Pseudozéros de polynômes d'intervalles

Stef Graillat
Université de Perpignan

graillat@univ-perp.fr
http://gala.univ-perp.fr/~graillat

École Jeunes Chercheurs en Algorithmique et Calcul Formel
Montpellier, 4 – 8 Avril 2005

Introduction et motivations

But :

Travailler avec des polynômes ayant des données (coefficients ou racines) connues avec une incertitude : recherche de racines, primalité, calcul de PGCD, stabilité en automatique, polynômes d'intervalles, etc.

Raisons :

- Résultats/mesures provenant d'expériences.
- Représentation des nombres en machine.

Applications :

- Traitement du signal et d'images.
- Robotique.
- Biologie moléculaire.
- Automatique.

Définition des pseudozéros complexes

Soit $p = \sum_{i=0}^{n} p_i z^i$ un polynôme de $\mathbf{C}_n[z]$

Perturbation :

Voisinage du polynôme $p \in \mathbf{C}_n[z]$

$$N_\varepsilon(p) = \{\widehat{p} \in \mathbf{C}_n[z] : \|p - \widehat{p}\| \leqslant \varepsilon\}\,.$$

Définition de l'ensemble des ε-pseudozéros :

$$Z_\varepsilon(p) = \{z \in \mathbb{C} : \widehat{p}(z) = 0 \text{ pour } \widehat{p} \in N_\varepsilon(p)\}\,.$$

$\| \cdot \|$: norme sur le vecteur des coefficients de p

Calcul des pseudozéros complexes

Théorème :
L'ensemble des ε-pseudozéros vérifie

$$Z_\varepsilon(p) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |g(z)| := \frac{|p(z)|}{\|\underline{z}\|_*} \leqslant \varepsilon \right\},$$

où $\underline{z} = (1, z, \dots, z^n)$ et $\|\cdot\|_*$ est la norme duale de $\|\cdot\|$.

$$\|y\|_* = \sup_{x \neq 0} \frac{|y^* x|}{\|x\|}$$

Définition des pseudozéros réels

Soit $p = \sum_{i=0}^{n} p_i z^i$ un polynôme de $\mathbf{R}_n[z]$

Perturbation :

Voisinage du polynôme p

$$N_\varepsilon^R(p) = \{\widehat{p} \in \mathbf{R}_n[z] : \|p - \widehat{p}\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Definition de l'ensemble des ε-pseudozéros réels

$$Z_\varepsilon^R(p) = \left\{z \in \mathbb{C} : \widehat{p}(z) = 0 \text{ pour } \widehat{p} \in N_\varepsilon^R(p)\right\}.$$

Calcul des pseudozéros réels

Théorème :
L'ensemble des ε-pseudozéros réels vérifie

$$Z_\varepsilon^R(p) = Z(p) \cup \left\{ z \in \mathbf{C} \backslash Z(p) : h(z) := d(G_R(z), \mathbf{R} G_I(z)) \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \right\},$$

où d est défini pour $x, y \in \mathbf{R}^{n+1}$ par

$$d(x, \mathbf{R}y) = \inf_{\alpha \in \mathbf{R}} \|x - \alpha y\|_*$$

et où $G_R(z)$, $G_I(z)$ sont les parties réelles et imaginaires de

$$G(z) = \frac{1}{p(z)} (1, z, \ldots, z^n)^T, \; z \in \mathbf{C} \backslash Z(p)$$

Que vaut $\mathbf{R} \cap Z_\varepsilon^R(p)$?

Lemme. *Étant donné $z \in \mathbf{R}$, z appartient à $Z_\varepsilon^R(p)$ si et seulement si z appartient à $Z_\varepsilon(p)$.*

Tracer le pseudozéro complexe ou le pseudozero réel sur l'axe réel revient au même.

Quelques propriétés

La fonction d définie pour $x, y \in \mathbf{R}^{n+1}$ par

$$d(x, \mathbf{R}y) = \inf_{\alpha \in \mathbf{R}} \|x - \alpha y\|_*$$

vérifie

$$d(x, \mathbf{R}y) = \begin{cases} \sqrt{\|x\|_2^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|_2^2}} & \text{si } y \neq 0, \\ \|x\|_2 & \text{si } y = 0 \end{cases} \qquad \text{pour la norme } \|\cdot\|_2$$

$$d(x, \mathbf{R}y) = \begin{cases} \min_{\substack{i=0:n \\ y_i \neq 0}} \|x - (x_i/y_i)y\|_1 & \text{si } y \neq 0, \\ \|x\|_1 & \text{si } y = 0 \end{cases} \qquad \text{pour la norme } \|\cdot\|_\infty$$

Quelques propriétés (suite)

Proposition 1 :
L'ensemble des ε-pseudozeros réels $Z_\varepsilon^R(p)$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Proposition 2 :
L'ensemble des ε-pseudozeros réels $Z_\varepsilon^R(p)$ est inclus dans l'ensemble des ε-pseudozéros complexes

Algorithme de calcul des pseudozéros réels

Tracé de ε-pseudozéros réels :

1. On maille un carré contenant toutes les racines de p (commande MATLAB : `meshgrid`).
2. On calcule $h(z) := d(G_R(z), \mathbf{R}G_I(z))$ pour tous les points z de la grille.
3. On affiche la ligne de niveau $|h(z)| = \frac{1}{\varepsilon}$ (commande MATLAB : `contour`).

Polynômes d'intervalles

Un polynôme d'intervalles : polynôme dont les coefficients sont des intervalles réels.

On note $\mathbf{IR}[z]$ l'ensemble des polynôme d'intervalles et $\mathbf{IR}_n[z]$ l'ensemble des polynôme d'intervalles de degré au plus n.

Soit $p \in \mathbf{IR}_n[z]$. On peut écrire

$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} [a_i, b_i] z^i.$$

Les zéros d'un polynôme d'intervalles est l'ensemble défini par

$$\mathbf{Z}(p) := \{z \in \mathbf{C} : \text{il existe } m_i \in [a_i, b_i], i = 0 : n \text{ tel que} \sum_{i=0}^{n} m_i z^i = 0\}.$$

$\Longrightarrow$ Calculer $\mathbf{Z}(p)$.

Pseudozéros avec norme pondérée

$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} p_i z^i.$$

- identification de p avec le vecteur $(p_0, p_1, \dots, p_n)^T$
- $d := (d_0, \dots, d_n)^T \in \mathbf{R}^{n+1}$ vecteur représentant les poids des différents coefficients de p
- $\| \cdot \|_{\infty,d}$ définie par

$$\|p\|_{\infty,d} = \max_{i=0:n} \{|p_i|/|d_i|\}.$$

Zéros de polynômes d'intervalles et pseudozéros réels

Introduisons le polynôme central p_c

$$p_c(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i,$$

avec $c_i = (a_i + b_i)/2$.

Notons $d_i := (b_i - a_i)/2$.

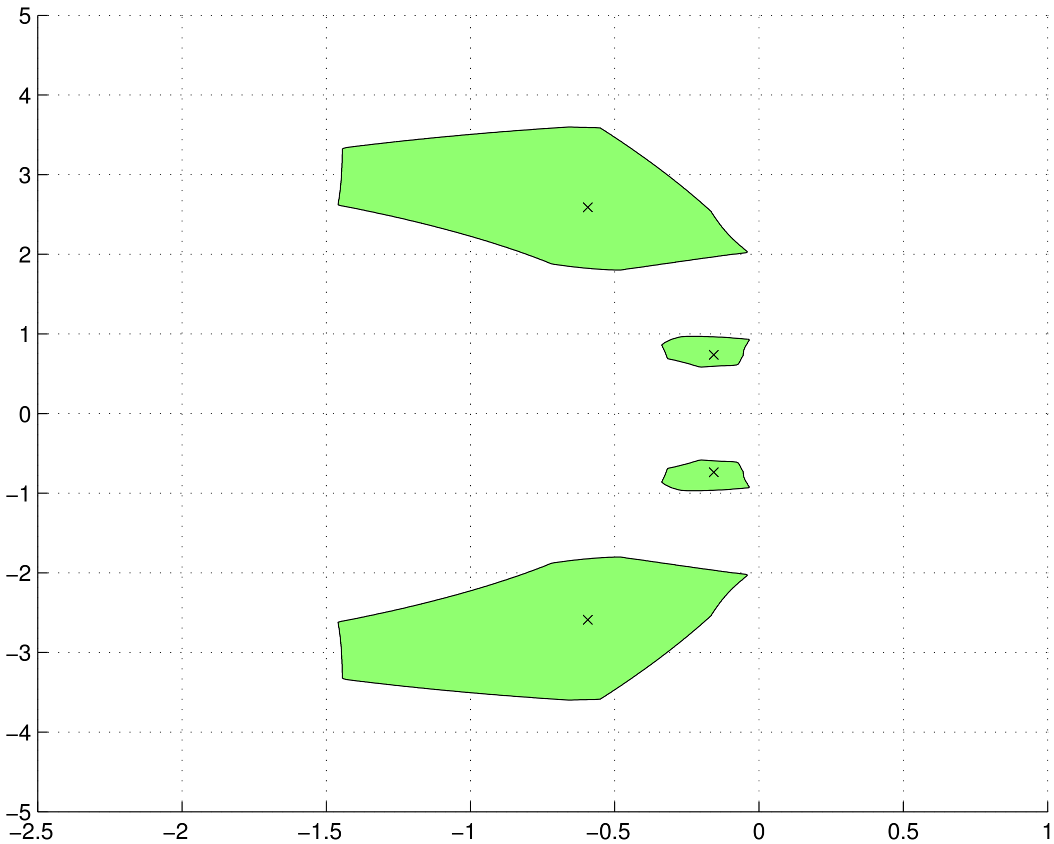
Proposition :

Avec les notation ci-dessus, on a

$$\mathbf{Z}(p) = Z_\varepsilon^R(p_c) \text{ avec } \varepsilon = 1.$$

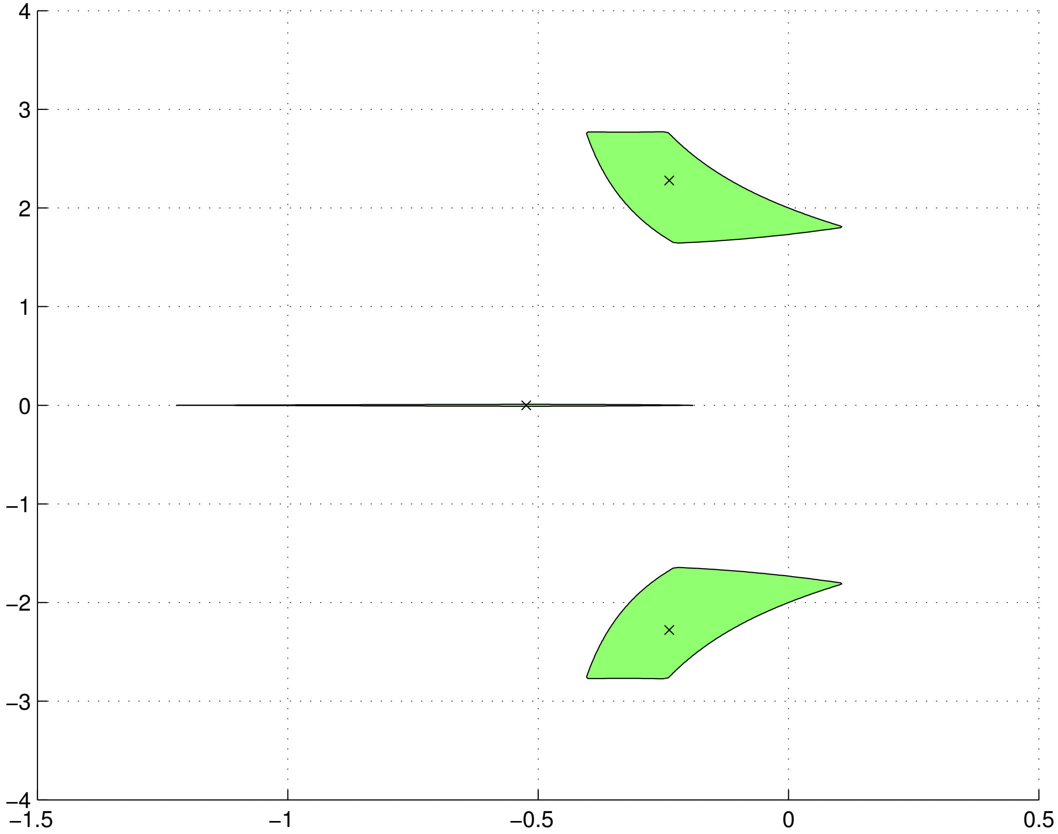
Exemple 1

$$p(z) = [1, 2]z^4 + [3.2, 3]z^3 + [10, 14]z^2 + [3, 5\sqrt{2}]z + [5, 7]$$



Exemple 2

$$p(z) = z^3 + z^2 + [3, 8]z + [1.5, 4]$$



Problème : choix de la grille

Lemme :
Soit $p(z) = \sum_{i=0}^{n} [a_i, b_i] z^i$ un polynôme d'intervalle et

$$R := 1 + \frac{\max_{i=0:n}\{\max\{|a_i|, |b_i|\}\}}{\min\{|a_n|, |b_n|\}}.$$

Alors

$$\mathbf{Z}(p) \subset B(O, R),$$

où $B(O, R)$ représente la boule du plan complexe $\mathbf{C}$ de centre O et de rayon R.

Problème : discontinuités

Lemme [Hinrichsen et Kelb] :
La fonction

$$d : \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}_+, \quad (x, y) \mapsto d(x, \mathbf{R}y)$$

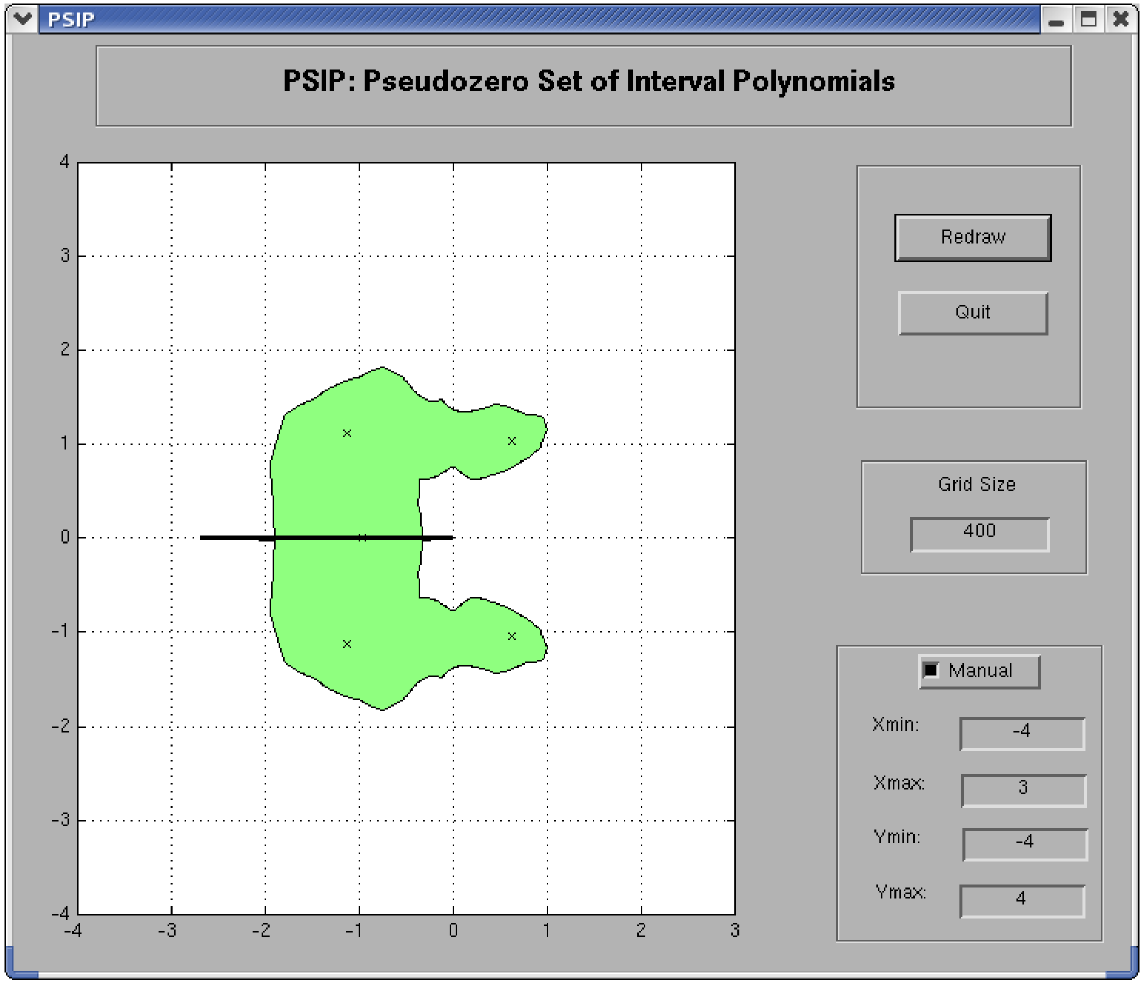
est continue pour tous les couples (x, y) avec $y \neq 0$ ou $x = 0$ et discontinue sur $(x, 0) \in \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1}$, $x \neq 0$.

$\Longrightarrow$ Cette discontinuité entraîne des difficultés lors du tracé près de l'axe des abscisses.

$\boxed{\text{Solution : sur l'axe des abscisses, on trace les pseudozéros complexes.}}$

Présentation de PSIP

Pas d'outils pour tracer des zéros de polynômes d'intervalles (à notre connaissance)



Présentation de PSIP (suite)

- une interface graphique pour MATLAB (version 6.5 (R13))
- calcul initial d'une zone contenant les pseudozéros
- possibilité de zoom et de raffinement du maillage interactive

Limitations :

- ne gère pas les polynomials dont l'intervalle dominant contient 0
- gestion partielle des discontinuités sur l'axe des abscisses

Conclusion et perspectives

Nous avons un outil qui a

- des applications en arithmétique d'intervalles

Perspectives

- Comparer avec des logiciels implémentant les intervalles (Mathematica, intpakX, IntLab, MPFI, etc.)