Pseudozéros de polynômes théorie et applications

Stef Graillat
Université de Perpignan

graillat@univ-perp.fr
http://gala.univ-perp.fr/∼graillat

École Jeunes Chercheurs en Algorithmique et Calcul Formel, Grenoble,
29 mars - 2 avril 2004

Introduction et motivations

But :

Travailler avec des polynômes ayant des données (coefficients ou racines) connues avec une incertitude : recherche de racines, primalité, calcul de PGCD, stabilité, etc.

Raisons :

- Résultats provenant d'expériences.
- Représentation des nombres en machine.

Applications :

- Traitement du signal et d'images.
- Robotique.
- Biologie moléculaire.
- Automatique.

Plan de l'exposé

I - Les pseudozéros

- Définition et algorithme de calcul

II - Application des pseudozéros en théorie du contrôle

- Stabilité au sens de Hurwith et de Schur
- Calcul du rayon de stabilité

Les pseudozéros : définition, calcul

Pseudozéros : définition

Perturbation :

Voisinage du polynôme p

$$N_\varepsilon(p) = \{\widehat{p} \in \mathbf{C}_n[z] : \|p - \widehat{p}\| \leqslant \varepsilon\}\,.$$

Définition de l'ensemble des ε-pseudozéros :

$$Z_\varepsilon(p) = \{z \in \mathbb{C} : \widehat{p}(z) = 0 \text{ pour } \widehat{p} \in N_\varepsilon(p)\}\,.$$

$\| \cdot \|$, norme sur le vecteur des coefficients de p

Les pseudozéros sont facilement calculables

Théorème :
L'ensemble des ε-pseudozéros vérifie

$$Z_\varepsilon(p) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |g(z)| := \frac{|p(z)|}{\|\underline{z}\|_*} \leqslant \varepsilon \right\},$$

où $\underline{z} = (1, z, \dots, z^n)$ et $\| \cdot \|_*$ est la norme duale de $\| \cdot \|$.

$$\|y\|_* = \sup_{x \neq 0} \frac{|y^* x|}{\|x\|}$$

Algorithme de calcul des pseudozéros

Tracé de ε-pseudozéros :

1. On maille un carré contenant toutes les racines de p (commande MATLAB : `meshgrid`).
2. On calcule $g(z) := \frac{|p(z)|}{\|\underline{z}\|}$ pour tous les points z de la grille.
3. On affiche la ligne de niveau $|g(z)| = \varepsilon$ (commande MATLAB : `contour`).

Problèmes :

- Localisation : trouver un carré contenant toutes les racines de p et tous les pseudozéros.
- Séparation : trouver un pas de grille qui sépare toutes les racines.

Simulation numérique

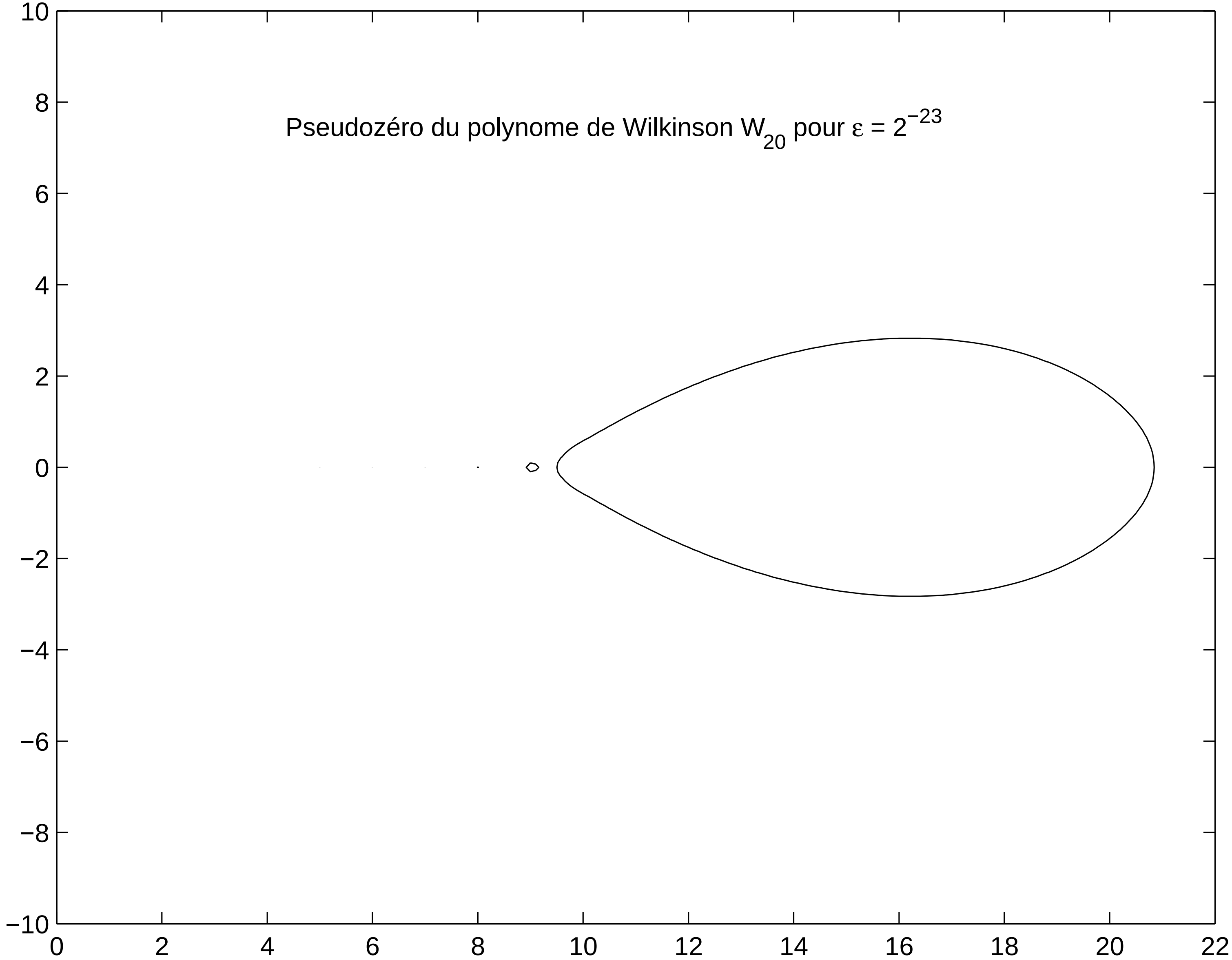
Ensemble des pseudozéros du polynôme « de Wilkinson »

$$\begin{aligned} W_{20} &= (z-1)(z-2)\cdots(z-20), \\ &= z^{20} - 210z^{19} + \cdots + 20!, \end{aligned}$$

en ne perturbant que le coefficient de z^{19} avec une perturbation inférieure à $\varepsilon = 2^{-23}$.
On utilise une norme $\|\cdot\|_\infty$ pondérée :

$$\|p\|_\infty = \max_i \frac{|p_i|}{m_i} \text{ avec } m_i \text{ réels positifs}$$

et la convention $m/0 = \infty$ si $m > 0$ et $0/0 = 0$.

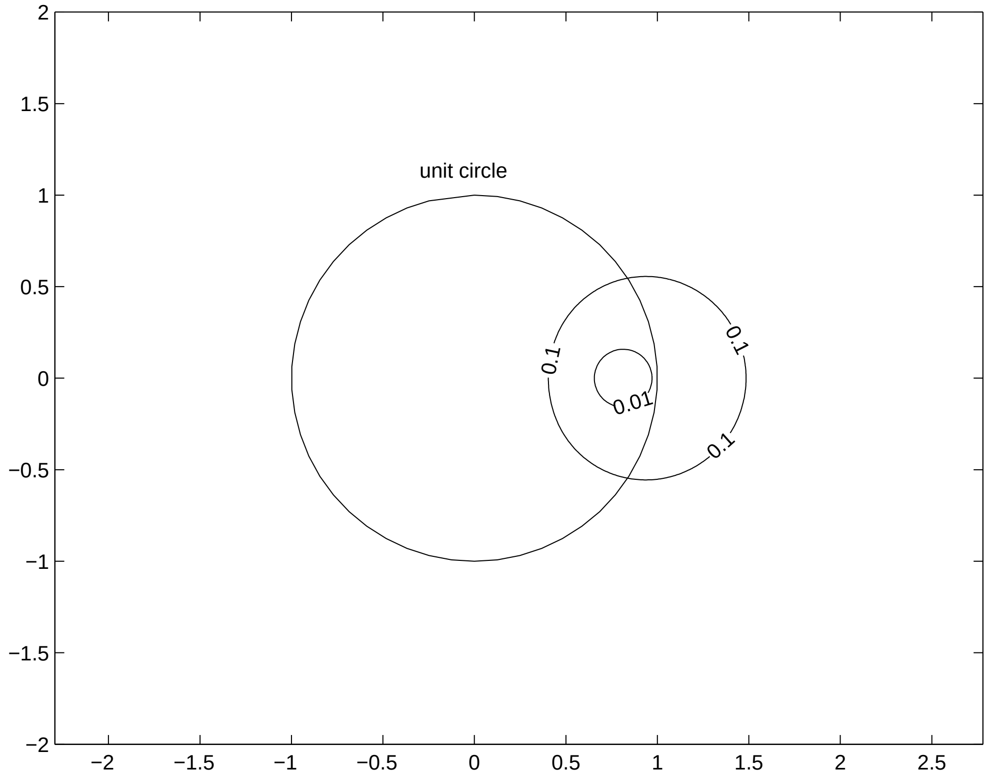

Pseudozéro du polynome de Wilkinson W_{20} pour $\varepsilon = 2^{-23}$
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22

Application des pseudozéros en théorie du contrôle

La stabilité robuste de Schur en théorie du contrôle

Stabilité de Schur : $|\text{racines de } p| < 1$.

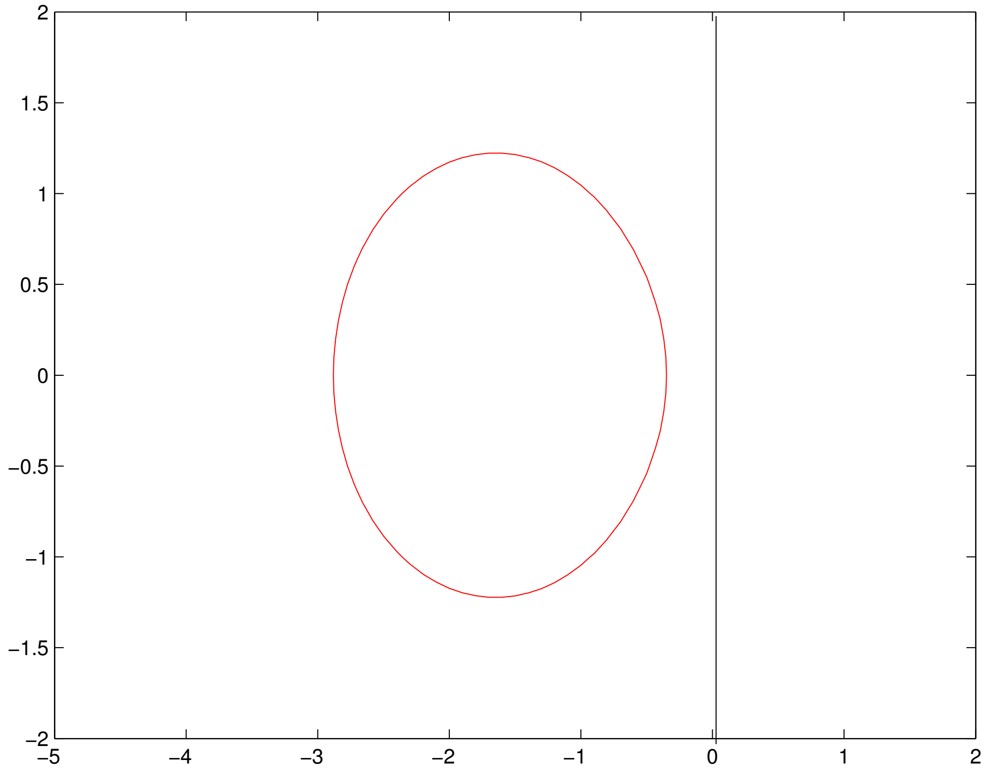
ε-pseudozero de $p(z) = (z - 0.8)^2$ pour $\varepsilon = 0.1$ and $\varepsilon = 0.01$.



La stabilité robuste de Hurwitz en théorie du contrôle

La stabilité de Hurwitz : la partie réelle des racines de $p < 0$.

ε-pseudozero de $p(z) = (z+1)^2$ pour $\varepsilon = 0.4$.



Stabilité d'un polynôme

$\mathcal{P}$: $\mathbf{C}[X]$ muni de la norme 2, $\|\cdot\|$
$\mathcal{P}_n$: éléments de $\mathcal{P}$ de degré inférieur ou égal à n
$\mathcal{M}_n$: éléments de $\mathcal{P}_n$ unitaires

Définition. *Un polynôme est dit* stable *si toutes ses racines ont une partie réelle strictement négative et* instable *sinon.*

La fonction *abscisse* $a : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ est définie par

$$a(p) = \max\{\mathrm{Re}(z) : p(z) = 0\}.$$

Un polynôme p est stable $\iff a(p) < 0$

Motivation

En théorie du contrôle, une fonction de transfert s'écrit souvent sous la forme $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ ou N et D sont des polynômes.

Le système est stable si D est un polynôme stable.

Question : si D est stable, est-on loin d'un système instable ?

Problème : Trouver la distance au système instable le plus proche.

(on se restreindra au cas où D est unitaire)

Énoncé du problème

Rayon de stabilité $\beta(p)$: distance du polynôme $p \in \mathcal{M}_n$ à l'ensemble des polynômes unitaires instables.

$$\beta(p) = \min\{\|p-q\| : q \in \mathcal{M}_n \text{ et } a(q) \geqslant 0\}.$$

Énoncé du problème :

Étant donné un polynôme $p \in \mathcal{M}_n$, calculer $\beta(p)$.

Solution proposée

Outils utilisés

- la formule explicite donnant les pseudozéros
- la dépendance continue des racines par rapport aux coefficients des polynômes
- les suites de Sturm pour compter les racines réelles

Les résultats

- un algorithme calculant $\beta(p)$ avec une tolérance arbitraire τ
- un graphique montrant les pseudozéros à la distance $\beta(p)$

  $\longrightarrow$ permet une analyse qualitative du résultat

  $\longrightarrow$ visualisation du résultat

Une autre caractérisation de $Z_\varepsilon(p)$

Notons $h_{p,\varepsilon} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$h_{p,\varepsilon}(x,y) = |p(x+iy)|^2 - \varepsilon^2 \sum_{j=0}^{n-1} (x^2+y^2)^j.$$

On a alors

$$\boxed{Z_\varepsilon(p) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : h_{p,\varepsilon}(x,y) \leqslant 0\}}$$

$\Longrightarrow$ $h_\varepsilon(\cdot, y)$ et $h_\varepsilon(x, \cdot)$ sont des polynômes de degré $2n$.

Résultats théoriques utilisés

Proposition. *La fonction* abscisse

$$a : \mathcal{P}_n \to \mathbf{R}$$

définie par $a(p) = \max\{\mathrm{Re}(z) : p(z) = 0\}$ *est continue sur* $\mathcal{M}_n$.

Proposition. *On a la relation suivante*

$$\beta(p) = \min\{\|p - q\| : q \in \mathcal{M}_n \text{ et } a(q) = 0\}.$$

Théorème. *L'équation* $h_{p,\varepsilon}(0, y) = 0$ *a une solution* y *réelle si et seulement si* $\beta(p) \leqslant \varepsilon$.

Algorithme (dichotomie)

Entrée : un polynôme stable p et une tolérance τ sur la précision de $\beta(p)$ calculé

Sortie : un nombre α tel que $|\alpha - \beta(p)| \leqslant \tau$

$\gamma := 0, \quad \delta := \|p - z^n\|$
tant que $|\gamma - \delta| > \tau$ **faire**
    $\varepsilon := \frac{\gamma+\delta}{2}$
    si l'équation $h_{p,\varepsilon}(0, y) = 0$ a une solution y réelle **alors**
        $\delta := \varepsilon$
    autrement
        $\gamma := \varepsilon$
    fin si
fin tant que
retourne $\alpha = \frac{\gamma+\delta}{2}$

Simulations numériques

Pour le polynôme $p(z) = z + 1$, l'algorithme donne $\beta(p) \approx 0.999996$

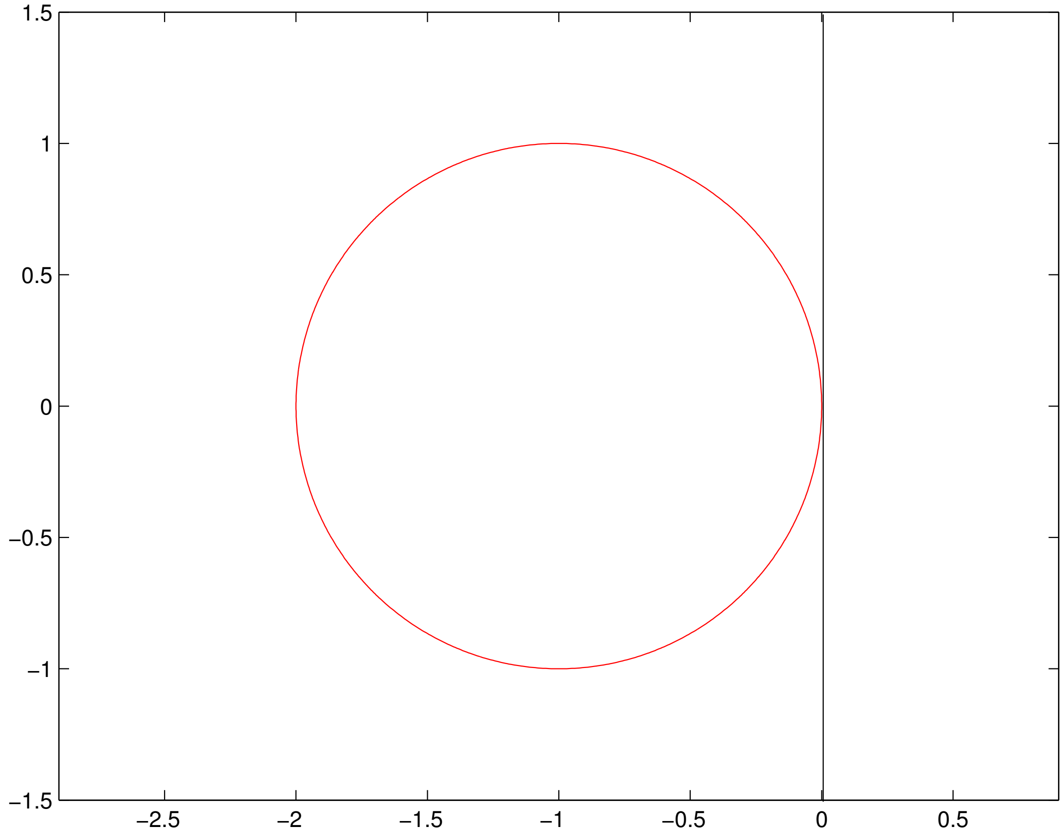


FIG. 1: $\beta(p)$-pseudozéros de $p(z) = z + 1$

Simulations numériques (suite)

Pour le polynôme $p(z) = z^3 + 4z^2 + 6z + 4$, l'algorithme donne $\beta(p) \approx 2.610226$

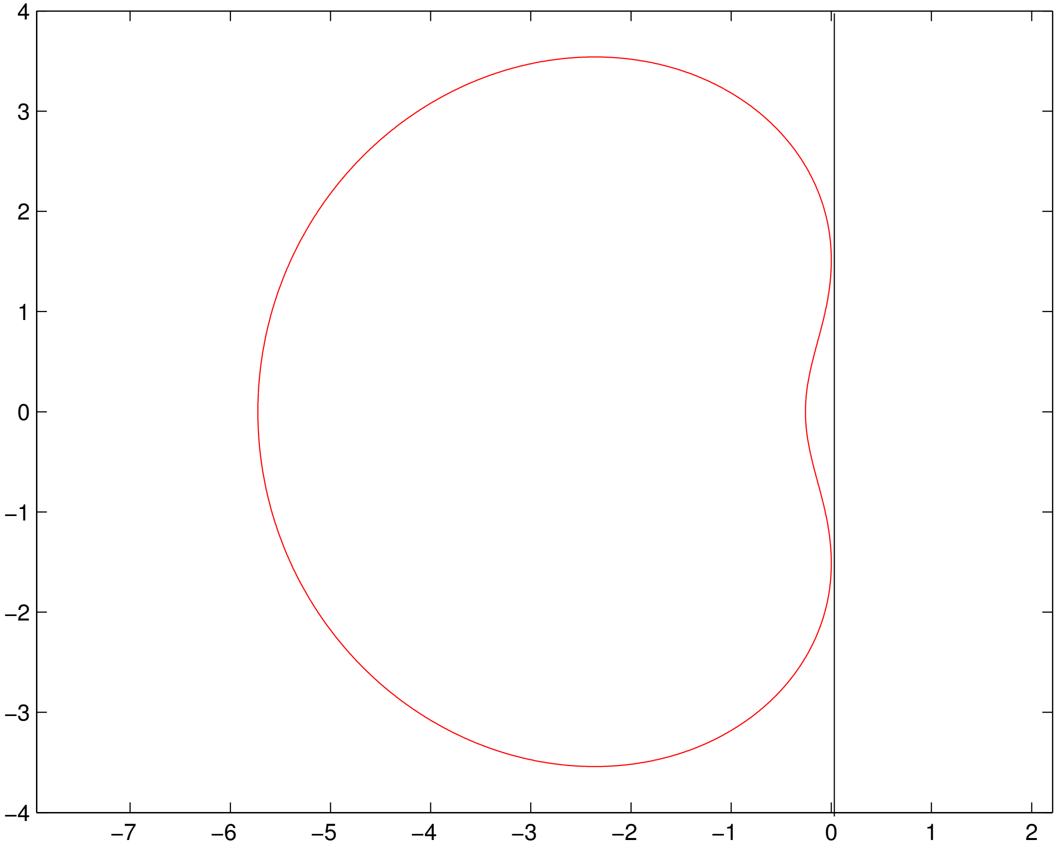


FIG. 2: $\beta(p)$-pseudozéros de $p(z) = z^3 + 4z^2 + 6z + 4$

Conclusion

Nous avons un outil qui a

- des applications en calcul formel
- des applications pour le calcul en précision finie
- des applications en théorie du contrôle