Calcul du rayon de stabilité pour les polynômes

Stef GRAILLAT, Philippe LANGLOIS
Université de Perpignan

{graillat,langlois}@univ-perp.fr
http://gala.univ-perp.fr/~{graillat,langlois}

Journées ARINEWS, Lyon, 17-18 novembre 2003

Stabilité d'un polynôme

$\mathcal{P}$: $\mathbf{C}[X]$
$\mathcal{P}_n$: éléments de $\mathcal{P}$ de degré inférieur ou égal à n
$\mathcal{M}_n$: éléments de $\mathcal{P}_n$ unitaires

Définition. *Un polynôme est dit* stable *si toutes ses racines ont une partie réelle strictement négative et* instable *sinon.*

La fonction *abscisse* $a : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ est définie par

$$a(p) = \max\{\mathrm{Re}(z) : p(z) = 0\}.$$

$$\boxed{\text{Un polynôme } p \text{ est stable} \iff a(p) < 0}$$

Motivation

En théorie du contrôle, une fonction de transfert s'écrit souvent sous la forme $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ ou N et D sont des polynômes.

$$\boxed{\text{Le système est stable si } D \text{ est un polynôme stable.}}$$

Question : si D est stable, est-on loin d'un système instable ?

Problème : Trouver la distance au système instable le plus proche.

(on se restreindra au cas où D est unitaire)

Énoncé du problème

Rayon de stabilité $\beta(p)$: distance du polynôme $p \in \mathcal{M}_n$ à l'ensemble des polynômes unitaires instables.

$$\beta(p) = \min\{\|p - q\| : q \in \mathcal{M}_n \text{ et } a(q) \geqslant 0\}.$$

Énoncé du problème :

Étant donné un polynôme $p \in \mathcal{M}_n$, calculer $\beta(p)$.

Solution proposée

Outils utilisés

- la formule explicite donnant les pseudozéros
- la dépendance continue des racines par rapport aux coefficients des polynômes

Les résultats

- un algorithme calculant $\beta(p)$ avec une tolérance arbitraire τ
- un graphique montrant les pseudozéros à la distance $\beta(p)$

  $\longrightarrow$ permet une analyse qualitative du résultat

  $\longrightarrow$ visualisation du résultat

Les pseudozéros

Perturbation :

Voisinage du polynôme p

$$N_\varepsilon(p) = \{\widehat{p} \in \mathcal{M}_n : \|p - \widehat{p}\| \leqslant \varepsilon\}\,.$$

Définition de l'ensemble des ε-pseudozéros :

$$Z_\varepsilon(p) = \{z \in \mathbf{C} : \widehat{p}(z) = 0 \text{ pour } \widehat{p} \in N_\varepsilon(p)\}\,.$$

On travaille avec la norme 2 que l'on note $\|\cdot\|$.

Les pseudozéros sont facilement calculables

Théorème [Trefethen et Toh, 1994]
L'ensemble des ε-pseudozéros vérifie

$$Z_\varepsilon(p) = \left\{ z \in \mathbf{C} : g(z) := \frac{|p(z)|}{\|\underline{z}\|} \leqslant \varepsilon \right\},$$

où $\underline{z} = (1, z, \dots, z^{n-1})$.

Algorithme de calcul des pseudozéros

Tracé de ε-pseudozéros :

1. On maille un carré contenant toutes les racines de p (commande MATLAB : `meshgrid`).
2. On calcule $g(z) := \frac{|p(z)|}{\|\underline{z}\|}$ pour tous les points z de la grille.
3. On affiche la ligne de niveau $|g(z)| = \varepsilon$ (commande MATLAB : `contour`).

Problèmes :

- Localisation : trouver un carré contenant toutes les racines de p et tous les pseudozéros.
- Séparation : trouver un pas de grille qui sépare toutes les racines.

Choix de la grille

Soit p un polynôme unitaire de degré n et $\{z_i\}$ l'ensemble de ses n racines. Notons $r = \max_{i=1;\ldots;n} |z_i|$. On a [Mignotte, 1989]

$$\boxed{r \leqslant 1 + \|p\|_\infty.}$$

Notons $R := 1 + \|p\| + \varepsilon$. On montre que

$Z_\varepsilon(p) \subset B(0, R)$ boule fermée de centre 0 et de rayon R.

Complexité du tracé

Notons L la longueur du carré et h le pas de discrétisation. L'évaluation de $g(u)$ nécessite

- l'évaluation d'un polynôme, ce qui se fait en $\mathcal{O}(n)$,
- le calcul de la norme 2 d'un vecteur qui se fait aussi en $\mathcal{O}(n)$.

La complexité de l'algorithme précédent est donc en

$$\boxed{\mathcal{O}((L/h)^2 n)}.$$

L et h dépendent de n mais aussi des coefficients du polynôme.

Une autre caractérisation de $Z_\varepsilon(p)$

Notons $h_{p,\varepsilon} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$h_{p,\varepsilon}(x,y) = |p(x+iy)|^2 - \varepsilon^2 \sum_{j=0}^{n-1} (x^2+y^2)^j.$$

On a alors

$$\boxed{Z_\varepsilon(p) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : h_{p,\varepsilon}(x,y) \leqslant 0\}}$$

$\Longrightarrow$ $h_\varepsilon(\cdot, y)$ et $h_\varepsilon(x, \cdot)$ sont des polynômes de degré $2n$.

Résultats théoriques utilisés

Proposition. *La fonction* abscisse

$$a : \mathcal{P}_n \to \mathbf{R}$$

définie par $a(p) = \max\{\mathrm{Re}(z) : p(z) = 0\}$ *est continue sur* $\mathcal{M}_n$.

Proposition. *On a la relation suivante*

$$\beta(p) = \min\{\|p - q\| : q \in \mathcal{M}_n \text{ et } a(q) = 0\}.$$

Théorème. *L'équation* $h_{p,\varepsilon}(0, y) = 0$ *a une solution* y *réelle si et seulement si* $\beta(p) \leqslant \varepsilon$.

Algorithme (dichotomie)

Entrée : un polynôme stable p et une tolérance τ sur la précision de $\beta(p)$ calculé

Sortie : un nombre α tel que $|\alpha - \beta(p)| \leqslant \tau$

$\gamma := 0, \quad \delta := \|p - z^n\|$
tant que $|\gamma - \delta| > \tau$ **faire**
    $\varepsilon := \frac{\gamma+\delta}{2}$
    si l'équation $h_{p,\varepsilon}(0, y) = 0$ a une solution y réelle **alors**
        $\delta := \varepsilon$
    autrement
        $\gamma := \varepsilon$
    fin si
fin tant que
retourne $\alpha = \frac{\gamma+\delta}{2}$

Complexité de l'algorithme

Nécessite le calcul des $2n$ racines du polynôme $h_{p,\varepsilon}(0, y)$. Cela se fait au moins en $\mathcal{O}(n^3)$.

Le choix actuel : la commande `solve` de MAPLE.

Le nombre d'itérations de la dichotomie pour obtenir le résultat avec une tolérance τ est supérieur à

$$\left\lceil \frac{\ln(\|p - z^n\|/\tau)}{\ln 2} \right\rceil$$

Simulations numériques

Pour le polynôme $p(z) = z + 1$, l'algorithme donne $\beta(p) \approx 0.999996$

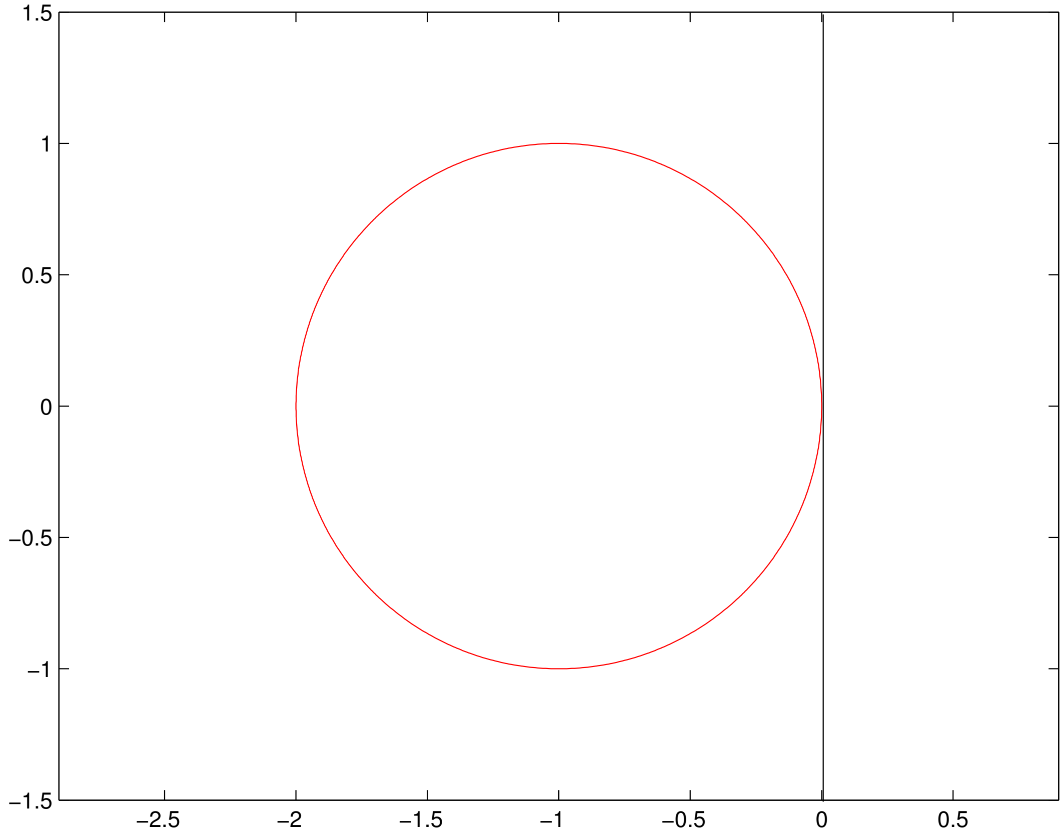

FIG. 1: $\beta(p)$-pseudozéros de $p(z) = z + 1$

Simulations numériques (suite)

Pour le polynôme $p(z) = z^2 + z + 1/2$, l'algorithme donne $\beta(p) \approx 0.485868$

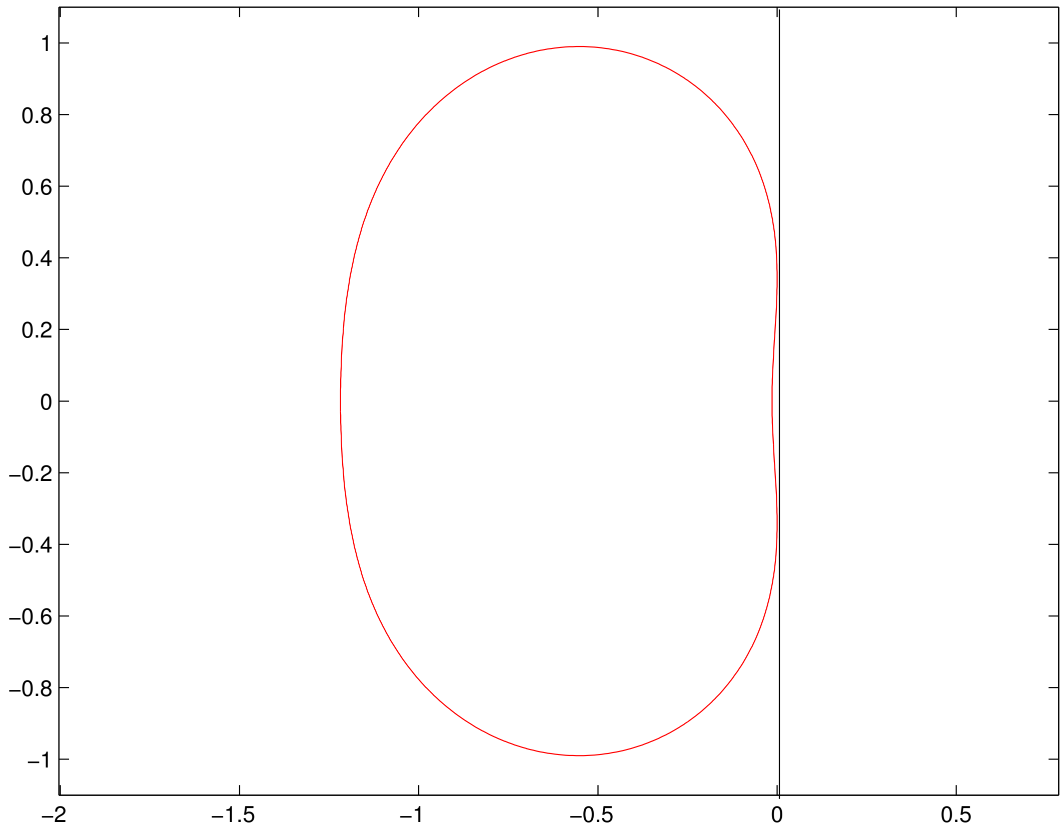

FIG. 2: $\beta(p)$-pseudozéros de $p(z) = z^2 + z + 1/2$

Simulations numériques (suite)

Pour le polynôme $p(z) = z^3 + 4z^2 + 6z + 4$, l'algorithme donne $\beta(p) \approx 2.610226$

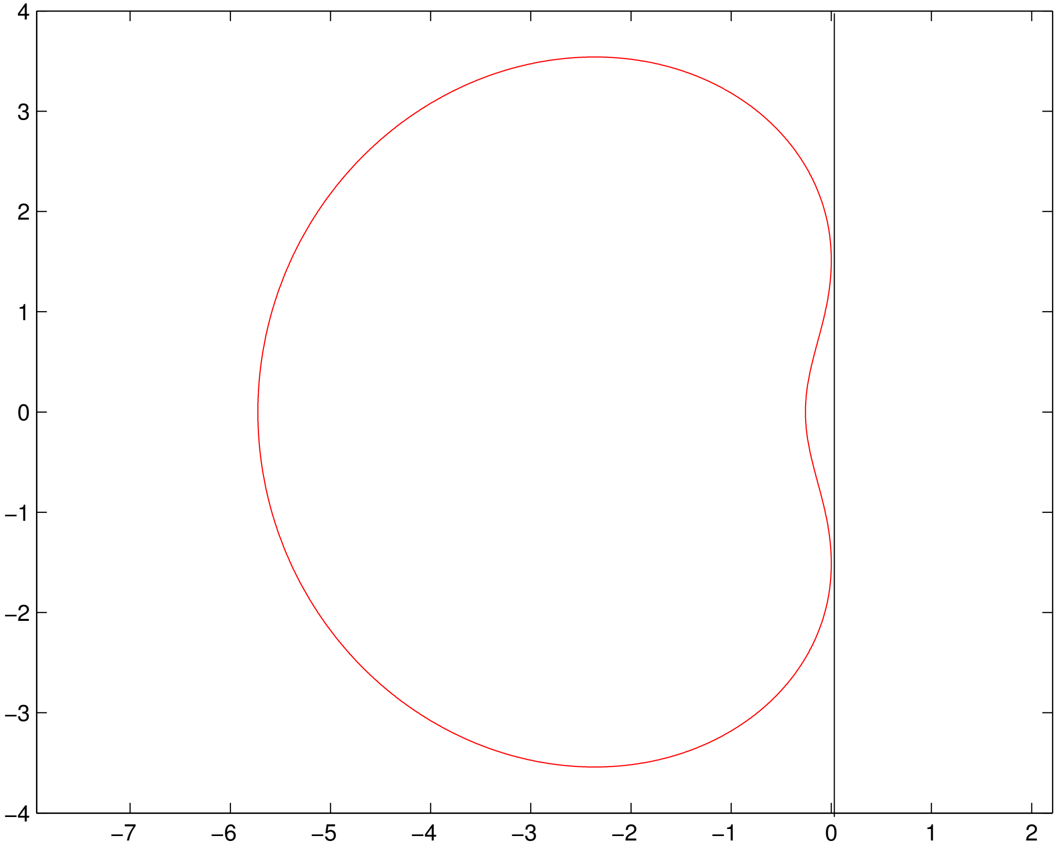

FIG. 3: $\beta(p)$-pseudozéros de $p(z) = z^3 + 4z^2 + 6z + 4$

Conclusion et perspectives

Nous avons

- Un algorithme "formel"
- Une vérification graphique par l'usage des pseudozéros

Des pistes de recherche

- Un algorithme numérique en précision finie
- Ne pas calculer les $2n$ racines [Bini et Fiorentino, 2001]
- Travailler avec $\|\cdot\|_p$ (en particulier $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$)
- Travailler avec une autre définition de la stabilité : les racines sont des modules < 1