 + [3.2,3]z^3 + [10,14]z^2 + [3,5\sqrt{2}]z + [5,7]$$



Exemple 2

$$p(z) = z^3 + z^2 + [3, 8]z + [1.5, 4]$$



Conclusion et perspectives

Nous avons un outil qui a

- des applications en calcul formel
- des applications pour le calcul en précision finie
- des applications en théorie du contrôle
- des applications en arithmétique d'intervalles

Perspectives

- Comparer avec des logiciels implémentant les intervalles (Mathematica, intpakX, IntLab, MPFI, etc.)